Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 93-98

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__93_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1406.

(1882, p. 336.)

0, 1, 6 *sont-ils les seuls nombres triangulaires dont les carrés soient triangulaires ?* (LIONNET.)

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Le problème revient à la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$(1)\qquad \frac{x^2(x+1)^2}{4} = \frac{y(y+1)}{2},$$

ou

$$2y^2 + 2y - x^2(x+1)^2 = 0.$$

On en tire

$$y = -\frac{1 \pm \sqrt{1 + 2x^2(x+1)^2}}{2},$$

et, en posant $x(x+1) = v$, la question est ramenée à la résolution de l'équation bien connue

$$1 + 2v^2 = u^2 \qquad \text{ou} \qquad u^2 - 2v^2 = 1.$$

Celle-ci admet pour solutions les valeurs

$$u = 1,\ 3,\ 17,\ 99,\ 577,\ 3363,\ 19601,\ 114243,\ \ldots,$$
$$v = 0,\ 2,\ 12,\ 70,\ 408,\ 2378,\ 13860,\ 80782,\ \ldots.$$

dont la loi de récurrence est donnée par les formules

$$u_{n+1} = 6u_n - u_{n-1},$$
$$v_{n+1} = 6v_n - v_{n-1}.$$

Voir, au sujet des équations $u^2 - 2v^2 = \pm 1$, par exemple : *N. A.*, quest. 953, A. Laisant, solution par Moret-Blanc, 1872, p. 173 ; quest. 1338, Lionnet, 1881, p. 373 ; *N. C.*, 1878, p. 166-167 ; quest. 233, Ph. Breton, solutions, 1877, p. 194, et 1879, p. 285, E. Catalan ; quest. 89, Ed. Lucas ; *J. E.*, 1884, p. 15-19, G. de Longchamps ; *Mathesis*, quest. 282, de Rocquigny, 1886, p. 162 ; *J. S.*, quest. 360, E. Lemoine, solution, 1893, p. 23, E. Catalan ; quest. 87, S. Realis, solution, 1893, p. 117-120, H. Brocard, et p. 139-140, Boutin ; *J. E.*, 1894, exerc. 323, Boutin, etc.

Les valeurs de u ont une corrélation assez curieuse avec celles de x dans l'équation

$$(2)\qquad x^2 - 2y^2 = -1.$$

En effet, on a vu (*loc. cit., J. S.*, 1893, p. 118) que les valeurs de x ont pour expressions

$$1,\ 7,\ 41,\ 239,\ 1393,\ 8119,\ 47321,\ \ldots,$$

avec la condition

$$x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}.$$

Si on les additionne successivement à partir de la première, on aura

$$1,\ 8,\ 49,\ 288,\ 1681,\ 9800,\ \ldots,$$

sur lesquelles on reconnaît, alternativement, des nombres carrés et des nombres de la forme $K^2 - 1$. Or, précisément, on trouve ainsi

$$8 = 3^2 - 1, \qquad 288 = 17^2 - 1, \qquad 9800 = 99^2 - 1, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire les nombres 3, 17, 99, ... représentant les valeurs de u. Ainsi, ces dernières sont alternativement de la forme $k^2 - 1$, $l^2 + 1$. Si on les sépare en deux groupes, on a également entre les valeurs successives de k ou de l la relation de récurrence

$$k_{n+1} = 6k_n - k_{n-1},$$

comme on pourra le vérifier sur les séries

k ...... 2, 10, 58, 338, 1970, 11482, ...

et

l ...... 0. 4, 24, 140, 816, 4756, ...

Toutes ces relations ont ici leur utilité, parce qu'elles facilitent les vérifications et qu'elles dispensent de passer par la formation des carrés v^2 et l'extraction de la racine carrée des nombres $2v^2 + 1$.

L'équation (1) est, en réalité, de la forme

$$\frac{y(y+1)}{2} = t^2,$$

ce qui revient à dire qu'il faudrait, au préalable, chercher les nombres qui sont à la fois triangulaires et carrés, question déjà ancienne, car elle est traitée, avec beaucoup d'autres analogues, dans l'*Algèbre* d'Euler (*N. C.*, 1877, p. 194, remarque de S. Realis).

Or, nous avons, dans ce qui précède, les éléments de la solution de cette question, car les nombres à la fois triangulaires et carrés ont pour expressions

$$1,\ 36,\ 1225,\ 41616,\ \ldots,$$

carrés de

$$1,\ 6,\ 35,\ 204,\ 1189,\ 6930,\ 40391,\ \ldots,$$

c'est-à-dire des valeurs de $\frac{v}{2}$.

Il resterait donc, parmi ces valeurs de $\frac{v}{2}$, à chercher celles qui sont triangulaires, c'est-à-dire de la forme $\frac{x^2+x}{2}$, ou, ce qui revient au même, à résoudre l'équation $v = x^2+x$. On y parviendra aisément sans avoir à décomposer v en ses facteurs premiers. Il suffira, en effet, d'extraire la racine carrée de v et de constater si le reste de l'opération donne le même nombre que la racine, par analogie avec ce qui a été fait pour la résolution de l'équation (2) (*loc. cit.*, *J. S.*, 1893, p. 117).

Cette méthode est exempte de tâtonnements, tandis que la détermination des facteurs et leur groupement en produits de deux nombres consécutifs seraient certainement beaucoup plus laborieux.

Mais si cette recherche est rendue relativement facile, on ne peut dire qu'elle soit aussi fructueuse. Elle réussit, il est vrai, pour les trois premières valeurs de v, données dans l'énoncé, puisque $0 = 0^2+0$, $2 = 1^2+1$, $12 = 3^2+3$, mais elle a échoué pour les valeurs suivantes, au moins jusqu'au 15^e^ terme.

Il nous paraît fort possible que le problème n'admette pas d'autres solutions.

Question 1554.

(1885, p. 535.)

Si x, y, z sont trois nombres positifs dont la somme est égale à l'unité, on a

$$(1-x)(1-y)(1-z) < 8xyz.$$

(Wolstenholme.)

SOLUTION

Par M. Gallucci.

On a

$$\begin{aligned}
&(1-x)(1-y)(1-z)\\
&= 1-(x+y+z)+yz+zx+xy-xyz\\
&= yz+zx+zy-xyz\\
&= xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right).
\end{aligned}$$

Or, on sait que, si la somme de plusieurs nombres est constante, la somme des inverses est un minimum lorsque ces nombres sont égaux entre eux; donc

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqq 9,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1 \geqq 8, \qquad xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right) \geqq 8xyz,$$

$$(1-x)(1-y)(1-z) \geqq 8xyz,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Si x, y, z sont trois nombres positifs dont la somme est $= a$, on a

$$\left(\frac{1}{2}a-x\right)\left(\frac{1}{2}a-y\right)\left(\frac{1}{2}a-z\right) \geqq \frac{1}{8}xyz.$$

Il faut distinguer deux cas : 1° lorsque les facteurs du premier membre sont tous les trois positifs; 2° lorsqu'un seul d'eux est négatif (il n'y a pas d'autre cas possible). Dans le second cas, on a évidemment

$$\left(\frac{1}{2}a-x\right)\left(\frac{1}{2}a-y\right)\left(\frac{1}{2}a-z\right) < \frac{1}{8}xyz,$$

car le premier membre est une quantité négative; le lecteur pourra aisément démontrer le premier cas.

La question 1554 peut donc être complétée ainsi : Si x, y, z sont trois nombres positifs dont la somme est $= 1$, on a

$$8\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right) \leqq xyz \leqq \frac{1}{8}(1-x)(1-y)(1-z).$$

Question 1635.

(1892, p. 30*.)

D'un point quelconque M *du plan d'une lemniscate de Bernoulli, de centre* O, *on mène les tangentes* MT_1, MT_2, MT_3, ... *à la courbe et l'on abaisse les normales* MN_1, MN_2, MN_3, ... *Montrer que l'on a la relation*

$$OT_1.OT_2.OT_3\ldots = ON_1.ON_2.ON_3\ldots.$$

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. ERNEST FOUCART.

Soit

$$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$$

l'équation de la lemniscate, ou en coordonnées polaires

$$\rho^2=a^2\cos 2\omega.$$

Les points de contact des tangentes issues du point $M(x_1, y_1)$ sont sur la courbe précédente et sur la cubique

$$\begin{aligned}&x_1(2x^2+2y^2-a^2)x\\&\quad+y_1(2x^2+2y^2+a^2)y-a^2(x^2-y^2)=0.\end{aligned}$$

En tenant compte de l'équation de la lemniscate, on a

$$x=\rho\cos\omega=\rho\frac{\sqrt{a^2+\rho^2}}{a\sqrt{2}},\qquad y=\rho\sin\omega=\rho\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{a\sqrt{2}}.$$

L'équation aux ρ des points T_1, T_2, T_3, ... est donc

$$x_1(2\rho^2-a^2)\sqrt{a^2+\rho^2}+y_1(2\rho^2+a^2)\sqrt{a^2-\rho^2}\,a\rho^3\sqrt{2}=0.$$

Faisant disparaître les radicaux, et ordonnant par rapport à ρ,

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&[(4x_1^2-4y_1^2-2a^2)^2+64x_1^2y_1^2]\rho^{12}+\ldots\\&\qquad\qquad+a^{12}(x_1^2-y_1^2)^2=0.\end{aligned}\right.$$

Les pieds des normales issues de M sont sur la courbe

$$(x-x_1)(2x^2+2y^2+a^2)y=(y-y_1)(2x^2+2y^2-a^2)x.$$

L'équation aux ρ des points N_1, N_2, N_3, ... s'obtient comme la précédente; c'est

$$\begin{aligned}&\rho a\sqrt{2}\sqrt{a^4-\rho^4}-x_1(2\rho^2+a^2)\sqrt{a^2-\rho^2}\\&\qquad\qquad+y_1(2\rho^2-a^2)\sqrt{a^2+\rho^2}=0,\end{aligned}$$

et, en ordonnant,

$$(2)\quad[(4x_1^2-4y_1^2-2a^2)^2+64x_1^2y_1^2]\rho^{12}+\ldots+a^{12}(x_1^2-y_1^2)^2.$$

La comparaison des égalités (1) et (2) donne la relation à établir.