NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Licence ès sciences mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 68-81

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__68_1>

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE JUILLET 1895. — COMPOSITIONS.

Lyon.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Le 9 juillet 1895, à* 10^h *temps moyen* $= 17^h 10^m 18^s,65$ *temps sidéral (méridien de Paris), la Lune aura pour coordonnées équatoriales géocentriques :*

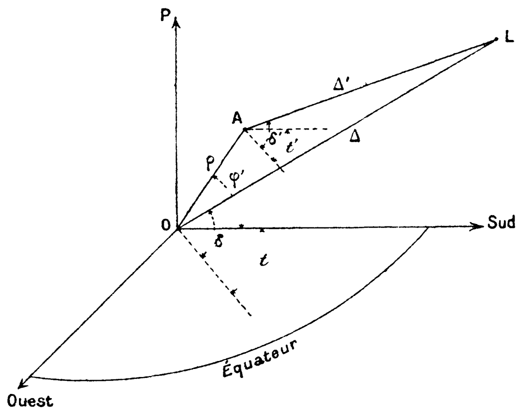
Ascension droite.....	$\alpha =$	$21^h 32^m 40^s,49$
Déclinaison..........	$\delta = -$	$26^\circ 47' \; 8'',6$
Parallaxe horizontale	$\pi =$	$54' \; 12'',6$

Calculer la position apparente de cet astre (α' *et* δ')

pour un lieu situé à la surface de la Terre et défini par les coordonnées suivantes :

Longitude E. de Paris........	$L = 9^m 47^s,58$
Latitude géocentrique.........	$\varphi' = 45°30'\ 10'',3$
Log. de la distance au centre rapportée au rayon équatorial.	$l.\rho = 9,9992590$

En introduisant l'angle horaire t et la distance Δ, et



en accentuant les symboles relatifs au lieu d'observation A, on peut écrire immédiatement :

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta'\cos\delta'\cos t' = \Delta\cos\delta\cos t - \rho\cos\varphi' \\ \Delta'\cos\delta'\sin t' = \Delta\cos\delta\sin t \\ \Delta'\sin\delta' \quad = \Delta\sin\delta \quad - \rho\sin\varphi'. \end{cases}$$

Divisons partout par Δ; faisons $\frac{\Delta'}{\Delta} = f$, et rappelons qu'en prenant pour unité le rayon équatorial, on a

$$\frac{1}{\Delta} = \sin\pi.$$

Les équations (1) deviennent

$$(2)\qquad \begin{cases} f\cos\delta'\cos t' = \cos\delta\cos t - \rho\cos\varphi'\sin\pi \\ f\cos\delta'\sin t' = \cos\delta\sin t \\ f\sin\delta' \qquad = \sin\delta \qquad - \rho\sin\varphi'\sin\pi. \end{cases}$$

Une transformation facile donne ensuite, si l'on remarque que $t' - t = \alpha - \alpha'$:

$$(3)\qquad \begin{cases} f\cos\delta'\sin(\alpha-\alpha') = \rho\cos\varphi'\sin\pi\sin t & = \xi \\ f\cos\delta'\cos(\alpha-\alpha') = \cos\delta - \rho\cos\varphi'\sin\pi\cos t & = \cos\delta + \eta \\ f\sin\delta' \qquad = \sin\delta - \rho\sin\varphi'\sin\pi & = \sin\delta + \zeta. \end{cases}$$

On sait que le temps sidéral local θ est égal au temps sidéral du méridien origine, plus la longitude

$$\theta = \theta_0 + \mathrm{L}.$$

On a, d'autre part,

$$t = \theta - \alpha.$$

Nous pouvons donc résoudre les équations (3).

D'ordinaire, on demande le demi-diamètre apparent D′ de la Lune vue du lieu A, étant connu le demi-diamètre apparent D rapporté au centre de la Terre. Comme les diamètres apparents sont en raison inverse des distances, on a

$$\frac{\sin \mathrm{D}'}{\sin \mathrm{D}} = \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{1}{f}, \qquad \text{d'où} \qquad \sin \mathrm{D}' = \sin \mathrm{D}\,\frac{1}{f}.$$

Il suffit de prendre $\mathrm{D}' = \dfrac{\mathrm{D}}{f}$.

Nous donnons ci-dessous le Tableau des calculs. On remarquera que nous substituons aux caractéristiques négatives leurs valeurs complémentaires, et que nous mettons seulement 6 décimales aux logarithmes des produits où figure $\sin\pi$. Le signe qui précède chaque logarithme indique par convention le signe du nombre correspondant.

θ_0	17.10.18,65	$l.\cos\varphi'$	+9,845640
L	9.47,58	$l.\rho$	+9,999259
θ	17.20. 6,23	$l.\sin\pi$	+8,197788
α	21.32.40,49	$l.\sin\varphi'$	+9,853263
$\theta-\alpha=t$	19.47.26,74	$l.\sin t$	−9,950430
t	296°51′26″,51	$l.\rho\cos\varphi'\sin\pi$	+8,042687
		$l.-\cos t$	−9,6544916

$l.\cos\delta$	+9,9507046	$l.\sin\delta$	−9,6538443
$l.\eta$	−7,697603	$l.\zeta$	−8,050310
$\cos\delta$	+0,8926981	$\sin\delta$	−0,4506551
η	−0,0049843	ζ	−0,0112282
$\cos\delta+\eta$	+0,8877138	$\sin\delta+\zeta$	−0,4618833
$l.f\cos\delta'\cos(\alpha-\alpha')$	+9,9482730	$l.f\sin\delta'$	−9,6645323
$l.\cos(\alpha-\alpha')$	−9,9999733	$l.\cos\delta'$	+9,9479810
$l.\xi=l.f\cos\delta'\sin(\alpha-\alpha')$	−7,993117	$l.f\cos\delta'$	+9,9482997
$l.\operatorname{tang}(\alpha-\alpha')$	−8,044844	$l.\operatorname{tang}\delta'$	−9,7162326
T	4,685593	δ'	−27°29′12″5
$l.(\alpha-\alpha')''$	−3,359251		
$\alpha-\alpha'$	−0°38′6″,9	$l.\frac{1}{f}$	9,9996813
	— 2^{m}32^{s},46	$l.$ D	....
α'	21.35.12,95	$l.$ D′	....

SESSION DE NOVEMBRE 1895. — COMPOSITIONS.

Grenoble.

Analyse. — I. *Intégration de l'équation*

$$p^2+q^2-2px-2qy+2xy=0. \tag{1}$$

Changeant de fonction en posant $z_1 = z - \frac{x^2+y^2}{2}$, avec $p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x}$, $q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y}$, l'équation proposée se simplifie et devient

$$(2) \qquad p_1^2 + q_1^2 - 2(x-y)^2 = 0.$$

Des équations de Cauchy on déduit

$$(3) \qquad dp_1 + dq_1 = 0,$$

d'où

$$(4) \qquad p_1 + q_1 = a,$$

a étant une constante arbitraire. A l'aide des équations (2), (4), l'équation $dr_1 = p_1\,dx + q_1\,dy$ devient

$$dr_1 = \frac{a}{2}(dx+dy) + \frac{1}{2}(dx-dy)\sqrt{2(x-y)^2 - a^2},$$

qui, intégrée, fournit, pour l'équation proposée, la solution complète

$$z = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{a(x+y)}{2} + \frac{x-y}{4}\sqrt{2(x-y)^2-a^2}$$
$$- \frac{a^2}{4\sqrt{2}} \log \frac{(x-y)\sqrt{2} + \sqrt{2(x-y)^2-a^2}}{b},$$

b étant une nouvelle constante arbitraire.

Remarque. — En ne changeant pas la fonction cherchée, les calculs seraient encore très simples. Au lieu de (3), on aurait $dp - dx + dq - dy = 0$, d'où $(p-x)+(q-y) = a$, qui conduirait avec (1) à l'équation

$$dr = (x\,dx + y\,dy) + \frac{a}{2}(dx+dy)$$
$$+ \frac{1}{2}(dx-dy)\sqrt{2(x-y)^2-a^2},$$

laquelle amène à la solution complète déjà obtenue.

II. *Lignes asymptotiques de la surface définie par l'équation*

$$z = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques projetées sur xOy est alors

$$(1) \qquad (x^2 - y^2)\,dx^2 - 4xy\,dx\,dy - (x^2 - y^2)\,dy^2 = 0,$$

ou

$$(x\,dx - y\,dy)^2 = (x\,dy + y\,dx)^2,$$

d'où

$$x\,dx - y\,dy = \pm(x\,dy + y\,dx).$$

En intégrant, on a

$$(2) \qquad x^2 - y^2 = \pm 2xy + a,$$

a étant une constante arbitraire.

Les lignes asymptotiques projetées sur xOy forment donc deux familles d'hyperboles équilatères, concentriques, ayant, dans chaque famille, les mêmes asymptotes. En outre, les deux familles de courbes sont symétriques par rapport à Ox et à Oy et forment deux systèmes orthogonaux.

Remarque. — L'équation (1) aurait donné

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x + y}{x - y},$$

équations homogènes en x, y, qu'on intégrerait, suivant la règle, en posant $y = tx$.

Les équations (3) sont aussi linéaires en x, y, et pourraient encore s'intégrer par différentiation. Mais cette marche est plus longue que les précédentes.

Mécanique. — *Étant donnés trois axes rectangulaires fixes* OX, OY, OZ, *dont le dernier* OZ *est vertical et dirigé en sens inverse de la pesanteur, on con-*

sidère la parabole située dans le plan vertical XZ dont l'équation est $X^2 = 2pZ$, *et l'on suppose qu'elle tourne avec une vitesse angulaire constante* ω *autour de OZ. Un point matériel pesant est assujetti à rester sur la parabole sur laquelle il peut glisser sans frottement. On demande son mouvement relatif, son mouvement absolu et la réaction de la courbe.*

On discutera d'abord les circonstances générales du mouvement, puis on examinera en particulier le cas suivant :

Au temps $t = 0$, *la parabole est dans le plan XZ; le point est placé en O avec une vitesse relative* v_0 *donnée par la formule*

$$v_0 = p\sqrt{\omega^2 - \frac{g}{p}},$$

ce qui suppose $\omega > \sqrt{\frac{g}{p}}$. *On demande, dans ce cas, la nature de la projection de la trajectoire absolue du point sur le plan horizontal (g est l'intensité de la pesanteur).*

En supposant, comme on peut le faire, la masse du point égale à l'unité et la rotation ω de sens direct : appelant x et z les coordonnées relatives du point ; X, Y, Z ses coordonnées absolues, de telle sorte que l'on ait

$$X = x\cos\omega t, \qquad Y = x\sin\omega t, \qquad Z = z = \frac{x^2}{2p},$$

on peut écrire les équations du mouvement relatif sous la forme (1)

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \omega^2 x + N\alpha, \\ 0 &= -2\omega\frac{dy}{dt} + N\beta, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g + N\gamma, \end{aligned}\right.$$

et celles du mouvement absolu sous la forme

$$
(2) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2 X}{dt^2} &= N\alpha_1, \\
\frac{d^2 Y}{dt^2} &= N\beta_1, \\
\frac{d^2 Z}{dt^2} &= N\gamma_1 - g,
\end{aligned}
\right.
$$

N étant la réaction; α, β, γ ses cosinus directeurs par rapport aux axes relatifs; α_1, β_1, γ_1 ses cosinus directeurs par rapport aux axes fixes.

Des premières, on déduit immédiatement l'intégrale des forces vives dans le mouvement relatif, que l'on eût pu écrire directement puisqu'on sait que le travail de la force centrifuge composée est nul :

$$v^2 = \omega^2 x^2 - 2gr + h = \left(\omega^2 - \frac{g}{p}\right) x^2 + h.$$

Comme $v^2 = \left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) \frac{dx^2}{dt^2}$, on voit que le problème est ramené à une quadrature elliptique

$$(3) \qquad \left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) \frac{dx^2}{dt^2} = \left(\omega^2 - \frac{g}{p}\right) x^2 + h.$$

Si l'on se sert des équations (2), il suffit de remarquer que

$$\alpha_1 \frac{\partial X}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial Y}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\partial Z}{\partial x} = 0,$$

et par suite

$$\frac{d^2 X}{dt^2} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{d^2 Y}{dt^2} \frac{\partial Y}{\partial x} + \left(\frac{d^2 Z}{dt^2} + g\right) \frac{\partial Z}{\partial x} = 0.$$

Cette équation développée fournit immédiatement l'équation différentielle du second ordre, qu'on obtiendrait également en formant l'équation de Lagrange, relative à la variable x :

$$(4) \qquad \left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{p^2}\frac{dx^2}{dt^2} + \left(\frac{g}{p} - \omega^2\right)x = 0.$$

Multipliant par $\frac{2\,dx}{dt}$ et intégrant, on retrouve l'équation (3).

x étant déterminée en fonction du temps, les équations (1) ou (2) donneront la grandeur et la direction de la réaction à la manière ordinaire.

L'équation (3) montre immédiatement que le mouvement relatif se poursuivra indéfiniment, au moins à partir d'un certain moment, sur une même moitié de la parabole, ou sera oscillatoire, suivant que $\omega^2 - \frac{g}{p}$ sera > 0 ou < 0. Si $\omega^2 - \frac{g}{p} = 0$, l'équation peut être intégrée par les fonctions élémentaires. Si en même temps la vitesse relative initiale est nulle, il y a équilibre relatif. Enfin, dans le cas particulier indiqué, on voit aisément que $\frac{dx}{dt}$ demeure constant; la projection horizontale du point décrit une spirale d'Archimède.

Quand le mouvement est oscillatoire, en appelant x_0 le maximum de x et posant

$$x = p \operatorname{tang}\varphi, \qquad x_0 = p \operatorname{tang}\varphi_0,$$

puis

$$\sin\varphi = \sin\varphi_0 \sin\theta,$$

on trouve aisément, avec $t = 0$ pour $x = x_0$,

$$\sqrt{\frac{g}{p} - \omega^2}\,\frac{t}{\cos\varphi_0} = \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} d\theta\,(1 - \sin^2\varphi_0 \sin^2\theta)^{-\frac{3}{2}},$$

Si $x_0 < p$, on peut poser $x_0 = p \sin\theta_0$, $x = p \sin\theta_0 \sin\theta$, et l'on obtient

$$\sqrt{\frac{g}{p} - \omega^2}\, t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta (1 + \sin^2\theta_0 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}.$$

La durée T d'une oscillation simple est donnée, dans le premier cas, par la formule

$$\sqrt{\frac{g}{p} - \omega^2}\, \frac{T}{\cos\varphi_0} = \pi \left\{ 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi_0 + \ldots + \left[\frac{3.5\ldots(2n-1)^2}{2.4\ldots 2n-2}\right] \frac{2n+1}{4n^2} \sin^{2n}\varphi_0 + \ldots \right\}.$$

dans le second, par la formule

$$\sqrt{\frac{g}{p} - \omega^2}\, T = \pi \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\theta_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sin^4\theta_0 + \ldots + (-1)^{n-1} \left[\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n-2}\right]^2 \frac{1}{4n^2} \sin^{2n}\theta_0 + \ldots \right\}.$$

Épreuve pratique. — *Calculer, pour un lieu donné, l'azimut du coucher d'une étoile de déclinaison connue et la durée de la présence de cette étoile au-dessus de l'horizon du lieu, en tenant compte de la réfraction.*

Données. — Latitude du lieu (Grenoble) :

$$\lambda = 45^\circ 11' 23'';$$

Déclinaison de l'étoile (α Lyre) :

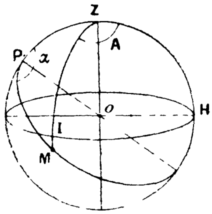
$$\mathcal{D} = 38^\circ 41' 16'';$$

Réfraction à l'horizon :

$$\theta = 33' 47'';$$

M Position de l'étoile au moment du coucher apparent,
A Azimut de M ;
α Angle horaire absolu de M ;

Dans le triangle de position PZM, on connaît les trois côtés, et l'on doit calculer deux des angles.



Posons

$$a = \mathrm{PM} = 90 - \mathcal{D},$$
$$b = \mathrm{ZM} = 90 + \theta,$$
$$c = \mathrm{PZ} = 90 - \lambda;$$

on aura

$$\cot\frac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin p \sin(p-b)}}.$$

On trouve

$$\mathrm{A} = 153^\circ 44' 58'',$$
$$\alpha = 145^\circ 29' \; 8''8;$$

enfin, le temps cherché T, correspondant à une rotation 2α de la sphère, sera

$$\mathrm{T} = 19^{\mathrm{h}} 23^{\mathrm{m}} 53^{\mathrm{s}}.$$

Caen.

Analyse et Géométrie. — I. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles qui détermine le facteur intégrant* μ *de l'équation*

$$(x^3y - 2y^4)\,dx + (y^3x - 2x^4)\,dy = 0.$$

L'intégration de cette équation, facile à former, revient à celle du système

$$(1) \qquad \frac{dx}{xy^3 - 2x^4} = \frac{dy}{2y^4 - x^3 y} = \frac{d\mu}{9\mu(x^3 - y^3)};$$

l'égalité des deux premières fractions ramène à l'équation donnée, qui s'intègre soit comme équation homogène, soit en divisant par x^3y^3.

Première intégrale de (1)

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2} = \alpha.$$

Égalant la troisième fraction à une combinaison des deux autres, on a

$$\frac{d\mu}{9\mu(x^3 - y^3)} = \frac{x^2\,dx + y^2\,dy}{2(y^6 - x^6)}, \qquad \mu^2(x^3 + y^3)^3 = \beta;$$

intégrale générale

$$\mu = (x^3 - y^3)^{-\frac{3}{2}} \varphi\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2}\right).$$

II. *Lieu des sommets des paraboles qui ont un contact du second ordre avec une courbe plane donnée en un point donné* A.

Rapportées à la tangente et à la normale en A, a étant constant et λ variable, les paraboles ont pour équation

$$(x + \lambda y)^2 - 4ay = 0,$$

ou

$$\left(x + \lambda y - \frac{2a\lambda}{1 + \lambda^2}\right)^2 = \frac{4a}{1 + \lambda^2}\left(y - \lambda x + \frac{a\lambda^2}{1 + \lambda^2}\right).$$

Sommet :

$$x = \frac{2\lambda + \lambda^3}{(1 + \lambda^2)^2} a, \quad y = \frac{\lambda^2 a}{(1 + \lambda^2)^2}, \quad \left(\lambda = \frac{4ay - x^2 - 2y^2}{3xy}\right);$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 5ax^2y + 4ay^3 + 4a^2y^2 = 0.$$

Mécanique. — I. *Déterminer les positions d'équilibre d'une barre très mince, pesante et homogène, dont les extrémités* A, B *sont assujetties à rester sur deux droites fixes et parfaitement polies : l'une,* OX, *horizontale, l'autre,* OY, *dirigée dans le sens de la pesanteur. Chaque élément de la barre est attiré vers le point* O *avec une intensité proportionnelle à la longueur de l'élément et à l'inverse du carré de sa distance au point* O.

Soient $AB = 2a$, $BAO = \theta$; les attractions ont une résultante passant en O :

$$X = -\mu \int_{-a}^{a} \frac{(a+r)\cos\theta \, dr}{(a^2 + r^2 + 2ar\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\mu}{a \sin 2\theta} = Y,$$

formules résultant aussi d'un théorème connu sur l'attraction d'une droite.

Équations de l'équilibre :

$$N - \frac{\mu}{a \sin 2\theta} = 0, \quad N_1 + \frac{\mu}{a \sin 2\theta} - P = 0,$$
$$2N \sin\theta + (2N_1 - P)\cos\theta = 0;$$
$$\tang^3\theta - \tang^2\theta + \left(1 + \frac{Pa}{\mu}\right)\tang\theta - 1 = 0;$$

une seule racine réelle entre 0 et 1.

II. *Un point* M *non pesant, de masse* m, *est assujetti à rester sur la surface polie d'un cylindre de révolution qui tourne avec une vitesse constante* ω *autour d'un diamètre* AB, *supposé fixe, de l'une de ses sections droites* S; *il est attiré vers* AB *par une force perpendiculaire à cette droite et égale au produit de* $m\omega^2$ *par la distance du point* M *à* AB. *Déterminer le mouvement du point sur le cylindre, en supposant qu'à l'in-*

stant initial le mobile soit en A *avec une vitesse égale à* ωAB, *dirigée tangentiellement à* S.

Axe des x suivant AB, axe des z suivant l'axe du cylindre ; équations du mouvement relatif de la forme

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{R},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{R} + 2m\omega\frac{dz}{dt},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -2m\omega\frac{dy}{dt},$$

avec les données initiales et, en faisant $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\theta$, on trouve

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}, \qquad z = -R\log\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$$

$$N = 4m\omega^2 R\cos 2\theta.$$

Épreuve pratique. — *Calculer, à* 0″,1 *près, la longitude et la latitude héliocentriques d'une planète :*

Inclinaison de l'orbite : 18°24′35″,2 ;
Longitude : ☊ 21°45′32″,4 ;
Longitude vraie de la planète dans son orbite :

342°3′28″,7.

Longitude : 343°31′46″,3 ;
Latitude : 11°38′18″,7.