Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 485-486

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__485_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1681.

(1894, p. 5*.)

On considère les coniques inscrites dans un triangle et passant par un point fixe. Le lieu du second point de rencontre avec chaque conique de la droite joignant un sommet A *au point de contact avec le côté opposé est une quartique unicursale.* (A. CAZAMIAN).

SOLUTION

par M. A. DROZ-FARNY.

Effectuons une transformation homographique de la figure, de manière que les sommets B et C du triangle coïncident avec les ombilics du plan, et soient a et p les transformés du sommet A et du point fixe P.

Il s'agira alors de chercher le lieu géométrique des sommets des paraboles de même foyer a et passant par le point fixe p.

Décrivons de p comme centre une circonférence de rayon pa; toute tangente t à cette circonférence est directrice d'une des paraboles; abaissons de a la perpendiculaire ad sur t. Le lieu de d sera un limaçon de Pascal d'axe ap et de point double a. Le sommet S de cette parabole étant le point milieu de ad, le lieu de S sera aussi un limaçon semblable, le rapport de similitude étant $\frac{1}{2}$. Le limaçon étant une quartique bicirculaire, en revenant à la figure primitive, on aura pour le lieu une quartique unicursale ayant ses trois points doubles aux sommets du triangle.

Question 1682.

(1894, p. 5*.)

On considère les coniques touchant quatre droites données. Deux points quelconques étant pris sur l'une de ces droites, le lieu des points de rencontre des tangentes menées de ces deux points à l'une quelconque des coniques du faisceau est une conique. Si les deux points fixes sont pris sur l'une des coniques du faisceau, le lieu est une cubique.

(A. Cazamian).

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Soient P et Q deux points fixes sur un des côtés AB du quadrilatère circonscrit. Une conique étant déterminée par cinq tangentes, les deux tangentes autres que AB que l'on peut mener de P et de Q à une des coniques du faisceau tangentiel se correspondent homographiquement. Le lieu de leur point d'intersection est donc une conique passant par P et Q, et les deux autres sommets du quadrilatère.

Si les deux points fixes sont sur l'une des coniques du faisceau, effectuons une transformation homographique, de manière que P et Q' coïncident avec les ombilics du plan. Le problème revient alors à chercher le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible à un cercle. Le lieu bien connu est une strophoïde cubique circulaire ayant son point double au centre du cercle et passant par les six sommets du quadrilatère complet. Revenons à la figure primitive.

Le lieu cherché sera une cubique passant par les six sommets du quadrilatère complet déterminé par les quatre droites, par les points P et Q et ayant le pôle de la droite PQ par rapport à la conique qui passe par ces points comme point double.