NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. BURALI-FORTI

Sur la définition de l'intégrale définie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 495-502

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__495_1>

[C2h]

SUR LA DÉFINITION DE L'INTÉGRALE DÉFINIE;

PAR M. C. BURALI-FORTI, à Turin.

M. Maurice Fouché a publié, sous le même titre, un article ([1]) dans lequel il démontre, par une méthode simple, deux théorèmes connus, sur l'existence de l'intégrale définie. Une telle méthode est susceptible d'être encore simplifiée, et d'être généralisée ([2]). Ceci est, d'ailleurs, un résultat connu ([3]), que je me propose d'exposer ici sous une forme élémentaire.

1. Soit u une classe (ensemble), de nombres réels, qui contient effectivement des éléments (u est une classe non nulle). Nous écrivons $l'u$, $l_1 u$ au lieu de « limite supérieure des u », « limite inférieure des u ». Si a est un nombre réel, nous disons :

Définition A. — Que $l'u = a$ quand u ne contient

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3e série, t. XV; mai 1896.

([2]) On obtient une simplification, en substituant au couple des classes *contiguës* une seule classe et sa limite supérieure ou inférieure (§ 1); on généralise la méthode parce qu'on peut obtenir les intégrales *supérieures* ou *inférieures* avec la seule condition que la fonction soit limitée dans l'intervalle (§ 3).

([3]) G. PEANO, *Sull'integrabilità delle funzioni* (*Atti Acc. Torino*, 1883). *Lezioni di Analisi infinitesimale* (Vol. I, p. 130-145. Torino, 1893).

pas de nombres plus grands que a, et qu'elle contient toujours des nombres plus grands que x, quel que soit le nombre x plus petit que a.

Définition B. — Que $l_1 u = a$ quand u ne contient pas de nombres plus petits que a, et qu'elle contient toujours des nombres plus petits que x, quel que soit le nombre x plus grand que a.

Si la classe u admet un maximum, ce maximum est $l'u$. Si la classe u admet un minimum, ce minimum est $l_1 u$. Si u est une classe de nombres réels et positifs, alors $l_1 u = 0$ quand, quel que soit le nombre réel h, des nombres plus petits que h existent dans u; c'est-à-dire quand des nombres aussi petits qu'on veut existent dans u.

Si nous supposons que les nombres réels ne soient pas encore introduits, alors les définitions A, B, dans lesquelles nous substituons au mot *nombre réel* le mot *nombre rationnel,* donnent une méthode aussi simple pour définir le nombre irrationnel. Nous ne pouvons pas développer ici cet argument (¹), qui conduit à simplifier la méthode donnée par MM. Dedekind (²) et Tannery (³).

Revenons maintenant aux classes des nombres réels quelconques. Nous disons que la classe u « a une limite supérieure (ou inférieure) », ou que « u est limitée supérieurement (ou inférieurement) », ou que « $l'u$ (ou $l_1 u$) est un nombre réel » quand il existe un nombre réel tel que $l'u = a$ (ou $l_1 u = a$). Si u, v sont des classes de nombres réels, avec $u - v$ nous indiquons la classe

---

(¹) Que je développe dans l'article *Les nombres réels,* publié dans la *Revue de Mathématiques,* 1896.

(²) *Stetigkeit und irrationale Zahlen,* 1872.

(³) *Introduction à la théorie des fonctions,* 1885.

dont les éléments sont les différences entre un élément de u et un élément de v. Si $u - v$ est une classe de nombres réels positifs ou nuls, alors chaque nombre de u n'est pas plus petit que chaque nombre de v, et réciproquement. Cela posé, nous avons les théorèmes suivants [1] :

Théorème I. — *Si u est une classe non nulle de nombres réels, si a est un nombre réel, et si des nombres plus petits (ou plus grands) que a n'existent pas dans u, la classe u est limitée supérieurement (ou inférieurement).*

Théorème II. — *Si u, v sont des classes non nulles de nombres réels ayant une limite supérieure et inférieure* [2], *et si la classe u est contenue dans la classe v (chaque u est un v), on a $l'u \overline{\gtrless} l'v$, et $l_1 u \overline{\gtrless} l_1 v$.*

Théorème III. — *Si u, v sont des classes non nulles de nombres rationnels, et si $u - v$ est une classe de nombres positifs ou nuls* [3], *la condition nécessaire et suffisante pour que $l_1 u = l'v$ est que $l_1(u - v) = 0$.*

Les théorèmes que nous venons d'énoncer sont presque intuitifs ; leur démonstration est très facile. Nous en verrons l'application.

2. Soient a, b des nombres réels tels que $a < b$. Par la notation $a\bar{\ }b$ nous indiquons la classe des nombres égaux ou plus grands que a, et celle des nombres égaux

---

(1) *Formulaire de Mathématiques*, publié par la *Revue de Mathématiques* (Turin, 1895, *voir* § 3).

(2) Cette condition restrictive devient inutile, lorsqu'on a défini la signification des relations $l'u = \infty$, $l_1 u = \infty$ et l'on admet que $-\infty < a < \infty$.

(3) Par cette hypothèse et par le théorème I, on déduit que $l_1 u$ et $l'v$ sont des nombres réels.

ou plus petits que b; ce qui revient à dire que $a^{-}b$ indique l'intervalle de a à b, les extrêmes étant compris.

Soit $f(x)$ une fonction définie quand x varie de a à b (ou définie dans l'intervalle $a^{-}b$). Suivant une notation introduite par M. Dedekind, nous indiquons par $f(a^{-}b)$ la classe dont les éléments sont les nombres $f(x)$, lorsque x varie de a à b. Si x_0, x_1 sont des éléments de $a^{-}b$, alors $f(x)$ est définie dans l'intervalle $x_0{}^{-}x_1$ et la notation $f(x_0{}^{-}x_1)$ a été expliquée.

Nous disons que « $f(x)$ est limitée supérieurement (ou inférieurement) dans l'intervalle $a^{-}b$ », quand la classe $f(a^{-}b)$ est limitée supérieurement (ou inférieurement), c'est-à-dire, quand $l'f(a^{-}b)$ ou $l_1 f(a^{-}b)$ est un nombre réel. Si $f(x)$ est limitée supérieurement (ou inférieurement) dans $a^{-}b$, $f(x)$ est aussi limitée supérieurement (ou inférieurement), dans un intervalle compris dans $a^{-}b$ (§ 1, théorème I). Nous disons que $f(x)$ est limitée dans $a^{-}b$ lorsque $f(x)$ est limitée supérieurement et inférieurement dans $a^{-}b$.

Soit $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n$ une suite de nombres de $a^{-}b$ telle que

$$(1)\quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_0 < x_1 < \ldots, \quad < x_{n-1} < x_n$$

et posons

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} S'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) &= \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1})\, l'f(x_{r-1}{}^{-}x_r), \\ S_1(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) &= \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1})\, l_1 f(x_{r-1}{}^{-}x_r). \end{aligned} \right.$$

Si $f(x)$ est limitée dans $a^{-}b$, chaque suite (1), S' et S_1, définit un nombre réel et déterminé. Les nombres S', S_1 sont fonctions de f et de la suite (1); cela justifie la notation adoptée.

Conservant les hypothèses précédentes, nous indiquons par

$$s'(f; a, b), \qquad s_1(f; a, b)$$

les classes dont les éléments sont les nombres respectifs S', S_1, correspondant à toutes les suites (1). Les classes s', s_1 sont fonctions de f, de a et b, ce qui justifie la notation adoptée.

Théorème. — *Si a, b sont des nombres réels, $a < b$ et si $f(x)$ est une fonction définie et limitée dans $a \frown b$:*

(a). $l_1\, s'(f; a, b)$ et $l'\, s_1(f; a, b)$ sont des nombres réels ;

(b). Chaque nombre de la classe $s'(f; a, b)$, n'est pas plus petit que chaque nombre de la classe $s_1(f; a, b)$.

Démonstration. — On déduit du théorème II du § 1, que

$$l'f(x_{r-1} \frown x_r) \overline{\overline{<}}\, l'f(a \frown b), \qquad l_1 f(x_{r-1} \frown x_r) \overline{\overline{>}}\, l_1 f(a \frown b);$$

de plus, il est évident que

$$l'f(x_{r-1} \frown x_r) \overline{\overline{>}}\, l_1 f(x_{r-1} \frown x_r).$$

Alors les formules (2) nous donnent

$$(3) \quad \begin{cases} S'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \overline{\overline{<}} (b-a)\, l'f(a \frown b), \text{ [1]} \\ S_1(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \overline{\overline{>}} (b-a)\, l_1 f(a \frown b). \end{cases}$$

$$(4) \quad S'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \overline{\overline{>}}\, S_1(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b),$$

et l'on en tire

$$S'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \overline{\overline{>}} (b-a)\, l_1 f(a \frown b),$$
$$S_1(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \overline{\overline{<}} (b-a)\, l' f(a \frown b),$$

Par exemple, la première de celles-ci indique que chaque nombre de $s'(f; a, b)$ est ou égal ou supérieur

---

[1] On peut observer que $(b-a)\, l'f(a \frown b) = S'(f; a, b)$.

au nombre $(b-a)l_1 f(a \frown b)$, et par conséquent (§ 1, théor. I), la classe $s'(f; a, b)$ a une limite inférieure. La partie (a) est ainsi démontrée.

Si nous décomposons chaque intervalle $x_{r-1} \frown x_r$ en parties, on déduit des formules (3) que

$$(5) \begin{cases} S'(f; a, \ldots, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots, b) \overline{\overline{<}} S'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b), \\ S_1(f; a, \ldots, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots, b) \overline{\overline{>}} S_1(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b). \end{cases}$$

Soit $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{m-1}, x'_m$ une suite analogue à la suite (1), et $x''_0, x''_1, \ldots, x''_{p-1}, x''_p$ la suite analogue à la suite (1) qui a pour éléments tous les éléments des suites x, x'. On a [formules (5)],

$$S'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \overline{\overline{>}} S_1(f; a, x''_1, \ldots, x''_{p-1}, b),$$

et, par la formule (4),

$$S'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \overline{\overline{>}} S_1(f; a, x''_1, \ldots, x''_{p-1}, b),$$

ou encore [formules (5)],

$$S'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \overline{\overline{>}} S_1(f; a, x'_1, \ldots, x'_{m-1}, b),$$

ce qui démontre la partie (b) du théorème.

3. Conservons les hypothèses précédentes et écrivons les signes $\overline{\int_a^b}$, $\underline{\int_a^b}$ au lieu de *intégrale supérieure de, intégrale inférieure de,* puis définissons les quantités $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ en posant

$$(1) \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = l_1 s'(f; a, b), \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = l' s_1(f; a, b).$$

L'introduction de l'intégrale définie supérieure et inférieure dans l'analyse est due à MM. Darboux [1] et

---

[1] *Sur les fonctions discontinues* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1875).

Ascoli (1), qui ont publié leurs articles presque en même temps (2). La définition sous la forme que nous venons d'énoncer est due à M. Peano (3) auquel est due aussi la démonstration du théorème du § 2. De ce théorème et de la définition (1), il résulte :

THÉORÈME I. — *Si a, b sont des nombres réels, $a < b$, et si $f(x)$ est une fonction définie et limitée dans l'intervalle $a^{\vdash\!\dashv} b$, $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ et $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ sont des nombres réels bien déterminés.*

Nous disons que la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle $a^{\vdash\!\dashv} b$ quand

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx, \tag{2}$$

et nous indiquons la valeur commune des nombres (2) par le symbole

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Les hypothèses du théorème I étant conservées :

THÉORÈME II. — *Si $f(x)$ est croissante (ou décroissante) dans $a^{\vdash\!\dashv} b$, $f(x)$ est intégrable dans cet intervalle.*

THÉORÈME III. — *Si $f(x)$ est continue dans $a^{\vdash\!\dashv} b$, alors $f(x)$ est intégrable dans cet intervalle.*

Démonstration du théorème II. — Supposons que la suite (1) du § 2 décompose $a^{\vdash\!\dashv} b$ en parties égales,

---

(1) *Sulla definizione di integrale* (*Atti Acc. Lincei,* 1875).

(2) G. PEANO, *Sulla definizione di integrale* (*Annali di Matematica,* 1895).

(3) *Voir* note (3), p. 495.

c'est-à-dire que

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}.$$

L'hypothèse nous donne

$$l' f(x_{r-1} \vdash x_r) = f(x_r), \qquad l_1 f(x_{r-1} \vdash x_r) = f(x_{r-1}),$$

et alors [§ 2, formules (2)], on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) - \mathrm{S}_1(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \\ &\quad = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]. \end{aligned}$$

Un nombre h étant donné, on peut déterminer n de manière que $\frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$ soit plus petit que h; alors, en vertu de la partie (b) du théorème du § 2, on a

$$l_1[s'(f; a, b) - s_1(f; a, b)] = 0$$

et, en ayant égard au théorème III du § 1, on a

$$l_1 s'(f; a, b) = l' s'(f; a, b),$$

c'est-à-dire

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Démonstration du théorème III. — $f(x)$ étant continue dans $a \vdash b$, M. Cantor a démontré que, h étant un nombre donné, on peut toujours diviser l'intervalle $a \vdash b$ au moyen d'une suite analogue à la suite (1) du § 2, de telle sorte que $l' f(x_{r-1} \vdash x_r) - l_1 f(x_{r-1} \vdash x_r) < h$; c'est-à-dire telle que dans chaque intervalle, l'oscillation (suivant M. Dini) de $f(x)$ soit plus petite que h. Le nombre h étant donné et la suite étant déterminée, on a

$$\mathrm{S}'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) - \mathrm{S}_1(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) < h(b-a).$$

On complète la démonstration comme pour le théorème II.