NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PIERRE DELIX

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1896. Solution de la question de mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 556-566

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__556_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1896. SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES;

PAR M. PIERRE DELIX.

On donne un cercle C *qui a pour équations en coordonnées rectangulaires :* $x = a$ *et* $y^2 + z^2 = a^2$.

On considère : 1° le cône S *qui a pour base le cercle, et pour sommet le point de l'axe* Oz *qui est à la distance* λa *de l'origine; 2° la surface* S_1 *engendrée par des droites parallèles au plan des* xy, *et qui s'appuient sur l'axe* Oz *et sur le cercle donné.*

On demande :

I. *De former les équations des deux surfaces* S *et* S_1;

II. *De trouver l'expression du sinus de l'angle des plans tangents aux deux surfaces en un point du cercle qui a pour cote* $z = \mu a$, *et de calculer ce sinus, avec trois décimales seulement, pour* $\lambda = \frac{1}{2}$ *et* $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

III. *De déterminer l'intersection des deux surfaces, d'en construire deux projections pour* $\lambda = \frac{1}{2}$, *d'en* *suivre les principales transformations quand λ varie de o à l'infini.*

I. 1° Les équations d'une génératrice du cône sont

$$(1)\qquad \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z - \lambda a}{p}.$$

La condition pour que cette droite rencontre le cercle

$$(2)\qquad x = a, \qquad y^2 + z^2 = a^2$$

est

$$(3)\qquad n^2 a^2 + (pa + \lambda m a)^2 = a^2 m^2.$$

Supprimant le facteur a^2 et éliminant m, n, p entre les équations (1) et (3), homogènes en ces quantités, on a l'équation du cône S

$$(4)\qquad y^2 - x^2 + (z - \lambda a + \lambda x)^2 = 0.$$

2° Le conoïde S_1 peut être considéré comme engendré par les génératrices du cône S contenues dans le plan

$$(5)\qquad z - \lambda a = 0,$$

lorsque λ varie. Son équation s'obtient donc par l'élimination de λ entre (4) et (5), ce qui donne

$$(6)\qquad a^2(y^2 - x^2) + z^2 x^2 = 0.$$

II. Le plan tangent à chacune des surfaces au point dont les coordonnées sont

$$x = a, \qquad y = a\sqrt{1 - \mu^2}, \qquad z = \mu a,$$

passe par la tangente au cercle en ce point. Il a donc une équation de la forme

$$h(x - a) + ay\sqrt{1 - \mu^2} + a\mu z - a^2 = 0.$$

Pour le cône, il doit passer par le point $(0, 0, \lambda a)$, ce qui donne

$$-h'a + \lambda\mu a^2 - a^2 = 0,$$

d'où

$$h' = a(\lambda\mu - 1).$$

Pour le conoïde, il doit passer par le point $(0, 0, \mu a)$, ce qui donne

$$-h''a + \mu^2 a^2 - a^2 = 0,$$

d'où

$$h'' = a(\mu^2 - 1).$$

Or, l'angle V des plans

$$h'x + ky + lz + m' = 0$$

et

$$h''x + ky + lz + m'' = 0,$$

est donné par

$$\sin^2 V = \frac{(h'' - h')^2(k^2 + l^2)}{(h'^2 + k^2 + l^2)(h''^2 + k^2 + l^2)}.$$

Remplaçant h', h'', k, l par leurs valeurs, on a

$$\sin^2 V = \frac{\mu^2(\mu - \lambda)^2}{[(\lambda\mu - 1)^2 + 1][(\mu^2 - 1)^2 + 1]}.$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a

$$\sin^2 V = \frac{16 \times 3 \times (\sqrt{3} - 1)^2}{[(\sqrt{3} - 4)^2 + 16][(3 - 4)^2 + 16]} = \frac{96(2 - \sqrt{3})}{17(35 - 8\sqrt{3})}.$$

Faisant $\sqrt{3} = 1,7321$, on trouve

$$\sin^2 V = 0,071552,$$

et

$$\sin V = 0,267.$$

III. Considérations générales. — Le cône étant du deuxième ordre et le conoïde du quatrième, leur courbe d'intersection est du huitième ordre. Mais cette courbe comprend :

1° Le cercle donné commun aux deux surfaces;

2° Les génératrices communes obtenues en menant par le sommet du cône un plan parallèle à Oxy.

Le reste de l'intersection sera donc une quartique gauche Γ.

En outre, le plan Oxz étant un plan de symétrie commun pour les deux surfaces le sera pour leur courbe d'intersection, et la projection de cette courbe sur ce plan sera d'un degré moitié moindre.

En résumé, on voit *a priori* que les projections de la courbe d'intersection seront ainsi constituées :

Sur le plan Oxz : 1° la droite sur laquelle se projette le cercle $(x = a)$; 2° la droite sur laquelle se projettent les deux génératrices communes $(z = \lambda a)$; 3° une conique γ_y, projection de la quartique gauche Γ ;

Sur le plan Oyz : 1° la droite double $(z = \lambda a)$ sur laquelle se projettent les deux génératrices communes ; 2° le cercle $(y^2 + z^2 = a^2)$, projection du cercle donné ; 3° une quartique γ_x, projection de la quartique gauche Γ ;

Sur le plan Oxy : 1° la droite double $(x = a)$, projection du cercle donné ; 2° les droites $[y^2 = (1 - \lambda^2)x^2]$, projections des génératrices communes ; 3° une quartique γ_z, projection de la quartique gauche Γ.

Remarquons que la courbe d'intersection est tout entière comprise, d'une part entre les plans $z = a$ et $z = -a$, tangents au conoïde, d'autre part entre les plans $y = x$, $y = -x$, tangents à la fois aux deux surfaces.

Équations. — Cherchons maintenant les équations de ces diverses projections (¹) :

1° *Sur* Oxz. — Les équations (4) et (6) donnent

(¹) L'énoncé ne demande d'étudier que deux d'entre elles. Comme le choix était arbitraire, on envisage ici les trois. Les deux plus simples, qu'il était tout naturel de choisir, étaient celles sur Oxz, qui s'imposait, et sur Oyz.

immédiatement, par élimination de $y^2 - x^2$,

$$x^2 z^2 = a^2(z + \lambda x - \lambda a)^2$$

ou

$$xz = \pm a(z + \lambda x - \lambda a).$$

Prenant le signe $+$, on obtient les équations

$$(7) \qquad x - a = 0, \qquad z - \lambda a = 0,$$

déjà prévues. Avec le signe $-$ on a

$$(x + a)z + \lambda a(x - a) = 0,$$

ou

$$(8) \qquad (x + a)(z + \lambda a) - 2\lambda a^2 = 0,$$

hyperbole équilatère (*fig.* 1) dont les asymptotes sont

$$x + a = 0 \qquad z + \lambda a = 0,$$

et qui passe par les points $(o, \lambda a)$ et (a, o), c'est-à-dire par le sommet du cône et le centre du cercle, comme on pouvait aisément le prévoir *a priori*.

La partie utile de cette hyperbole est limitée aux points

$$D\left(x = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}a, \quad z = a\right) \quad \text{et} \quad E\left(x = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}a, \quad z = -a\right).$$

Les tangentes aux divers points C, S, D, E s'obtiennent facilement en doublant les ordonnées des points de contact, comptées sur l'asymptote Ωv. Ceci montre, en particulier, que la tangente en C passe par le point H situé sur la parallèle à Ox menée par S.

2° *Sur* Oyz. — Considérons séparément les projections des parties de l'intersection situées sur chacun des plans (7) et sur le cylindre hyperbolique (8), qu'on peut à volonté combiner, soit avec le cône, soit avec le conoïde.

Ainsi, d'une part, l'élimination de x entre la première équation (7) et l'équation (6), de l'autre la seconde équation (7), donnent

$$y^2 + z^2 - a^2 = 0, \qquad z - \lambda a = 0,$$

équations prévues *a priori*. Il faut noter qu'ici la seconde de ces équations doit être prise comme double, attendu qu'elle représente à la fois les projections des deux génératrices communes.

L'élimination de x entre les équations (6) et (8) donne ensuite

$$(9) \qquad y^2(z + \lambda a)^2 + (z^2 - a^2)(z - \lambda a)^2 = 0,$$

équation de la quartique γ_x.

3° *Sur* Oxy. — La première équation (7) et l'élimination de z entre la seconde équation (7) et l'équation (4) donnent

$$x - a = 0, \qquad y^2 - x^2(1 - \lambda^2) = 0,$$

solutions prévues d'avance. La première de ces équations, qui représente la projection du cercle commun doit être prise comme double, puisque le plan Oxy n'est pas un plan de symétrie pour l'ensemble de la courbe d'intersection.

L'élimination de z entre les équations (6) et (8) donne ensuite

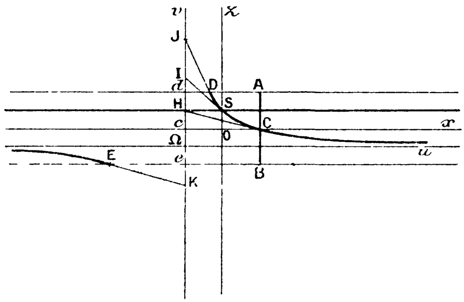
$$(10) \qquad (y^2 - x^2)(x + a)^2 + \lambda^2 x^2 (x - a)^2 = 0.$$

C'est l'équation de la quartique γ_z.

Constructions. — Nous allons construire les diverses projections pour $\lambda = \frac{1}{2}$, mais sans remplacer dans les formules λ par sa valeur numérique, en sorte que tout ce que nous dirons restera vrai *pour* λ *inférieur à* 1 *en valeur absolue*.

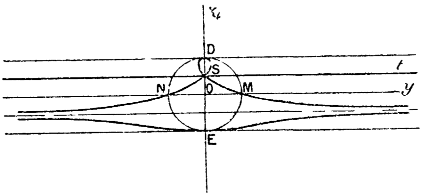
1° *Hyperbole* γ_y (*fig.* 1). — La construction de cette hyperbole résulte des remarques faites ci-dessus sur son équation. Observons que, dans le cas de $\lambda = \frac{1}{2}$, on a $\Omega H = SH$, et, par suite, que le point S est un sommet de l'hyperbole.

Fig. 1.



2° *Quartique* γ_x (*fig.* 2). — C'est une quartique unicursale bicirculaire symétrique par rapport à Oz [1].

Fig. 2.



Elle rencontre normalement cet axe aux points D et E ($z = \pm a$) et a en S, projection du sommet du cône, un point double où les coefficients angulaires des tangentes sont $\pm \frac{2\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$. Elle a pour asymptote double la droite $z + \lambda a = 0$ et rencontre l'axe des y aux points M

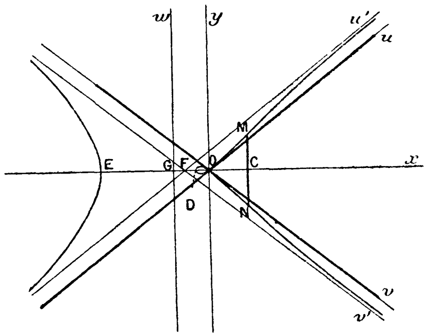
---

[1] Bien que cette courbe rappelle par sa forme générale la *conchoïde de Nicomède*, il ne faut pas la confondre avec celle-ci. Pour la conchoïde de Nicomède l'asymptote double, si l'on conservait les points D, E, S, serait l'axe Oy lui-même.

et N ($y = \pm a$) où les coefficients angulaires des tangentes sont $\mp \frac{\lambda}{2}$.

3° *Quartique* γ_z (*fig.* 3). — Cette quartique, symétrique par rapport à Ox qu'elle coupe normalement en D $\left(x = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} a\right)$ et en E $\left(x = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} a\right)$, a un point double à l'origine où les tangentes ont pour coefficients

Fig. 3



angulaires $\pm \sqrt{1 - \lambda^2}$. Elle admet une asymptote double à une branche imaginaire ($x + a = 0$) et deux asymptotes simples qui sont les parallèles aux tangentes à l'origine menées par le point F $\left(y = 0,\ x = -\frac{2\lambda^2 a}{1 - \lambda^2}\right)$. Elle est tangente aux bissectrices des angles formés par les axes aux points où elles sont rencontrées par la droite $x = a$, projection du cercle, ce qui était évident *a priori*.

Les projections des génératrices communes coïncident avec les tangentes à l'origine.

Discussion. — I. *Projection sur* Oxz. — Quel que soit λ, la disposition générale de l'hyperbole reste la même. Elle passe constamment au point C et son asymptote cv est fixe. Il n'y a à considérer que les valeurs limites $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$.

Pour $\lambda = 0$, la droite HS coïncide avec Ox, l'hyperbole se réduit aux droites Ox et cv, ce qui était évident *a priori*, car, lorsque le sommet est à l'origine, les deux surfaces ont en commun les bissectrices des angles des axes Ox et Oy, le cercle donné et son symétrique par rapport à O, ce qui donne en projection deux fois l'axe Ox, la droite AB et sa symétrique *de* par rapport à O.

Pour $\lambda = \infty$, la droite HS est rejetée à l'infini, et l'hyperbole se réduit à la droite AB, déjà comptée une fois, et à la droite de l'infini. Ceci est également évident *a priori*, le cône se réduisant alors à un plan double mené par le cercle.

II. *Projection sur* Oyz. — 1° Pour $\lambda = 0$, la droite double St se confond avec Oy, la quartique se décompose en Oy pris deux fois et le cercle déjà compté une fois. On a donc en tout quatre fois Oy et deux fois le cercle DE, ce qui était évident *a priori*, car, en outre de la remarque déjà faite à propos de la projection sur Oxz, on peut observer que les deux surfaces se raccordant le long des bissectrices des angles que font Ox et Oz, celles-ci doivent être considérées comme des droites doubles de l'intersection.

2° Pour $0 < \lambda < 1$, on a la courbe de la *fig.* 2.

3° Pour $\lambda = 1$, la droite St passe par le point D; en outre, l'équation (9) se décompose en

$$z - a = 0$$

et

$$y^2(z - a) - (z - a)^3 = 0,$$

cissoïde de Dioclès ayant un point de rebroussement en D où elle est tangente à DE et asymptote à la parallèle à Oy menée par E. La projection comprend donc alors la cissoïde, le cercle, la parallèle à Oy menée par E et la parallèle à Oy menée par D, comptée deux fois.

3° Pour $\lambda > 1$, l'asymptote double étant extérieure à l'intervalle DE correspond à une branche imaginaire. La courbe est fermée. Elle ne cesse d'ailleurs pas de passer par les points M et N ainsi que par les points D et E où ses tangentes sont parallèles à Oy.

4° Pour $\lambda = \infty$, la droite double St est rejetée à l'infini, la courbe (9) devient

$$a^2(y^2 - z^2 - a^2) = 0$$

On a donc quatre fois la droite à l'infini du plan et deux fois le cercle DE.

III. *Projections sur Oxy.* — 1° Pour $\lambda = 0$, les droites Ou et Ov coïncident avec les bissectrices des angles de Ox et Oy. La courbe (γ) se réduit à

$$(x^2 - y^2)(x + a)^2 = 0,$$

c'est-à-dire aux mêmes bissectrices et à la droite $G\omega$ prise deux fois. Somme toute, on a les droites MN, $G\omega$ et les deux bissectrices prises toutes quatre en double. Cela résultait, *a priori*, des remarques précédentes.

2° Pour $0 < \lambda < 1$, on a la courbe de la *fig.* 3.

3° Pour $\lambda = 1$, les droites Ou et Ov coïncident avec Oy qui compte, dès lors, comme solution double de même que MN. Quant à la quartique, elle se réduit à sa branche de droite qui devient parabolique et présente en O un point de rebroussement avec Ox pour tangente.

4° Pour $\lambda > 1$, les points D et E sont du côté des x positifs, les asymptotes sont devenues imaginaires, ainsi que les droites Ou et Ov. On a une courbe fermée toujours tangente aux bissectrices des angles des axes en M et N.

5° Pour $\lambda = \infty$, l'équation (10) se réduit à

$$x^2(x-a)^2 = 0,$$

ce qui donne l'axe Oy, solution double, et la droite MN comptée deux fois, en outre des deux autres fois où elle intervient en tant que projection du cercle.

Quant aux droites Ou et Ov, elles coïncident alors toutes deux avec Oy.