NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

D. GRAVÉ

Sur le problème des trois corps

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 537-547

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__537_0>

[U3]

SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS;

PAR M. D. GRAVÉ, à Saint-Pétersbourg.

Le problème qui consiste à déterminer le mouvement de trois corps s'attirant mutuellement en raison directe de leurs masses et d'une certaine fonction de leurs distances réciproques, se ramène, comme l'on sait, à la résolution du problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement, et attirés vers un centre fixe, avec des forces proportionnelles à certaines fonctions : 1° de leurs masses; 2° de la distance entre ces deux corps; 3° des distances des deux corps au centre fixe.

Nous parvenons ainsi à la considération d'un système de douze équations du premier ordre :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \zeta},$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z},$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta_1}, \quad \frac{dz_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \zeta_1},$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1}, \quad \frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z_1},$$

où

$$H = U - \frac{1}{2m}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \frac{1}{2m_1}(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2).$$

U étant la fonction des forces; m, m_1 les masses de deux points; x, y, z, x_1, y_1, z_1 les coordonnées des points; ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 proportionnelles aux projections des vitesses des points sur les axes des coordonnées.

M. Bertrand [1] introduit des variables nouvelles :

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \qquad u_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$
$$q = x x_1 + y y_1 + z z_1,$$
$$v = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad v_1 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$
$$w = x\xi + y\eta + z\zeta, \qquad w_1 = x_1\xi_1 + y_1\eta_1 + z_1,\zeta_1,$$
$$r = x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta, \qquad r_1 = x\xi_1 + y\eta_1 + z\zeta_1,$$
$$s = \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1.$$

Une de ces dix variables est une fonction des autres, car l'équation

$$D = \begin{vmatrix} u & q & w & r_1 \\ q & u_1 & r & w_1 \\ w & r & v & s \\ r_1 & w_1 & s & v_1 \end{vmatrix} = 0$$

est satisfaite identiquement.

Les variables de M. Bertrand satisfont aux équations différentielles suivantes [2] :

$$\frac{du}{dt} = \frac{2w}{m}, \qquad \frac{du_1}{dt} = \frac{2w_1}{m_1}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{r}{m} + \frac{r_1}{m_1},$$
$$\frac{dv}{dt} = 2\alpha w + 2\beta r, \qquad \frac{dv_1}{dt} = 2\alpha_1 w_1 + 2\beta r_1,$$
$$\frac{dw}{dt} = \frac{v}{m} + \alpha u + \beta q, \qquad \frac{dw_1}{dt} = \frac{v_1}{m_1} + \alpha_1 u_1 + \beta q,$$
$$\frac{dr}{dt} = \frac{s}{m_1} + \alpha q + \beta u_1, \qquad \frac{dr_1}{dt} = \frac{s}{m} + \alpha_1 q + \beta u,$$
$$\frac{ds}{dt} = \alpha_1 r + \alpha r + \beta(w + w_1),$$

ou α, α_1, β sont des coefficients qui dépendent des forces et s'expriment par u, u_1, q.

---

[1] BERTRAND, *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVII, p. 32).

[2] BOUR, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI^e Cahier, t. XXI, p. 35.

Nous nous proposons ici de résoudre la question suivante : trouver toutes les intégrales des équations de M. Bertrand indépendantes de la loi des forces.

Soit l'intégrale cherchée

$$V(u, u_1, v, v_1, w, w_1, r, r_1, q, s).$$

La dérivée de cette fonction, prise par rapport au temps, doit s'annuler à cause des conditions du problème, ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial u}\frac{2}{m}w - \frac{\partial V}{\partial u_1}\frac{2}{m_1}w_1 - \frac{\partial V}{\partial v}(2\alpha w - 2\beta r) \\
&\quad - \frac{\partial V}{\partial v_1}(2\alpha_1 w_1 + 2\beta r_1) - \frac{\partial V}{\partial q}\left(\frac{r}{m} + \frac{r_1}{m}\right) \\
&\quad - \frac{\partial V}{\partial w}\left(\frac{v}{m} + \alpha u + \beta q\right) + \frac{\partial V}{\partial w_1}\left(\frac{v_1}{m_1} + \alpha_1 u_1 + \beta q\right) \\
&\quad + \frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{s}{m_1} + \alpha q + \beta u_1\right) + \frac{\partial V}{\partial r_1}\left(\frac{s}{m} - \alpha_1 q + \beta u\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{\partial V}{\partial s}[\alpha_1 r + \alpha r_1 + \beta(w + w_1)] = 0.
\end{aligned}$$

Pour trouver toutes les intégrales, qui soient indépendantes de la loi d'attraction, il faut égaler à zéro séparément les coefficients des α, α_1, β, ainsi que le terme indépendant des forces.

En posant

$$a = 2w\frac{\partial V}{\partial u} - v\frac{\partial V}{\partial w} + s\frac{\partial V}{\partial r_1} - r\frac{\partial V}{\partial q},$$

$$b = 2w_1\frac{\partial V}{\partial u_1} + v_1\frac{\partial V}{\partial w_1} + s\frac{\partial V}{\partial r} + r_1\frac{\partial V}{\partial q},$$

nous obtenons le système de quatre équations

$$(1)\qquad \frac{1}{m}a + \frac{1}{m_1}b = 0,$$

$$(2)\qquad 2w\frac{\partial V}{\partial v} + u\frac{\partial V}{\partial w} + q\frac{\partial V}{\partial r} + r_1\frac{\partial V}{\partial s} = 0.$$

$$(3)\qquad 2w_1\frac{\partial V}{\partial v_1} + u_1\frac{\partial V}{\partial w_1} - q\frac{\partial V}{\partial r} + r\frac{\partial V}{\partial s} = 0,$$

$$(4)\quad \begin{cases} 2r\dfrac{\partial V}{\partial v} + 2r_1\dfrac{\partial V}{\partial v_1} + q\left(\dfrac{\partial V}{\partial w} + \dfrac{\partial V}{\partial w_1}\right) \\ \qquad + u_1\dfrac{\partial V}{\partial r} + u\dfrac{\partial V}{\partial r_1} + (w + w_1)\dfrac{\partial V}{\partial s} = 0. \end{cases}$$

En combinant ces équations deux à deux, au moyen du symbole de Poisson, nous parvenons au système complet suivant :

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad (2) = 0, \qquad (3) = 0, \qquad (4) = 0,$$

$$(5)\quad 2u\frac{\partial V}{\partial u} - 2v\frac{\partial V}{\partial v} + r_1\frac{\partial V}{\partial r_1} - r\frac{\partial V}{\partial r} + q\frac{\partial V}{\partial q} - s\frac{\partial V}{\partial s} = 0,$$

$$(6)\quad 2u_1\frac{\partial V}{\partial u_1} - 2v_1\frac{\partial V}{\partial v_1} + r\frac{\partial V}{\partial r} - r_1\frac{\partial V}{\partial r_1} + q\frac{\partial V}{\partial q} - s\frac{\partial V}{\partial s} = 0,$$

$$(7)\quad \begin{cases} r\left(\dfrac{\partial V}{\partial w} - \dfrac{\partial V}{\partial w_1}\right) + (w_1 - w)\dfrac{\partial V}{\partial r_1} \\ \qquad + 2q\dfrac{\partial V}{\partial u} + u_1\dfrac{\partial V}{\partial q} - 2s\dfrac{\partial V}{\partial v_1} - v\dfrac{\partial V}{\partial s} = 0, \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} r_1\left(\dfrac{\partial V}{\partial w_1} - \dfrac{\partial V}{\partial w}\right) + (w - w_1)\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \qquad + 2q\dfrac{\partial V}{\partial u_1} + u\dfrac{\partial V}{\partial q} - 2s\dfrac{\partial V}{\partial v} - v_1\dfrac{\partial V}{\partial s} = 0, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} 2r\dfrac{\partial V}{\partial u_1} + 2r_1\dfrac{\partial V}{\partial u} + s\left(\dfrac{\partial V}{\partial w} + \dfrac{\partial V}{\partial w_1}\right) \\ \qquad + v\dfrac{\partial V}{\partial r} + v_1\dfrac{\partial V}{\partial r_1} + (w + w_1)\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0. \end{cases}$$

Voici la Table des valeurs du symbole de Poisson :

	a.	b.	(2).	(3).	(4).
a.........	0	0	(5)	0	(7)
b.........	0	0	0	(6)	(8)
(2).......	—(5)	0	0	0	0
(3).......	0	—(6)	0	0	0
(4).......	—(7)	—(8)	0	0	0
(5).......	$2a$	0	—2(2)	0	—(4)
(6).......	0	$2b$	0	—2(3)	—(4)
(7).......	0	(9)	—(4)	0	—2(3)
(8).......	(9)	0	0	—(4)	—2(2)
(9).......	0	0	(8)	(7)	(5)+(6)

	(5).	(6).	(7).	(8).	(9).
a.........	$-2a$	o	o	$-(9)$	o
b.........	o	$-2b$	$-(9)$	o	o
(2).......	$2(2)$	o	(4)	o	$-(8)$
(3).......	o	$2(3)$	o	(4)	$-(7)$
(4).......	(4)	(4)	$2(3)$	$2(2)$	$-(5)-(6)$
(5).......	o	o	(7)	$-(8)$	(9)
(6).......	o	o	$-(7)$	(8)	(9)
(7).......	$-(7)$	(7)	o	$(5)-(6)$	$2a$
(8).......	(8)	$-(8)$	$(6)-(5)$	o	$2b$
(9).......	$-(9)$	$-(9)$	$-2a$	$-2b$	o

Montrons que le système ci-dessus admet une intégrale complète au moyen de la méthode de Bool-Korkine. En intégrant l'équation $a = 0$, nous parvenons au système

$$\frac{du}{2w} = \frac{dw}{v} = \frac{dr_1}{s} = \frac{dq}{r}.$$

Les trois intégrales indépendantes sont

$$uv - w^2 = \alpha_1, \qquad ws - vr_1 = \alpha_2, \qquad rr_1 - qs = \alpha_3.$$

Introduisons les nouvelles variables $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ au lieu des anciennes u, w, r_1, q,

$$V = W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, u_1, v_1, w_1, v, r, s).$$

Les autres équations se transforment en un système nouveau

$$(1_1) \qquad 2w_1 \frac{\partial W}{\partial u_1} + v_1 \frac{\partial W}{\partial w_1} + s \frac{\partial W}{\partial r} = 0,$$

$$(2_1) \qquad 2v \frac{\partial W}{\partial v} + r \frac{\partial W}{\partial r} + s \frac{\partial W}{\partial s} + \alpha_2 \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = 0,$$

$$(3_1) \qquad \alpha_1 s \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} - \alpha_2 \frac{\partial W}{\partial s} - \frac{\alpha_2 r + \alpha_3 v}{s} \frac{\partial W}{\partial r} = 0,$$

$$(4_1) \quad 2w_1 \frac{\partial W}{\partial v_1} + u_1 \frac{\partial W}{\partial w_1} + r \frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\alpha_2 r + \alpha_3 v}{s} \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = 0,$$

$$(5_1)\quad \left\{\begin{aligned} &2s\frac{\partial W}{\partial v_1}+r\frac{\partial W}{\partial w_1}+2\frac{\alpha_2 r+\alpha_3 v}{s}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\\ &\quad+(w_1 v-rs)\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}+v\frac{\partial W}{\partial s}\\ &\quad+\left(u_1 s-w_1 r+\frac{\alpha_2 r+\alpha_3 v}{s}\right)\frac{\partial W}{\partial \alpha_3}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(6_1)\quad \left\{\begin{aligned} &2rv\frac{\partial W}{\partial v}-2\alpha_2\frac{\partial W}{\partial v_1}-\frac{\alpha_2 r+\alpha_3 v}{s}\frac{\partial W}{\partial w_1}+u_1 v\frac{\partial W}{\partial r}\\ &\quad+w_1 v\frac{\partial W}{\partial s}+2\alpha_1 r\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}+[r\alpha_2-v(\alpha_1+\alpha_3)]\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\\ &\qquad\qquad+\left(r\alpha_1-u_1\alpha_2+w_1\frac{\alpha_2 r+\alpha_3 v}{s}\right)\frac{\partial W}{\partial \alpha_3}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(7_1)\quad 2u_1\frac{\partial W}{\partial u_1}-2v_1\frac{\partial W}{\partial v_1}+r\frac{\partial W}{\partial r}-s\frac{\partial W}{\partial s}-\alpha_2\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}=0,$$

$$(8_1)\quad \left\{\begin{aligned} &s\frac{\partial W}{\partial w}+v\frac{\partial W}{\partial r}+2r\frac{\partial W}{\partial u_1}-2\alpha_2\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\\ &\quad+(s^2-vv_1)\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}+(v_1 r-w_1 s-\alpha_2)\frac{\partial W}{\partial \alpha_3}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(9_1)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_2\frac{\partial W}{\partial w_1}+vw_1\frac{\partial W}{\partial r}+2\frac{\alpha_2 r+\alpha_3 v}{s}\frac{\partial W}{\partial u_1}+2sv\frac{\partial W}{\partial v}\\ &\quad+vv_1\frac{\partial W}{\partial s}+2s\alpha_1\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}+\alpha_1 s\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\\ &\qquad\qquad+\left(\alpha_1 s-w_1\alpha_2+v_1\frac{\alpha_2 r+\alpha_3 v}{s}\right)\frac{\partial W}{\partial \alpha_3}=0.\end{aligned}\right.$$

En intégrant l'équation (1_1), nous parvenons au système

$$\frac{du_1}{2w_1}=\frac{dw_1}{v_1}=\frac{dr}{s}.$$

Les deux intégrales indépendantes sont

$$u_1 v_1-w_1^2=\beta_1,\qquad w_1 s-v_1 r=\beta_2.$$

Introduisons, au lieu des variables u, w, r, les nouvelles β_1, β_2,

$$W=\Omega(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,v,v_1,s).$$

Le système transformé aura la forme

$$(1_1)\qquad 2v\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}+\beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3}+s\frac{\partial\Omega}{\partial s}=0,$$

$$(2_2)\qquad s\alpha_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}-\alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial s}+\frac{\alpha_3 vv_1-\alpha_2\beta_2}{s}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}=0,$$

$$(3_2)\qquad s\beta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}-\beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial s}+\frac{\alpha_3 vv_1-\alpha_2\beta_2}{s}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}=0,$$

$$(4_2)\qquad 2v_1\frac{\partial\Omega}{\partial v_1}+\alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}+\beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}+s\frac{\partial\Omega}{\partial s}=0,$$

$$(5_2)\qquad \left\{\begin{aligned}&2vs\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\alpha_1 s\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right)\\&\quad+\frac{\alpha_3 vv_1-\alpha_2\beta_2}{s}\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right)\\&\quad+vv_1\frac{\partial\Omega}{\partial s}+s\alpha_2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

$$(6_2)\qquad \left\{\begin{aligned}&2\beta_2 v\frac{\partial\Omega}{\partial v}+2\alpha_2 v_1\frac{\partial\Omega}{\partial v_1}\\&\quad+\alpha_1\beta_2\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right)+\alpha_2\beta_1\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right)\\&\quad+[\alpha_2\beta_2+vv_1(\alpha_1+\alpha_3)]\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}\\&\qquad\qquad+[\alpha_2\beta_2+vv_1(\beta_1+\alpha_3)]\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(7_2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\beta_1\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right)+\frac{\alpha_3 vv_1-\alpha_2\beta_2}{s^2}\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right)\\&\qquad+\beta_2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}\right)+2v_1\frac{\partial\Omega}{\partial v_1}+\frac{vv_1}{s}\frac{\partial\Omega}{\partial s}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(8_2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\beta_2\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right)\\&\quad+\alpha_2\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right)+(vv_1-s^2)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Soustrayant de l'équation (1_2) l'équation (4_2), nous obtenons l'équation

$$v\frac{\partial\Omega}{\partial v}-\frac{\partial\Omega}{\partial v_1}=0$$

qui donne l'intégrale $vv_1=l$.

Introduisons, au lieu de vv_1, la lettre l; nous obtenons le système

$$\Omega = \Psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, l, s),$$

$$(1_3) \qquad 2l\frac{\partial\Psi}{\partial l} + \alpha_2\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} + \beta_2\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2} + s\frac{\partial\Psi}{\partial s} = 0,$$

$$(2_3) \qquad s^2\alpha_1\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} - \alpha_2 s\frac{\partial\Psi}{\partial s} + (\alpha_3 l - \alpha_2\beta_2)\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2} = 0,$$

$$(3_3) \qquad s^2\beta_1\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2} - \beta_2 s\frac{\partial\Psi}{\partial s} + (\alpha_3 l - \alpha_2\beta_2)\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} = 0$$

$$(4_3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_2\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right) + \beta_2\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right) \\ &\qquad + (l - s^2)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(5_3) \quad \left\{ \begin{aligned} &2l\frac{\partial\Psi}{\partial l} + \frac{l}{s}\frac{\partial\Psi}{\partial s} + \frac{\alpha_3 l - \alpha_2\beta_2}{s^2}\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right) \\ &\qquad + \beta_1\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right) + \beta_2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(6_3) \quad \left\{ \begin{aligned} &2l\frac{\partial\Psi}{\partial l} + \frac{l}{s}\frac{\partial\Psi}{\partial s} + \alpha_1\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right) \\ &\quad + \frac{\alpha_3 l - \alpha_2\beta_2}{s^2}\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(7_3) \quad \left\{ \begin{aligned} &2l\frac{\partial\Psi}{\partial l}(\alpha_2 + \beta_2) + \alpha_1\beta_2\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right) \\ &\quad + \alpha_2\beta_1\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right) + [\alpha_2\beta_2 + l(\alpha_1 + \alpha_3)]\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} \\ &\qquad + [\alpha_2\beta_2 + (\beta_1 + \alpha_3)l]\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2} = 0. \end{aligned} \right.$$

L'intégration de l'équation (1_3) donne trois solutions indépendantes

$$\lambda = \frac{l}{s^2}, \qquad \mu = \frac{\alpha_2}{s}, \qquad \nu = \frac{\beta_2}{s}.$$

Au lieu des variables α_2, β_2, l, s, introduisons les nouvelles λ, μ, ν;

$$\Psi = \Theta(\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \lambda, \mu, \nu).$$

Après la transformation, nous aurons le système

$$(1_4)\qquad 2\lambda\mu\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}+(\alpha_1+\mu^2)\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}+\alpha_3\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial\nu}=0,$$

$$(2_4)\qquad 2\lambda\mu\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}+\alpha_3\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}+(\beta_1+\nu)\frac{\partial\Theta}{\partial\nu}=0,$$

$$(4_4)\qquad \left\{\begin{aligned}&(1-\lambda)\left(2\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}\right)+(\mu-\lambda\nu)\frac{\partial\Theta}{\partial\nu}\\&\quad+\alpha_1\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_3}\right)+(\alpha_3\lambda-\mu\nu)\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_3}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

$$(3_4)\qquad \left\{\begin{aligned}&\mu\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_3}\right)+\nu\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_3}\right)\\&\qquad\qquad+(\lambda-1)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}+\frac{\partial\Theta}{\partial\nu}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

$$(5_4)\qquad \left\{\begin{aligned}&(1-\lambda)\left(2\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}\right)+(\mu-\lambda\nu)\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}\\&\quad+(\alpha_3\lambda-\mu\nu)\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_3}\right)+\beta_1\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_3}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

L'équation (1_4) donne

$$\frac{d\lambda}{2\lambda\mu}=\frac{d\mu}{\alpha_1+\mu^2}=\frac{d\nu}{\alpha_3\lambda}.$$

Les deux intégrales indépendantes sont

$$\varepsilon=\frac{\lambda}{\alpha_1+\mu^2},\qquad \delta=\frac{\alpha_3\mu\lambda}{\alpha_1+\mu^2}-\nu.$$

Au lieu des variables λ, μ, ν, introduisons les nouvelles ε, δ

$$\Theta=\mathrm{U}(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\varepsilon,\delta).$$

Après la transformation, on a

$$(1_5)\qquad 2\varepsilon\delta\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\varepsilon}+(\delta^2-\varepsilon^2\alpha_1\alpha_3^2+\beta_1)\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\delta}=0,$$

$$(2_5)\qquad 2\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\alpha_3}+\alpha_3\varepsilon\left(2\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\alpha_3}\right)-2\varepsilon^2\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\varepsilon}-\varepsilon\delta\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\delta}=0,$$

$$(3_5)\qquad -\delta\left(2\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\alpha_3}\right)+[\varepsilon^2\alpha_1\alpha_3-\varepsilon(\alpha_1+\alpha_3)+1]\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\delta}=0.$$

Intégrons la première équation (1_5)

$$\frac{d\varepsilon}{2\varepsilon\delta} = \frac{d\delta}{\delta^2 - \varepsilon^2\alpha_1\alpha_3^2 + \beta_1}.$$

L'intégrale sera

$$\Delta = \varepsilon\alpha_1\alpha_3^2 + \frac{\delta^2 + \beta_1}{\varepsilon}.$$

Au lieu de ε, δ, introduisons Δ,

$$U = H(\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \Delta).$$

Après la transformation, nous aurons

$$(1_6) \qquad 2\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H}{\partial \alpha_3} + 2(\beta_1 - \alpha_3)\frac{\partial H}{\partial \Delta} = 0.$$

$$(2_6) \qquad 2\frac{\partial H}{\partial \beta_1} + \frac{\partial H}{\partial \alpha_3} + 2(\alpha_1 + \alpha_3)\frac{\partial H}{\partial \Delta} = 0.$$

Intégrons l'équation (1_6),

$$\frac{d\alpha_1}{2} = \frac{d\alpha_3}{1} = \frac{d\Delta}{2(\beta_1 + \alpha_3)}$$

On aura deux intégrales indépendantes

$$\alpha_1 - 2\alpha_3 = \theta, \qquad \Delta - \alpha_3^2 - 2\beta_1\alpha_3 = \rho$$

Au lieu des variables α_1, α_3, Δ, prenons θ et ρ,

$$H = \Phi(\beta_1, \theta, \rho).$$

Faisons la transformation, et nous aurons définitivement

$$(1_7) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + (\theta - \beta_1)\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0,$$

Pour intégrer cette dernière équation, considérons le système

$$\frac{d\beta_1}{1} = \frac{d\theta}{-1} = \frac{d\rho}{\theta - \beta_1}.$$

Les deux intégrales indépendantes sont

$$C = \beta_1 + \theta, \qquad D = C\beta_1 - \beta_1^2 - \rho.$$

Nous obtenons ainsi la solution complète cherchée du système en question

$$V = \Pi(C.\,D),$$

où Π est une fonction arbitraire.

Il ne reste plus qu'à exprimer les quantités C, D au moyen des variables de M. Bertrand.

La fonction C se détermine aisément

$$C = \beta_1 + \theta = \alpha_1 + \beta_1 - 2\alpha_3 = uv - w^2 + u_1 v_1 - w_1^2 - 2(rr_1 - qs)$$

et représente, comme il n'est pas difficile de s'en convaincre, la somme des carrés des intégrales des surfaces.

Pour déterminer la fonction D, nous avons les relations

$$D = \theta\beta_1 - \rho, \qquad \theta = \alpha_1 - 2\alpha_3, \qquad \rho = \Delta - \alpha_3^3 - 2\beta_1\alpha_3,$$

$$\Delta = \alpha_1 \alpha_3^2 \varepsilon + \frac{\delta^2 + \beta_1}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\alpha_1 + \mu^2}, \qquad = \frac{\alpha_3 \mu\lambda}{\alpha_1 + \mu^2} - \nu.$$

$$\lambda = \frac{l}{s^2}, \qquad \mu = \frac{\alpha_2}{s}, \qquad \nu = \frac{\beta_2}{s}, \qquad l = vv_1,$$

$$\beta_1 = u_1 v_1 - w_1^2, \qquad \beta_2 = w_1 s - v_1 r, \qquad \alpha_1 = uv - w^2,$$

$$\alpha_2 = ws - vr_1, \qquad \alpha_3 = rr_1 - qs,$$

d'où il vient

$$D = \begin{vmatrix} u & q & w & r_1 \\ q & u & r & w_1 \\ w & r & v & s \\ r_1 & w_1 & s & v_1 \end{vmatrix}.$$

Ainsi, nous voyons que les équations de M. Bertrand n'admettent pas d'intégrales indépendantes de la loi des forces autres que celles qui sont déjà connues.