NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-M. LÉMERAY

Sur les racines de l'équation $x = a^x$

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 548-556

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__548_0>

[A31] [G6c]

SUR LES RACINES DE L'ÉQUATION $x = a^x$;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

Dans ce qui suit, je me propose de montrer que les racines de l'équation

$$x = a^x$$

sont les valeurs vers lesquelles convergent certaines expressions déjà étudiées (1), et que l'on peut considérer comme représentant symboliquement une suite de substitutions uniformes particulières. L'expression

$$\left.\begin{matrix} m \\ \dot{a} \end{matrix}\right| i$$

est dite *la surpuissance* $m^{\text{ième}}$ de a, l'initial étant i. Elle représente l'expression

$$a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a^i}}}}},$$

dans laquelle a est écrit m fois; m est l'exposant de la surpuissance. Occupons-nous d'abord des racines réelles de l'équation proposée, qui peut encore s'écrire

$$x^{\frac{1}{x}} = a.$$

Considérons la fonction $y = x^{\frac{1}{x}}$; nous avons

$$y' = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - \mathrm{L}x).$$

(1) *Sur les fonctions itératives* (*Association française pour l'avancement des Sciences*, Bordeaux, 1895).

La dérivée sera nulle pour $x = 0$, pour $x = e$ et pour $x = \infty$.

Quand x est plus grand que 1, y est plus grand que 1. Quand x est compris entre 0 et 1, y est aussi compris entre 0 et 1. De plus, pour $x = 1$, $y' = 1$. Par suite, la courbe qui, en coordonnées rectangulaires, la représente, est tangente à OX pour $x = 0$; quand x croît de 0 à 1, ses ordonnées croissent de 0 à 1; pour $x = 1$, elle est tangente à la bissectrice des axes. Quand x croît de 1 à e, les ordonnées croissent de 1 à $e^{\frac{1}{e}}$ valeur maximum; enfin, quand x croît de e à ∞, les ordonnées décroissent asymptotiquement de $e^{\frac{1}{e}}$ à 1.

Par suite, quand a est compris entre 0 et 1, l'équation admet une racine réelle comprise entre 0 et 1; quand a est compris entre 1 et $e^{\frac{1}{e}}$, il y a une racine réelle comprise entre 1 et e, et une deuxième racine réelle comprise entre e et ∞; pour $a = e^{\frac{1}{e}}$, il y a une racine double dont la valeur est e.

Prenons d'abord le cas

$$1 < a < e^{\frac{1}{e}},$$

et considérons l'expression

$$\left.\begin{matrix} m \\ \dot{a} \end{matrix}\right| \begin{matrix} e \\ . \end{matrix}$$

On a identiquement

$$\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e.$$

Si je remplace $e^{\frac{1}{e}}$ par le nombre plus petit a, j'aurai $a^e < e$. Élevons a à la puissance exprimée par les deux membres de cette inégalité, nous aurons une inégalité de même sens

$$a^{a^e} < a^e,$$

et, en général,

$$e > \overset{1}{\dot{a}}\Big|^{e} > \overset{2}{\dot{a}}\Big|^{e} \ldots > \overset{m}{\dot{a}}\Big|^{e}.$$

Donc $\overset{m}{\dot{a}}\Big|^{e}$ décroît quand m augmente. Je dis maintenant qu'il tend vers une limite; on a identiquement

$$a^u = \left(u^{\frac{1}{u}}\right)^u = u,$$

u étant la racine réelle comprise entre 1 et e. Si je remplace l'exposant u par un nombre plus grand φ, j'aurai $a^\varphi > u$. Or le premier terme de la série ci-dessus est plus grand que u; donc tous les autres seront aussi plus grands que u; $\overset{m}{\dot{a}}\Big|^{e}$ tend donc vers une limite; cette limite ne peut être que u, car si elle était $u' \lessgtr u$, on aurait $a^u = u'$; cela ne se peut, car il y aurait une deuxième racine réelle comprise entre 1 et e; donc

$$\lim \overset{m}{\dot{a}}\Big|^{e} = u.$$

Soit encore : $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ et considérons l'expression

$$\overset{-m}{\dot{a}}\Big|^{e}.$$

L'exposant négatif (1) représente symboliquement l'opération qui consiste à prendre le logarithme, de telle sorte qu'il y a équivalence entre les expressions

$$\overset{-1}{\dot{a}}\Big|^{e} \quad \text{et} \quad \log_a e.$$

---

(1) *Loc. cit.*

et en général entre les expressions

$$\overset{-m}{\dot{a}}\Big|^{e} \quad \text{et} \quad \log_a \log_a \ldots \log_a e,$$

où le signe $\log_a$ figure m fois. On a identiquement $\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e$ ou

$$\log_{e^{\frac{1}{e}}} e = e.$$

Si la base, au lieu d'être $e^{\frac{1}{e}}$, est le nombre plus petit a, le deuxième membre devient plus grand que e, et l'on a

$$\log_a e > e, \quad \log_a \log_a e > \log_a e, \quad \ldots,$$

ou

$$e < \overset{-1}{\dot{a}}\Big|^{e} < \overset{-2}{\dot{a}}\Big|^{e} \ldots < \overset{-m}{\dot{a}}\Big|^{e}.$$

D'autre part, ces valeurs ne croissent pas sans limite, car, si l'on désigne par U la racine comprise entre e et ∞, on a

$$U = a^U,$$

c'est-à-dire

$$\log_a U = U.$$

Si, dans le premier membre, je remplace U par un nombre plus petit, le deuxième membre sera plus petit que U, donc tous les autres termes seront aussi plus petits que U :

$$\overset{-(m-1)}{\dot{a}}\Big|^{e} < \overset{-m}{\dot{a}}\Big|^{e} < U;$$

$\overset{-m}{\dot{a}}\Big|^{e}$ croît donc en tendant vers une limite. Pour une raison analogue à celle du cas précédent, cette limite ne peut être que U ; donc

$$\lim \overset{-m}{\dot{a}}\Big|^{e} = U.$$

Soit maintenant $o < a < 1$.

Les valeurs de $\left.\overset{m}{\dot{a}}\right|^{i}$, l'initial i étant quelconque, mais réel, croissent et décroissent alternativement. En effet, soient trois valeurs successives

$$a^i,\quad a^{a^i},\quad a^{a^{a^i}}.$$

Je dis que si a^i est plus grand (ou plus petit) que a^{a^i}, $a^{a^{a^i}}$ sera aussi plus grand (ou plus petit) que a^{a^i}. Par hypothèse

$$a^i > (\text{ou} <)\, a^{a^i};$$

mais, a étant compris entre o et 1, on a

$$a^{a^i} < (\text{ou} >)\, a^{a^{a^i}};$$

c'est la proposition à démontrer, et elle est démontrée généralement, puisque, étant indépendante de l'initial, on peut remplacer i par $\left.\overset{n}{\dot{a}}\right|^{i}$, n étant un entier quelconque.

Les valeurs de $\left.\overset{m}{\dot{a}}\right|^{i}$ correspondant à différentes valeurs de m de même parité, croissent (ou décroissent) constamment. Il suffit de prouver que, si

$$a^i < (\text{ou} >)\, a^{a^{a^i}},$$

on a aussi

$$\left.\overset{3}{\dot{a}}\right|^{i} < (\text{ou} >) \left.\overset{5}{\dot{a}}\right|^{i}.$$

En effet, de l'inégalité qui exprime l'hypothèse, on tire

$$\left.\overset{2}{\dot{a}}\right|^{i} > (\text{ou} <) \left.\overset{4}{\dot{a}}\right|^{i},$$

puis la proposition à démontrer; et celle-ci est démontrée généralement pour la même raison que tout à l'heure.

Cela posé, prenons le cas de a compris entre $\frac{1}{e^e}$ et 1; la racine est comprise entre $\frac{1}{e}$ et 1. Considérons l'expression

$$\left.\overset{m}{\dot{a}}\right|^{\frac{1}{e}}$$

quand m prend les valeurs 0, 1, 2, ...; elle prend les valeurs

$$\frac{1}{e},\quad a^{\frac{1}{e}},\quad a^{a^{\frac{1}{e}}},\quad \cdots.$$

Posons

$$a = \frac{1}{e^{\alpha}},$$

α étant plus petit que e; on a, pour les valeurs ci-dessus,

$$\frac{1}{e},\quad \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{e}}},\quad \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{e^{\frac{\alpha}{e}}}}},\quad \cdots.$$

Comparons leurs dénominateurs; on a d'abord $e^{\frac{\alpha}{e}} < e$; le deuxième terme est donc plus grand que le premier; il en est de même du troisième, car, d'après une propriété déjà signalée, on a

$$\alpha^{\frac{1}{\alpha}} < e^{\frac{1}{e}}:$$

on en tire

$$\alpha < e^{\frac{\alpha}{e}} \quad \text{ou} \quad e^{\frac{\alpha}{\frac{\alpha}{e}}} < 1 \quad \text{et} \quad e^{\frac{\alpha}{e^{\frac{\alpha}{e}}}} < e^1 = e, \quad \ldots$$

Par conséquent, aux valeurs paires et croissantes de m correspondent des valeurs croissantes de l'expression considérée; aux valeurs impaires, des valeurs décroissantes, mais toujours supérieures aux valeurs croissantes : c'est une condition nécessaire pour que les unes et les autres tendent vers une seule limite ; mais elle n'est pas suffisante, car les deux limites pourraient être distinctes. Il ne peut d'ailleurs exister plus de deux limites, car alors, évidemment, l'une ou l'autre des lois d'alternance ou de croissance, signalées plus haut, ne serait pas satisfaite.

Dans notre cas, les deux limites se confondent; en effet, si les deux limites p et q étaient distinctes, on aurait

$$a^p = q, \qquad a^q = p, \qquad \text{d'où} \qquad p^p = q^q.$$

Or la fonction $y = x^x$ est égale à 1 pour $x = 0$ et $x = 1$; sa dérivée étant

$$y' = x^x(1 + \mathrm{L}x),$$

le minimum a lieu pour $x = \frac{1}{e}$; il faudrait donc que l'une des limites p et q fût comprise entre 0 et $\frac{1}{e}$, l'autre entre $\frac{1}{e}$ et 1. Comme les valeurs fournies par l'expression $\left.\overset{m}{\dot{a}}\right|^{\frac{1}{e}}$ sont toutes supérieures à $\frac{1}{e}$, cette expression ne peut tendre que vers une seule limite, qui est la racine de notre équation.

Quand a est plus petit que $\frac{1}{e^e}$, la racine est comprise entre 0 et $\frac{1}{e}$. Considérons l'expression $\left.\overset{-m}{\dot{a}}\right|^{\frac{1}{e}}$; comme plus haut, on verra qu'alors, aux valeurs paires de m, correspondent des valeurs décroissantes toutes supérieures aux valeurs croissantes qui correspondent aux valeurs impaires de m, et que les valeurs obtenues tendent vers une seule limite qui est la racine.

On peut donc conclure que les racines réelles sont les valeurs limites correspondant aux quatre combinaisons des signes de l'expression

$$\left.\begin{matrix}\pm m \\ a\end{matrix}\right| e^{\pm 1},$$

savoir

$$\begin{array}{llll} -\,- & \text{si l'on a} & 0 < a < \frac{1}{e^e}, & \\ +\,- & \quad » & \frac{1}{e^e} < a < 1, & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} +\,+ \\ -\,+ \end{array}\right\} \text{si l'on a } 1 < a < e^{\frac{1}{e}}.$$

La surpuissance pouvant être considérée comme un algorithme fondamental, faisant naturellement suite à ceux de l'addition, de la multiplication et de l'élévation aux puissances, les racines de notre équation se trouvent exprimées en symboles fondamentaux. C'est un résultat analogue à celui par lequel on exprime la racine réelle de l'équation $e^x = \mathrm{K}$, savoir

$$x = \lim m\left(\mathrm{K}^{\frac{1}{m}} - 1\right).$$

Dans le cas $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, et en ce qui concerne la plus petite racine, nous aurions pu suivre une autre démonstration. M. Kœnigs [1] a montré que, α désignant une racine de l'équation $x - f(x) = 0$, la substitution $[x, f(x)]$ peut tendre vers α si $f(x)$ est holomorphe au point α, et si l'on a $\mathrm{mod}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_\alpha < 1$. Quand on inverse la fonction, on a en général une fonction non holomorphe et, par suite, plusieurs déterminations. Pour converger vers une seule limite, il faut prendre seulement, parmi ces dernières, celle qui est contenue dans

(1) *Sur les equations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale*, 1884-1885).

le domaine du point α. Le théorème de M. Kœnigs s'applique au cas signalé et, avec cette restriction, nous pouvions l'appliquer aux autres cas; pour ceux-ci, bien que la fonction logarithmique ne soit pas holomorphe, nous avons eu convergence parce qu'elle n'a qu'une seule détermination réelle. C'est la méthode que nous suivrons pour les racines imaginaires, dont l'étude fera l'objet d'une prochaine Note.