NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. VOGT

Réduction simultanée de deux formes quadratiques de trois variables à des formes canoniques. Application à l'étude d'un système de deux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 441-469

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__441_0>

[B10b]

RÉDUCTION SIMULTANÉE DE DEUX FORMES QUADRATIQUES DE TROIS VARIABLES A DES FORMES CANONIQUES. APPLICATION A L'ÉTUDE D'UN SYSTÈME DE DEUX CONIQUES;

Par M. H. VOGT, à Nancy.

1. Le problème de la réduction simultanée de deux formes quadratiques d'un nombre quelconque de variables à des formes canoniques, en particulier à des sommes de carrés de formes linéaires indépendantes, a fait l'objet de nombreuses recherches et a été résolu d'une manière complète par M. Darboux dans son remarquable Mémoire *Sur la théorie algébrique des formes quadratiques* (*Journal de Liouville*, 1874). Les méthodes qu'il emploie, par cela même qu'elles s'appliquent à tous les cas, exigent d'assez longs développements; mais si l'on se limite, comme je le fais dans cet article, au cas de deux formes quadratiques de trois variables, il est possible d'arriver rapidement, par l'application d'un seul des principes de ces méthodes, à la réduction de ces formes, non seulement à des sommes de carrés lorsqu'elle est possible, mais encore aux formes canoniques habituelles. La considération de la forme adjointe d'une forme quadratique particulière suffit, comme je le montrerai, pour donner les formes réduites; le procédé que j'emploie n'a pas le degré de généralité que possèdent les belles méthodes de M. Darboux, mais il est suffisant pour faire, d'une manière complète, l'étude du système de deux coniques.

2. Soient

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy, \\ \varphi(x, y, z) = a_1x^2 + a'_1y^2 + a''_1z^2 + 2b_1yz + 2b'_1zx + 2b''_1xy \end{cases}$$

deux formes quadratiques de trois variables; nous nous proposons d'abord de rechercher s'il est possible de les réduire simultanément à la somme des carrés de trois formes linéaires indépendantes au plus, affectés de coefficients particuliers; le problème revient à chercher trois formes linéaires

$$(2)\quad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{cases}$$

dont le déterminant des coefficients, que nous appellerons δ, n'est pas nul, et telles que les formes f et φ soient identiques aux formes

$$(3)\quad \begin{cases} f' = l_1x'^2 + l_2y'^2 + l_3z'^2, \\ \varphi' = m_1x'^2 + m_2y'^2 + m_3z'^2, \end{cases}$$

lorsque l'on remplace x', y', z' par les expressions (2), l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3 désignant des coefficients particuliers inconnus.

Si le problème est possible, il admet une infinité de solutions, car on peut multiplier x', y', z' par des facteurs quelconques et choisir arbitrairement trois des coefficients non nuls entrant dans f' et φ', par exemple l_1, l_2, l_3; si l'on suppose données ces trois dernières quantités, le problème admet alors, en général, un nombre limité de solutions, car l'identification des formes f' et φ' avec f et φ fournit douze équations entre douze inconnues, savoir les neuf coefficients des formes (2) et les trois coefficients m_1, m_2, m_3.

Nous ne faisons, pour le moment, aucune hypothèse sur la nature des coefficients des formes f et φ; ils peuvent être réels ou imaginaires. Considérons la forme

$$\mu f + \lambda\varphi = (\mu a + \lambda a_1)x^2 + (\mu a' + \lambda a'_1)y^2 + \ldots;$$

son discriminant

$$\Delta(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} \mu a + \lambda a_1 & \mu b'' + \lambda b''_1 & \mu b' + \lambda b'_1 \\ \mu b'' + \lambda b''_1 & \mu a' + \lambda a'_1 & \mu b + \lambda b_1 \\ \mu b' + \lambda b'_1 & \mu b + \lambda b_1 & \mu a'' + \lambda a''_1 \end{vmatrix}$$

est une forme homogène du troisième ordre; elle n'est nulle identiquement que dans des cas particuliers dont nous réservons l'examen pour plus tard; nous désignons par A, A', ... ses mineurs relatifs à $\mu a + \lambda a_1$, $\mu a' + \lambda a'_1$, ... et par A_i, A'_i, ... les valeurs de ces mineurs lorsqu'on remplace λ et μ par λ_i et μ_i. En employant deux variables λ et μ, nous avons l'avantage de n'établir aucune distinction entre les racines finies et infinies de l'équation en λ habituelle. Soient $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$, $\frac{\lambda_3}{\mu_3}$ les racines de l'équation

$$\frac{1}{\mu^3}\Delta(\lambda, \mu) = 0;$$

nous poserons

$$\Delta(\lambda, \mu) = \Delta_0(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3);$$

nous pouvons remarquer immédiatement qu'une racine simple ne peut annuler les mineurs du discriminant, car elle annulerait la dérivée $\frac{\partial\Delta(\lambda, \mu)}{\partial\lambda}$ dont la valeur est

$$a_1 A + a'_1 A' + a''_1 A'' + 2 b_1 B + 2 b'_1 B' + 2 b''_1 B'';$$

de la même manière, une racine double ne peut annuler tous les éléments, car elle annulerait la dérivée seconde $\frac{\partial^2\Delta(\lambda, \mu)}{\partial\lambda^2}$.

3. Supposons que la réduction de f et φ aux formes f' et φ' soit possible; les deux formes quadratiques

$\mu f + \lambda\varphi$ et $\mu f' + \lambda\varphi'$ sont transformées l'une de l'autre par la substitution (2); d'après un théorème connu, le discriminant de la première est égal à celui de la seconde multiplié par le carré du déterminant δ; on a donc l'équation

$$(4)\quad \Delta(\lambda, \mu) = (\lambda m_1 + \mu l_1)(\lambda m_2 + \mu l_2)(\lambda m_3 + \mu l_3)\,\delta^2.$$

Si les coefficients de chacun des carrés x'^2, y'^2, z'^2 ne sont pas nuls simultanément dans f' et φ', le second membre de l'égalité précédente n'est pas identiquement nul, et il en est de même de $\Delta(\lambda, \mu)$; mais si f' et φ' ne renferment les carrés que de deux formes au plus, $\mu f + \lambda\varphi$ est toujours réductible à un ou deux carrés, et $\Delta(\lambda, \mu)$ est identiquement nul, cas que nous excluons pour le moment.

L'équation (4) montre que $-\frac{l_1}{m_1}$, $-\frac{l_2}{m_2}$, $-\frac{l_3}{m_3}$ sont égaux aux trois racines $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$, $\frac{\lambda_3}{\mu_3}$. Si deux d'entre elles sont égales, par exemple si $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est une racine double égale à $-\frac{l_1}{m_1}$ et à $-\frac{l_2}{m_2}$, la forme $\mu_1 f + \lambda_1\varphi$ est réductible à un seul carré et est égale à $(\mu_1 l_3 + \lambda_1 m_3)z'^2$; par suite, les mineurs du discriminant $\Delta(\lambda_1, \mu_1)$ sont tous nuls; de la même manière, si les trois racines sont égales et si $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est la racine triple, la forme $\mu_1 f + \lambda_1\varphi$ est identiquement nulle, et tous les éléments du discriminant $\Delta(\lambda_1, \mu_1)$ sont nuls. Nous déduisons de là que l'une des conditions suivantes est nécessaire pour que f et φ soient réductibles simultanément à trois carrés :

1° Le discriminant égalé à zéro a ses racines distinctes;

2° Il a une racine simple et une racine double annulant les mineurs;

3° Il a une racine triple annulant tous les éléments.

Elles expriment que les diviseurs élémentaires du discriminant sont tous du premier degré, d'après la terminologie de Weierstrass exposée par M. Sauvage dans les *Nouvelles Annales* (1895).

Nous verrons que ces conditions sont aussi suffisantes et nous formerons effectivement les formes linéaires x', y', z'; dans le cas où les conditions précédentes ne sont pas remplies, nous obtiendrons des formes réduites simples pour f et φ.

4. La méthode que nous emploierons avec M. Darboux repose sur les propriétés de la forme adjointe d'une forme quadratique. On appelle *forme adjointe* de

$$f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

la deuxième forme

$$F(X, Y, Z) = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & X \\ b'' & a' & b & Y \\ b' & b & a'' & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix}$$

dont le développement est

$$-(AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY),$$

en désignant par A, A', ... les mineurs du discriminant Δ de f; elle possède les propriétés suivantes :

1° Si l'on remplace X, Y, Z par les demi-dérivées de la forme primitive par rapport à x, y, z, on obtient comme résultat

$$F(\tfrac{1}{2}f'_x, \tfrac{1}{2}f'_y, \tfrac{1}{2}f'_z) = -\Delta f(x, y, z); \tag{5}$$

supposons, en effet, que dans la fonction

$$F(\tfrac{1}{2}f'_x, \tfrac{1}{2}f'_y, \tfrac{1}{2}f'_z) = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & ax + b''y + b'z \\ b'' & a' & b & b''x + a'y + bz \\ b' & b & a'' & b'x + by + a''z \\ ax + b''y + b'z & b''x + a'y + bz & b'x + by + a''z & 0 \end{vmatrix},$$

on retranche des éléments de la dernière colonne ceux des précédentes, multipliés respectivement par x, y, z, et qu'on opère de même sur les lignes, on obtient comme résultat

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & 0 \\ b'' & a' & b & 0 \\ b' & b & a'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f(x,y,z) \end{vmatrix} = -\Delta f(x,y,z);$$

2° Si le discriminant Δ est nul sans que tous ses mineurs le soient, la forme adjointe est le carré d'une forme linéaire; remarquons d'abord que A, A′, A″ ne sont pas tous les trois nuls, car sinon les égalités

$$\begin{aligned} A'A'' - B^2 &= a\Delta, \\ A''A - B'^2 &= a'\Delta, \\ AA' - B''^2 &= a''\Delta \end{aligned}$$

entraîneraient $B = B' = B'' = 0$, et tous les mineurs seraient nuls, contrairement à l'hypothèse; si A, par exemple, n'est pas nul, on peut mettre en évidence le carré de $AX + B''Y + B'Z$ et poser

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} F(X,Y,Z) = &-\frac{1}{A}(AX + B''Y + B'Z)^2 \\ &-\frac{\Delta}{A}(a''Y^2 + a'Z^2 - 2bYZ); \end{aligned} \right.$$

si donc $\Delta = 0$, F se réduit à un seul carré.

3° Si Δ est nul ainsi que ses mineurs, la forme adjointe est identiquement nulle.

5. Appliquons ces considérations à la forme quadratique $\mu f + \lambda\varphi$ dont nous désignerons la forme adjointe par $F(X, Y, Z, \lambda, \mu)$; elle est égale à

$$\begin{vmatrix} \mu a + \lambda a_1 & \mu b'' + \lambda b''_1 & \mu b' + \lambda b'_1 & X \\ \mu b'' + \lambda b''_1 & \mu a' + \lambda a'_1 & \mu b + \lambda b_1 & Y \\ \mu b' + \lambda b'_1 & \mu b + \lambda b_1 & \mu a'' + \lambda a''_1 & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix};$$

d'après la première propriété exprimée par l'équation (5), la fonction

$$\Phi(X, Y, Z, \lambda, \mu) = -\frac{F(X, Y, Z, \lambda, \mu)}{\Delta(\lambda, \mu)}$$

se réduit à $\mu f + \lambda\varphi$ lorsque l'on remplace X, Y, Z par

$$\tfrac{1}{2}(\mu f'_x + \lambda\varphi'_x), \quad \tfrac{1}{2}(\mu f'_y + \lambda\varphi'_y), \quad \tfrac{1}{2}(\mu f'_z + \lambda\varphi'_z).$$

Nous sommes amenés à transformer la fraction rationnelle qui entre au second membre, et à y remplacer ensuite les variables X, Y, Z par les demi-dérivées précédentes, pour obtenir une expression simple de $\mu f + \lambda\varphi$; nous décomposerons cette fraction rationnelle en éléments simples, et nous considérerons successivement les différents cas suivants :

Premier cas. — Les racines du discriminant sont distinctes; supposons que l'on ait

$$\Delta(\lambda, \mu) = \Delta_0(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3),$$

alors la fonction Φ, décomposée en éléments simples, se met sous la forme

$$\begin{aligned}\Phi(X, Y, Z, \lambda, \mu) = \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)}{\Delta_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)} &+ \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_2, \mu_2)}{\Delta_2(\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2)} \\ &+ \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_3, \mu_3)}{\Delta_3(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)},\end{aligned}$$

où l'on pose

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_0(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3),\\ \Delta_2 &= \Delta_0(\lambda_2\mu_1 - \mu_2\lambda_1)(\lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3),\\ \Delta_3 &= \Delta_0(\lambda_3\mu_1 - \mu_3\lambda_1)(\lambda_3\mu_2 - \mu_3\lambda_2);\end{aligned}$$

chacun des numérateurs est la forme adjointe d'une forme quadratique de discriminant nul et est, dès lors, le carré d'une forme linéaire de X, Y, Z et aussi de x, y, z lorsqu'on remplace les premières variables par les demi-dérivées de $\mu f + \lambda\varphi$. Considérons l'un d'eux, par exemple le premier, après cette substitution; on a

$$F\left[\tfrac{1}{2}(\mu f'_x+\lambda\varphi'_x),\ \tfrac{1}{2}(\mu f'_y+\lambda\varphi'_y),\ \tfrac{1}{2}(\mu f'_z+\lambda\varphi'_z),\ \lambda_1,\ \mu_1\right]$$
$$=\begin{vmatrix} \mu_1 a+\lambda_1 a_1 & \mu_1 b''+\lambda_1 b''_1 & \mu_1 b'+\lambda_1 b'_1 & \tfrac{1}{2}(\mu f'_x+\lambda\varphi'_x) \\ \mu_1 b''+\lambda_1 b''_1 & \mu_1 a'+\lambda_1 a'_1 & \mu_1 b+\lambda_1 b_1 & \tfrac{1}{2}(\mu f'_y+\lambda\varphi'_y) \\ \mu_1 b'+\lambda_1 b'_1 & \mu_1 b+\lambda_1 b_1 & \mu_1 a''+\lambda_1 a''_1 & \tfrac{1}{2}(\mu f'_z+\lambda\varphi'_z) \\ \tfrac{1}{2}(\mu f'_x+\lambda\varphi'_x) & \tfrac{1}{2}(\mu f'_y+\lambda\varphi'_y) & \tfrac{1}{2}(\mu f'_z+\lambda\varphi'_z) & 0 \end{vmatrix};$$

si μ_1 n'est pas nul, on peut retrancher des éléments de la dernière colonne ceux des précédentes, multipliés respectivement par $\frac{\mu}{\mu_1}x$, $\frac{\mu}{\mu_1}y$, $\frac{\mu}{\mu^1}z$ et opérer de même sur les lignes; en posant alors

$$\chi(xyz)=-\frac{\mu^2}{\mu_1}f+\left(\frac{\mu^2\lambda_1}{\mu'_2}-\frac{2\lambda\mu}{\mu_1}\right)\varphi,$$

le déterminant précédent devient

$$\begin{vmatrix} \mu_1 a+\lambda_1 a_1 & \mu_1 b''+\lambda_1 b''_1 & \mu_1 b'+\lambda_1 b'_1 & (\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{\varphi'_x}{2\mu_1} \\ \mu_1 b''+\lambda_1 b''_1 & \mu_1 a'+\lambda_1 a'_1 & \mu_1 b+\lambda_1 b_1 & (\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{\varphi'_y}{2\mu_1} \\ \mu_1 b'+\lambda_1 b'_1 & \mu_1 b+\lambda_1 b_1 & \mu_1 a''+\lambda_1 a''_1 & (\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{\varphi'_z}{2\mu_1} \\ (\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{\varphi'_x}{2\mu_1} & (\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{\varphi'_y}{2\mu_1} & (\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{\varphi'_z}{2\mu_1} & \chi(xyz) \end{vmatrix},$$

ou bien, en supposant par exemple $A_1 \neq 0$ et appliquant la formule (6),

$$-\frac{(\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)^2}{A_1}\left(A_1\frac{\varphi'_x}{2\mu_1}+B''_1\frac{\varphi'_y}{2\mu_1}+B'_1\frac{\varphi'_z}{2\mu_1}\right)^2$$
$$+\Delta(\lambda_1,\mu_1)\,\psi(x,y,z),$$

ψ désignant une certaine fonction de x, y, z, dont le coefficient est nul dans le cas actuel.

Si λ_1 n'est pas nul, un calcul analogue donne pour valeur du déterminant

$$-\frac{(\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)^2}{A_1}\left(A_1\frac{f'_x}{2\lambda_1}+B''_1\frac{f'_y}{2\lambda_1}+B'_1\frac{f'_z}{2\lambda_1}\right)^2$$
$$+\Delta(\lambda_1,\mu_1)\,\psi_1(x,y,z);$$

dans tous les cas, quelles que soient les valeurs de λ_1 et μ_1, on peut écrire

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &F\left[\tfrac{1}{2}(\mu f'_x+\lambda\varphi'_x),\tfrac{1}{2}(\mu f'_y+\lambda\varphi'_y),\tfrac{1}{2}(\mu f'_z+\lambda\varphi'_z),\lambda_1,\mu_1\right]\\ &\quad=-\varepsilon_1(\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)^2x'^2+\Delta(\lambda_1.\,\mu_1)\,\psi(x,y,z),\end{aligned}\right.$$

ε_1 étant égal à ± 1 et x' désignant l'une des formes linéaires

$$\frac{A_1\varphi'_x+B''_1\varphi'_y+B'_1\varphi'_z}{2\mu_1\sqrt{\varepsilon_1 A_1}},\quad \frac{A_1 f'_x+B''_1 f'_y+B'_1 f'_z}{2\lambda_1\sqrt{\varepsilon_1 A_1}};$$

nous introduisons le coefficient ε_1 afin que x' ait ses coefficients réels lorsque les coefficients de f et φ ainsi que λ_1 et μ_1 sont réels.

En répétant le même raisonnement pour les autres numérateurs des fractions simples et désignant par y' et z' des formes linéaires analogues à x', on arrive à l'équation

$$\mu f+\lambda\varphi=\varepsilon_1(\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{x'^2}{\Delta_1}$$
$$+\varepsilon_2(\lambda\mu_2-\mu\lambda_2)\frac{y'^2}{\Delta_2}+\varepsilon_3(\lambda\mu_3-\mu\lambda_3)\frac{z'^2}{\Delta_3}.$$

En séparant les coefficients de λ et de μ, on obtient la réduction simultanée

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} f&=-\frac{\varepsilon_1\lambda_1 x'^2}{\Delta_1}-\frac{\varepsilon_2\lambda_2 y'^2}{\Delta_2}-\frac{\varepsilon_3\lambda_3 z'^2}{\Delta_3},\\ \varphi&=+\frac{\varepsilon_1\mu_1 x'^2}{\Delta_1}+\frac{\varepsilon_2\mu_2 y'^2}{\Delta_2}+\frac{\varepsilon_3\mu_3 z'^2}{\Delta_3}.\end{aligned}\right.$$

Les formes linéaires x', y', z' sont bien indépendantes, car sinon le discriminant de $\mu f+\lambda\varphi$ serait identiquement nul, contrairement à l'hypothèse; en les multipliant par des facteurs convenables, on peut les remplacer par des formes ξ, η, ζ telles que l'on ait

$$(8')\qquad \left\{\begin{aligned} f &= -\lambda_1\xi^2 - \lambda_2\eta^2 - \lambda_3\zeta^2, \\ \varphi &= \quad \mu_1\xi^2 + \mu_2\eta^2 + \mu_3\zeta^2. \end{aligned}\right.$$

Je vais montrer que la décomposition ainsi obtenue est unique, c'est-à-dire que des formes linéaires satisfaisant aux équations (3) ne peuvent différer des précédentes que par des facteurs constants; nous avons vu, en effet, que $-\frac{l_1}{m_1}$, $-\frac{l_2}{m_2}$, $-\frac{l_3}{m_3}$ sont identiques à $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$, $\frac{\lambda_3}{\mu_3}$; on peut dès lors ramener toute réduction simultanée de f et φ à la forme

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} f &= -\lambda_1\xi'^2 - \lambda_2\eta'^2 - \lambda_3\zeta'^2, \\ \varphi &= \quad \mu_1\xi'^2 + \mu_2\eta'^2 + \mu_3\zeta'^2; \end{aligned}\right.$$

l'identification des formes (8') et (9) donne les équations

$$\lambda_1(\xi^2 - \xi'^2) + \lambda_2(\eta^2 - \eta'^2) + \lambda_3(\zeta^2 - \zeta'^2) = 0,$$
$$\mu_1(\xi^2 - \xi'^2) + \mu_2(\eta^2 - \eta'^2) + \mu_3(\zeta^2 - \zeta'^2) = 0,$$

d'où

$$\frac{\xi^2 - \xi'^2}{\lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3} = \frac{\eta^2 - \eta'^2}{\lambda_3\mu_1 - \mu_3\lambda_1} = \frac{\zeta^2 - \zeta'^2}{\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2};$$

si les numérateurs ne sont pas nuls, ils sont décomposables en un produit de deux facteurs linéaires; en désignant par le produit PQ de deux formes linéaires la valeur commune des rapports, $\xi + \xi'$ et $\xi - \xi'$, et, par suite, ξ et ξ' s'expriment linéairement au moyen de P et Q, et il en est de même de η, η', ζ, ζ'; par suite, les formes ξ, η, ζ ne sont pas indépendantes, ce qui est impossible; il faut donc que les numérateurs soient nuls, ce qui entraîne les équations

$$\xi' = \pm\xi, \qquad \eta' = \pm\eta, \qquad \zeta' = \pm\zeta.$$

6. *Deuxième cas.* — Le discriminant a une racine simple et une racine double n'annulant pas les mineurs; supposons que l'on ait

$$\Delta(\lambda, \mu) = \Delta_0(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3).$$

Nous pouvons toujours mettre $F(X, Y, Z, \lambda, \mu)$ sous la forme

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & H(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)^2 \\ & \quad + K(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3) + L(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2; \end{aligned} \right.$$

les coefficients H, K, L sont respectivement égaux à

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)}{(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)^2}, \\ & \frac{-\left[\lambda_3 \dfrac{\partial F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)}{\partial\lambda_1} + \mu_3 \dfrac{\partial F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)}{\partial\mu_1}\right]}{(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)^2}, \\ & \frac{F(X, Y, Z, \lambda_3, \mu_3)}{(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)^2}; \end{aligned} \right.$$

nous en concluons que la fonction $\Phi(X, Y, Z, \lambda, \mu)$ est décomposable en éléments simples de la façon suivante :

$$-\frac{F(X, Y, Z, \lambda, \mu)}{\Delta(\lambda, \mu)} = \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)}{\Delta_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2} + \frac{\lambda_3 \dfrac{\partial F}{\partial\lambda_1} + \mu_3 \dfrac{\partial F}{\partial\mu_1}}{\Delta_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)} + \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_3, \mu_3)}{\Delta_1(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)},$$

en posant

$$\Delta_1 = \Delta_0(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)^2.$$

Nous avons maintenant à remplacer X, Y, Z par les demi-dérivées de $\mu f + \lambda\varphi$; nous savons que $F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)$ et $F(X, Y, Z, \lambda_3, \mu_3)$ deviennent respectivement

$$-\varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2 x'^2, \qquad -\varepsilon_3(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)^2 z'^2,$$

x' et z' étant deux formes linéaires particulières; pour déterminer les valeurs de $\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}$ et $\frac{\partial F}{\partial \mu_1}$ après la même substitution, on peut prendre simplement les dérivées du second membre de la formule (7) par rapport à λ_1 et μ_1; comme $\frac{\partial \Delta(\lambda_1, \mu_1)}{\partial \lambda_1}$ et $\frac{\partial \Delta(\lambda_1, \mu_1)}{\partial \mu_1}$ sont nuls d'après les hypothèses faites, on aura simplement

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_3 \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} + \mu_3 \frac{\partial F}{\partial \mu_1} &= -2\varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)x'^2 \\ &\quad - 2\varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2 x' \left(\lambda_3 \frac{\partial x'}{\partial \lambda_1} + \mu_3 \frac{\partial x'}{\partial \mu_1}\right), \end{aligned} \right.$$

d'où, finalement, on obtient la décomposition de $\mu f + \lambda\varphi$

$$\begin{aligned} \mu f + \lambda\varphi = &- \varepsilon_1(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)\frac{x'^2}{\Delta_1} \\ &- 2\varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)\frac{x'}{\Delta_1}\left(\lambda_3 \frac{\partial x'}{\partial \lambda_1} + \mu_3 \frac{\partial x'}{\partial \mu_1}\right) + \varepsilon_3(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)\frac{z'^2}{\Delta_1}, \end{aligned}$$

et la réduction simultanée suivante de f et de φ, où nous avons posé pour simplifier

$$y' = \lambda_3 \frac{\partial x'}{\partial \lambda_1} + \mu_3 \frac{\partial x'}{\partial \mu_1},$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= \frac{\varepsilon_1 \lambda_3 x'^2}{\Delta_1} + \frac{2\varepsilon_1 \lambda_1 x' y'}{\Delta_1} - \frac{\varepsilon_3 \lambda_3 z'^2}{\Delta_1}, \\ \varphi &= -\frac{\varepsilon_1 \mu_3 x'^2}{\Delta_1} - \frac{2\varepsilon_1 \mu_1 x' y'}{\Delta_1} + \frac{\varepsilon_3 \mu_3 z'^2}{\Delta_1}. \end{aligned} \right.$$

Les formes x', y', z' sont linéairement indépendantes, car sinon le déterminant de $\mu f + \lambda\varphi$ serait identiquement nul; en les multipliant par des facteurs convenables, on peut les remplacer par des formes ξ, η, ζ, telles que l'on ait

$$(13') \quad \left\{ \begin{aligned} f &= -\lambda_3(\xi^2 + \zeta^2) - 2\lambda_1 \xi\eta, \\ \varphi &= \quad \mu_3(\xi^2 + \zeta^2) + 2\mu_1 \xi\eta. \end{aligned} \right.$$

On peut montrer, comme dans le premier cas, que si des formes ξ', η', ζ' sont telles que l'on ait identiquement

$$f = -\lambda_3(\xi'^2 + \zeta'^2) - 2\lambda_1\xi'\eta',$$
$$\varphi = \quad \mu_3(\xi'^2 + \zeta'^2) + 2\mu_1\xi'\eta',$$

il est nécessaire que l'on ait $\xi' = \pm\xi$, $\eta' = \pm\eta$, $\zeta' = \pm\zeta$.

7. *Troisième cas.* — Le discriminant a une racine triple n'annulant pas les mineurs; supposons que l'on ait

$$\Delta(\lambda, \mu) = \Delta_0(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^3;$$

nous pouvons décomposer la fonction Φ en une somme d'éléments simples par un calcul analogue à celui du cas précédent, en introduisant même des paramètres arbitraires. Désignons par λ_3 et μ_3 deux nombres quelconques tels que $\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3$ ne soit pas nul; nous pouvons toujours mettre $F(X, Y, Z, \lambda, \mu)$ sous la forme (10), les coefficients H, K, L ayant les valeurs (11); en divisant alors les fonctions par $\Delta(\lambda, \mu)$, nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{-F(X, Y, Z, \lambda, \mu)}{\Delta(\lambda, \mu)} = {} & \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)^2}{\Delta_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^3} \\ & + \frac{\left(\lambda_3\dfrac{\partial F}{\partial\lambda_1} + \mu_3\dfrac{\partial F}{\partial\mu_1}\right)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)}{\Delta_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2} \\ & + \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_3, \mu_3)}{\Delta_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)},\end{aligned}$$

où Δ_1 a la même signification que précédemment. Le numérateur de la dernière fraction est une forme quadratique de λ_3 et μ_3; nous pouvons le remplacer par

$$\begin{aligned}-F(X, Y, Z, \lambda_3, \mu_3) = -\frac{1}{2}\Bigg[& \lambda_3^2\frac{\partial^2 F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)}{\partial\lambda_1^2} \\ & + 2\lambda_3\mu_3\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda_1\partial\mu_1} + \mu_3^2\frac{\partial^2 F}{\partial\mu_1^2}\Bigg],\end{aligned}$$

car les dérivées secondes de $F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)$ sont des constantes.

Nous avons maintenant à remplacer X, Y, Z par les demi-dérivées de $\mu f + \lambda\varphi$; nous nous servirons encore de la formule (7) pour calculer la fonction F ainsi que ses dérivées, après cette substitution; comme $\Delta(\lambda_1, \mu_1)$ est nul ainsi que ses dérivées premières et secondes, $\lambda_3 \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} + \mu_3 \frac{\partial F}{\partial \mu_1}$ sera donné par l'équation (12), et l'on aura pour valeur du dernier coefficient

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}&\left(\lambda_3^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} + 2\lambda_3\mu_3 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1 \partial \mu_1} + \mu_3^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \mu_1^2}\right) \\
&= \varepsilon_1(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)^2 x'^2 \\
&\quad + 4\varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)x'\left(\lambda_3 \frac{\partial x'}{\partial \lambda_1} + \mu_3 \frac{\partial x'}{\partial \mu_1}\right) \\
&\quad + \varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2 \left(\lambda_3 \frac{\partial x'}{\partial \lambda_1} + \mu_3 \frac{\partial x'}{\partial \mu_1}\right)^2 \\
&\quad + \varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2 x' \left(\lambda_3^2 \frac{\partial^2 x'}{\partial \lambda_1^2} + 2\lambda_3\mu_3 \frac{\partial^2 x'}{\partial \lambda_1 \partial \mu_1} + \mu_3^2 \frac{\partial^2 x'}{\partial \mu_1^2}\right).
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}
y' &= \lambda_3 \frac{\partial x'}{\partial \lambda_1} + \mu_3 \frac{\partial x'}{\partial \mu_1}, \\
z' &= \frac{1}{2}\left(\lambda_3^2 \frac{\partial^2 x'}{\partial \lambda_1^2} + 2\lambda_3\mu_3 \frac{\partial^2 x'}{\partial \lambda_1 \partial \mu_1} + \mu_3^2 \frac{\partial^2 x'}{\partial \mu_1^2}\right),
\end{aligned}$$

on aura, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}
\mu f + \lambda\varphi = &\frac{2\varepsilon_1}{\Delta_1}(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)x'y' \\
&+ \frac{\varepsilon_1}{\Delta_1}(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(y'^2 + 2x'z'),
\end{aligned}$$

d'où la réduction simultanée suivante

$$(14)\quad \begin{cases}
f = -\dfrac{\lambda_3\varepsilon_1}{\Delta_1} 2x'y' - \dfrac{\lambda_1\varepsilon_1}{\Delta_1}(y'^2 + 2x'z'), \\[2ex]
\varphi = \dfrac{\mu_3\varepsilon_1}{\Delta_1} 2x'y' + \dfrac{\mu_1\varepsilon_1}{\Delta_1}(y'^2 + 2x'z').
\end{cases}$$

On peut donner à λ_3 et μ_3 des valeurs arbitraires, et supposer que l'une de ces quantités est nulle; les formes x', y', z' sont linéairement indépendantes, et, en les multipliant par des facteurs convenables, on peut les remplacer par des fonctions ξ, η, ζ telles que l'on ait

$$(14') \qquad \begin{cases} f = -2\lambda_3\xi\eta - \lambda_1(\eta^2 + 2\xi\zeta), \\ \varphi = 2\mu_3\xi\eta + \mu_1(\eta^2 + 2\xi\zeta); \end{cases}$$

comme précédemment, il n'existe, au signe près, qu'un seul système de fonctions donnant pour f et φ la décomposition précédente, où λ_1, μ_1, λ_3, μ_3 sont fixés à l'avance.

8. *Quatrième cas.* — Le discriminant a une racine simple et une racine double annulant les mineurs.

La forme adjointe de $\mu f + \lambda\varphi$ devenant identiquement nulle pour la racine double, nous opérerons de la façon suivante : soit $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ la racine double; la forme quadratique $\mu_1 f + \lambda_1\varphi$ est réductible à un seul carré; les trois quantités $\mu_1 a + \lambda_1 a_1$, $\mu_1 a' + \lambda_1 a'_1$, $\mu_1 a'' + \lambda_1 a''_1$ ne sont pas nulles simultanément, car sinon tous les éléments du discriminant $\Delta(\lambda_1, \mu_1)$ seraient nuls, ce qui est impossible. Si l'on suppose, par exemple, $\mu_1 a + \lambda_1 a_1$ différent de zéro, on a

$$\mu_1 f + \lambda_1\varphi = \varepsilon_3 z'^2,$$

en désignant par z' la forme linéaire

$$z' = \frac{(\mu_1 a + \lambda_1 a_1)x + (\mu_1 b'' + \lambda_1 b''_1)y + (\mu_1 b' + \lambda_1 b'_1)z}{\sqrt{\varepsilon_3(\mu_1 a + \lambda_1 a_1)}},$$

et par ε_3 l'un des nombres $+1$ ou -1, choisi de façon que la quantité sous le radical soit positive lorsqu'elle est réelle.

En désignant par $\frac{\lambda_3}{\mu_3}$ la racine simple, la forme

$\mu_3 f + \lambda_3 \varphi$ a son discriminant nul sans que les mineurs le soient, et se réduit à une somme de deux carrés d'une infinité de manières; nous écrirons

$$\mu_3 f + \lambda_3 \varphi = - \varepsilon_1 x'^2 - \varepsilon_2 y'^2,$$

x' et y' désignant deux formes linéaires que l'on sait former par le procédé connu de réduction d'une forme à la somme de plusieurs carrés, et qu'il est inutile d'écrire; ε_1 et ε_2 désignent encore ± 1.

On tire des deux égalités précédentes les valeurs de f et φ

$$(15) \qquad \begin{cases} f = -\dfrac{\varepsilon_1 \lambda_1 x'^2}{\Delta_1} - \dfrac{\varepsilon_2 \lambda_1 y'^2}{\Delta_1} - \dfrac{\varepsilon_3 \lambda_3 z'^2}{\Delta_1}, \\ \varphi = \dfrac{\varepsilon_1 \mu_1 x'^2}{\Delta_1} + \dfrac{\varepsilon_2 \mu_1 y'^2}{\Delta_1} + \dfrac{\varepsilon_3 \mu_3 z'^2}{\Delta_1}, \end{cases}$$

où l'on a posé $\Delta_1 = \lambda_1 \mu_3 - \mu_1 \lambda_3$; on obtient ainsi une décomposition simultanée des formes données en une somme de trois carrés, analogue à la réduction fournie par les formules (8); les formes x', y', z' sont indépendantes et, en les multipliant par des facteurs convenables, on peut les remplacer par des formes ξ, η, ζ telles que l'on ait

$$(15') \qquad \begin{cases} f = -\lambda_1 \xi^2 - \lambda_1 \eta^2 - \lambda_3 \zeta^2. \\ \varphi = \mu_1 \xi^2 + \mu_1 \eta^2 + \mu_3 \zeta^2. \end{cases}$$

Cette réduction est possible d'une infinité de manières; on peut la remplacer par la suivante

$$(15'') \qquad \begin{cases} f = -\lambda_1 2\xi' \eta' - \lambda_3 \zeta^2, \\ \varphi = \mu_1 2\xi' \eta' + \mu_3 \zeta^2, \end{cases}$$

qui, au changement de signe près de ξ', η', ζ, est possible d'une seule manière.

9. *Cinquième cas.* — Le discriminant a une racine triple annulant les mineurs et n'annulant pas les élé-

ments. Soit $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ cette racine triple, la forme $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi$ est, comme dans le cas précédent, réductible à un seul carré, et nous pouvons écrire

$$\mu_1 f + \lambda_1 \varphi = \varepsilon_3 z'^2,$$

z' étant une forme linéaire analogue à celle que nous avons ainsi désignée précédemment; nous écrirons

$$z' = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Cherchons à calculer la forme quadratique $\mu_3 f + \lambda_3 \varphi$, où λ_3 et μ_3 sont deux nombres quelconques tels que $\lambda_1 \mu_3 - \mu_1 \lambda_3$ ne soit pas nul, et à la réduire à une forme simple; en supposant, pour fixer les idées, que γ soit différent de zéro, x et y constituent avec z' un système de formes linéaires indépendantes, et l'on peut, dans $\mu_3 f + \lambda_3 \varphi$, remplacer z par $\frac{1}{\gamma}(z' - \alpha x - \beta y)$. Soit

$$\varphi_2(x, y, z') \\ = a_2 x^2 + a'_2 y^2 + a''_2 z'^2 + 2 b_2 y z' + 2 b'_2 z' x + 2 b''_2 x y,$$

le résultat de cette substitution; considérons la forme quadratique

$$\mu' \varepsilon_3 z'^2 + \lambda' \varphi_2(x. y, z')$$

et son discriminant

$$\Delta'(\lambda', \mu') = \begin{vmatrix} \lambda' a_2 & \lambda' b''_2 & \lambda' b'_2 \\ \lambda' b''_2 & \lambda' a'_2 & \lambda' b_2 \\ \lambda' b'_2 & \lambda' b_2 & \mu' \varepsilon_3 + \lambda' a''_2 \end{vmatrix};$$

comme la forme considérée est identique à la forme $\mu f + \lambda \varphi$, où l'on a

$$\mu = \mu' \mu_1 + \lambda' \mu_3,$$
$$\lambda = \mu' \lambda_1 + \lambda' \lambda_3,$$

l'équation $\Delta'(\lambda', \mu') = 0$ aura, comme $\Delta(\lambda, \mu) = 0$, une racine triple, et cette racine est déterminée par l'équation

$$\frac{\mu'\lambda_1 + \lambda'\lambda_3}{\mu'\mu_1 + \lambda'\mu_3} = \frac{\lambda_1}{\mu_1},$$

qui donne $\lambda' = 0$. Pour que le discriminant $\Delta'(\lambda', \mu')$ soit divisible par λ'^3, il faut et il suffit que l'on ait

$$a_2 a'_2 - b''^2_2 = 0,$$

c'est-à-dire que la forme quadratique

$$a_2 x^2 + a'_2 y^2 + 2 b''_2 xy$$

soit carré parfait; nous pourrons la représenter par $-\varepsilon_1 x'^2$, x' désignant une forme linéaire particulière; en écrivant de plus

$$a''_2 z' - 2 b_2 y + 2 b'_2 x = -2 y',$$

nous aurons

$$\mu_3 f + \lambda_3 \varphi = -\varepsilon_1 x'^2 - 2 y' z'.$$

Cette identité, jointe à celle qui donne $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi$, fournit les expressions suivantes de f et de φ, où l'on a posé, comme précédemment,

$$\Delta_1 = \lambda_1 \mu_3 - \mu_1 \lambda_3,$$

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} f &= -\frac{\varepsilon_1 \lambda_1 x'^2}{\Delta_1} - \frac{2\lambda_1 y' z'}{\Delta_1} - \frac{\varepsilon_3 \lambda_3 z'^2}{\Delta_1}, \\ \varphi &= \frac{\varepsilon_1 \mu_1 x'^2}{\Delta_1} + \frac{2\mu_1 y' z'}{\Delta_1} + \frac{\varepsilon_3 \mu_3 z'^2}{\Delta_1}. \end{aligned} \right.$$

Les formes x', y', z' sont linéairement indépendantes, et, en les multipliant par des facteurs constants, on peut écrire

$$(16') \qquad \left\{ \begin{aligned} f &= -\lambda_1 \xi^2 - 2\lambda_1 \eta\zeta - \lambda_3 \zeta^2, \\ \varphi &= \mu_1 \xi^2 + 2\mu_1 \eta\zeta + \mu_3 \zeta^2; \end{aligned} \right.$$

les nombres λ_3 et μ_3 sont arbitraires, et l'un d'eux peut être choisi égal à zéro; la décomposition est possible d'une infinité de manières, mais ζ est déterminé cependant à un facteur constant près.

10. *Sixième cas.* — Le discriminant a une racine triple annulant tous les éléments. Si $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est cette racine, la forme $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi$ est identiquement nulle; choisissons deux nombres quelconques λ_3 et μ_3 tels que $\Delta_1 = \lambda_1 \mu_3 - \mu_1 \lambda_3$ ne soit pas nul et que la forme $\mu_3 f + \lambda_3 \varphi$ ne soit pas identiquement nulle; nous pouvons décomposer cette forme en une somme de trois carrés par les méthodes connues, et poser

$$\mu_3 f + \lambda_3 \varphi = -\varepsilon_1 x'^2 - \varepsilon_2 y'^2 - \varepsilon_3 z'^2,$$

avec

$$\mu_1 f + \lambda_1 \varphi = 0;$$

nous aurons la réduction simultanée

$$(17) \qquad \begin{cases} f = -\dfrac{\varepsilon_1 \lambda_1 x'^2}{\Delta_1} - \dfrac{\varepsilon_2 \lambda_1 y'^2}{\Delta_1} - \dfrac{\varepsilon_3 \lambda_1 z'^2}{\Delta_1}, \\[2mm] \varphi = \dfrac{\varepsilon_1 \mu_1 x'^2}{\Delta_1} + \dfrac{\varepsilon_2 \mu_1 y'^2}{\Delta_1} + \dfrac{\varepsilon_3 \mu_1 z'^2}{\Delta_1}. \end{cases}$$

Les formes x', y', z' sont indépendantes, et nous obtenons bien une réduction simultanée de f et φ en une somme de trois carrés; on peut la remplacer par la suivante :

$$(17') \qquad \begin{cases} f = -\lambda_1 \xi^2 - \lambda_1 \eta^2 - \lambda_1 \zeta^2, \\ \varphi = \mu_1 \xi^2 + \mu_1 \eta^2 + \mu_1 \zeta^2, \end{cases}$$

et elle est possible d'une infinité de manières.

11. Considérons maintenant le cas, que nous avons réservé, où le discriminant $\Delta(\lambda, \mu)$ est identiquement nul; si ses mineurs le sont également sans que les formes données se réduisent identiquement à zéro, chacune d'elles se réduit à un seul carré. Dans le cas

contraire, considérons deux nombres quelconques λ_1, μ_1 n'annulant pas tous les mineurs de $\Delta(\lambda, \mu)$; la forme $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi$ est réductible à la somme de deux carrés, et nous l'écrirons sous la forme du produit de deux formes linéaires, en posant

$$\mu_1 f + \lambda_1 \varphi = 2y'z';$$

y', z' et l'une des variables x, y, z, soit x, pour fixer les idées, constituent des formes linéaires indépendantes au moyen desquelles nous pouvons évaluer toute forme quadratique telle que $\mu_2 f + \lambda_2 \varphi$, λ_2 et μ_2 étant choisis de façon que $\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2$ ne soit pas nul; soit

$$\begin{aligned}&\varphi_2(x, y', z')\\ &\quad = a_2 x^2 + a'_2 y'^2 + a''_2 z'^2 + 2 b_2 y'z' + 2 b'_2 z'x + 2 b''_2 xy',\end{aligned}$$

ce que devient cette dernière forme après la substitution que nous indiquons; le discriminant de

$$\mu' 2y'z' + \lambda' \varphi_2(x, y', z')$$

qui est

$$\begin{vmatrix} \lambda' a_2 & \lambda' b''_2 & \lambda' b'_2 \\ \lambda' b''_2 & \lambda' a'_2 & \mu' + \lambda' b_2 \\ \lambda' b'_2 & \mu' + \lambda' b_2 & \lambda' a''_2 \end{vmatrix},$$

doit être identiquement nul, comme $\Delta(\lambda, \mu)$; on doit donc avoir

$$a_2 = 0, \qquad b'_2 b''_2 = 0, \qquad a'_2 b'^2_2 + a''_2 b''^2_2 = 0,$$

d'où les trois hypothèses suivantes :

1° $a_2 = b'_2 = a''_2 = 0$; alors on a

$$\mu_2 f + \lambda_2 \varphi = y'(a'_2 y' + 2 b_2 z' + 2 b''_2 x),$$

et cette forme est décomposable en un produit de deux facteurs dont l'un est y';

2° $a_2 = b''_2 = a'_2 = 0$; on a de même

$$\mu_2 f + \lambda_2 \varphi = z'(a''_2 z' + 2 b_2 y' + 2 b'_2 x),$$

de sorte que cette forme renferme z' comme facteur;

3° $a_2 = b'_2 = b''_2 = 0$; dans ce cas, $\mu_2 f + \lambda_2 \varphi$ se réduit à

$$\mu_2 f + \lambda_2 \varphi = a'_2 y'^2 + a''_2 z'^2 + 2 b_2 y' z',$$

et ne renferme plus que les variables y' et z'; en résumé, les formes $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi$ et $\mu_2 f + \lambda_2 \varphi$, par suite f et φ ou bien sont décomposables en un produit de deux facteurs avec un facteur commun, ou bien se réduisent à des formes quadratiques de deux variables seulement; dans ce dernier cas, leur réduction simultanée à des formes canoniques est un problème analogue à celui que nous avons traité, mais avec deux variables au lieu de trois.

12. En laissant de côté le cas exceptionnel que nous venons de mentionner, nous voyons que la réduction simultanée des formes f et φ est donnée, dans chacun des cas étudiés, par les formules suivantes :

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{I}) & f = -\lambda_1 \xi^2 - \lambda_2 \eta^2 - \lambda_3 \zeta^2, & \varphi = \mu_1 \xi^2 + \mu_2 \eta^2 + \mu_3 \zeta^2, \\
(\mathrm{II}) & f = -2\lambda_1 \xi\eta - \lambda_3 (\xi^2 + \zeta^2), & \varphi = 2\mu_1 \xi\eta + \mu_3 (\xi^2 + \zeta^2), \\
(\mathrm{III}) & f = -\lambda_1 (\eta^2 + 2\xi\zeta) - 2\lambda_3 \xi\eta, & \varphi = \mu_1 (\eta^2 + 2\xi\zeta) + 2\mu_3 \xi\eta, \\
(\mathrm{IV}) & f = -\lambda_1 (\xi^2 + \eta^2) - \lambda_3 \zeta^2, & \varphi = \mu_1 (\xi^2 + \eta^2) + \mu_3 \zeta^2, \\
(\mathrm{V}) & f = -\lambda_1 (\xi^2 + 2\eta\zeta) - \lambda_3 \zeta^2, & \varphi = \mu_1 (\xi^2 + 2\eta\zeta) + \mu_3 \zeta^2, \\
(\mathrm{VI}) & f = -\lambda_1 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), & \varphi = \mu_1 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).
\end{array}$$

Cette réduction est générale et s'applique, quelle que soit la nature des coefficients des formes données; lorsqu'ils sont réels, le discriminant est une forme à coefficients réels, et a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées, ou bien trois racines réelles, ce dernier cas se présentant toujours dès que deux ou trois racines sont égales.

Si les trois racines sont réelles, distinctes ou non, nous pouvons toujours choisir pour λ_1, μ_1, λ_2, μ_2, λ_3, μ_3 des nombres réels et diriger les calculs de manière que les formes linéaires x', y', z' aient leurs coefficients réels; la décomposition est alors donnée par les formules (8), (13), (14), (15), (16), (17), et tous les coefficients qui y entrent sont réels.

Si le discriminant a des racines distinctes, dont une réelle et deux imaginaires conjuguées, et si $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est la racine réelle, on peut supposer que les nombres λ_1 et μ_1 sont réels et, dans la formule (8), prendre pour x' une forme linéaire à coefficients réels; les coefficients de x'^2 seront également réels; on peut ensuite choisir λ_3 et μ_3 respectivement conjugués de λ_2 et μ_2, prendre ε_2 et ε_3 égaux à l'unité et diriger le calcul de façon que y' et z' aient des coefficients imaginaires conjugués. De cette manière, f et φ se réduisent au carré d'une forme réelle, affecté d'un coefficient réel, et aux carrés de deux formes imaginaires conjuguées, affectés de coefficients également conjugués. Il est impossible que les imaginaires disparaissent, au cours du calcul, dans les coefficients de y' et de z', car ces formes conjuguées deviendraient identiques, et les fonctions f et φ se réduiraient à deux carrés; il est également impossible de remplacer

$$\frac{\lambda_2 y'^2}{\Delta_2} + \frac{\lambda_3 z'^2}{\Delta_3} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_2 y'^2}{\Delta_2} - \frac{\mu_3 z'^2}{\Delta_3}$$

par la somme des carrés de deux formes réelles, affectés de coefficients réels, car les racines du discriminant seraient toutes trois réelles, contrairement à l'hypothèse.

13. Le cas le plus important que nous mentionnerons est le suivant : les formes f et φ ont leurs coefficients réels, et il existe une forme du faisceau $\mu f + \lambda\varphi$ réductible à la somme des carrés de trois formes linéaires réelles, affectés de coefficients non nuls, réels et de même signe. Supposons, pour fixer les idées, que la forme $\mu_0 f + \lambda_0 \varphi$, où λ_0 et μ_0 sont réels et n'annulent pas $\Delta(\lambda, \mu)$, soit la somme de trois carrés affectés de coefficients positifs; je dis que le discriminant doit satisfaire à l'une des conditions suivantes :

1° S'il a ses racines distinctes, elles sont toutes trois réelles;

2° S'il a une racine double, elle doit annuler les mineurs;

3° S'il a une racine triple, elle doit annuler tous les éléments; autrement dit, on se trouvera placé dans le premier, le quatrième ou le sixième cas, et les éléments de la décomposition seront réels.

Pour le démontrer, nous remarquerons que la forme $\mu_0 f + \lambda_0 \varphi$ est toujours positive et ne peut s'annuler que pour des valeurs nulles attribuées à x, y, z, et nous montrerons qu'une hypothèse faite sur le discriminant, différente de celles que nous avons mentionnées, conduit à des conséquences inadmissibles.

Si nous supposons que les racines soient distinctes, que l'une soit réelle et les deux autres imaginaires, nous pouvons, en partant des formules (8), mettre $\mu_0 f + \lambda_0 \varphi$ sous la forme suivante :

$$\mu_0 f + \lambda_0 \varphi = \varepsilon_1 X^2 + Y^2 + Z^2,$$

où X est une forme réelle, Y et Z deux formes imaginaires conjuguées; si l'on pose

$$Y = Y_1 + i Y_2, \qquad Z = Y_1 - i Y_2,$$

on a

$$\mu_0 f + \lambda_0 \varphi = \varepsilon_1 X^2 + 2(Y_1 + Y_2)(Y_1 - Y_2),$$

et le second membre s'annule pour toutes les valeurs de x, y, z satisfaisant aux équations $X = 0$, $Y_1 + Y_2 = 0$, valeurs qui ne sont pas toutes nulles, et cela est impossible.

Si nous nous plaçons dans le deuxième cas de réduction, nous pouvons, en partant des formules (13), écrire

$$\mu_0 f + \lambda_0 \varphi = \varepsilon_1 X^2 + 2XY + \varepsilon_3 Z^2,$$

où X, Y, Z sont des formes réelles; le second membre s'annule pour les valeurs non toutes nulles de x, y, z, déduites des équations $X = 0$, $Z = 0$. De la même manière, on aurait, dans le troisième cas de réduction, en partant des formules (14),

$$\mu_0 f + \lambda_0 \varphi = 2XY + \varepsilon_1 (Y^2 + 2XZ),$$

et le second membre s'annulerait pour les valeurs satisfaisant aux équations $X = 0$, $Y = 0$. Enfin, dans le cinquième cas, les formules (16) conduiraient à la réduction suivante :

$$\mu_0 f + \lambda_0 \varphi = \varepsilon_1 X^2 + 2XY + \varepsilon_3 Z^2,$$

et le second membre s'annulerait encore en posant $X = 0$, $Z = 0$; la proposition se trouve ainsi démontrée.

En supposant, par exemple, que l'une des formes données soit

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2,$$

on retrouve, de cette manière, toutes les propriétés des racines de l'équation en S.

14. Les considérations qui précèdent s'appliquent à la recherche des points communs à deux coniques; si, par rapport à un même triangle de référence, les équations de ces courbes sont $f = 0$, $\varphi = 0$, nous pouvons faire la transformation de coordonnées qui permet de les ramener aux formes les plus simples, et rapporter les deux courbes au triangle de référence dont les côtés ont pour équations $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ ou, ce qui revient au même, $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, x'. y', z' ayant les valeurs que nous avons données dans chacun des cas; nous allons reprendre successivement les six hypothèses que nous avons examinées, et retrouver les résultats classiques connus.

I. Les équations des coniques se ramènent à la forme

$$-f = \frac{\varepsilon_1 \lambda_1 x'^2}{\Delta_1} + \frac{\varepsilon_2 \lambda_2 y'^2}{\Delta_2} + \frac{\varepsilon_3 \lambda_3 z'^2}{\Delta_3} = 0,$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon_1 \mu_1 x'^2}{\Delta_1} + \frac{\varepsilon_2 \mu_2 y'^2}{\Delta_2} + \frac{\varepsilon_3 \mu_3 z'^2}{\Delta_3} = 0.$$

Si l'on remarque que l'on a

$$\Delta_1(\lambda_2 \mu_3 - \mu_2 \lambda_3) = \Delta_2(\lambda_3 \mu_1 - \mu_3 \lambda_1) = \Delta_3(\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2),$$

on voit que les coordonnées des points communs sont fournies par les équations

$$\varepsilon_1 x'^2 = \varepsilon_2 y'^2 = \varepsilon_3 z'^2;$$

il existe ainsi quatre points communs formant un quadrangle complet dont le triangle diagonal est le triangle de référence; ce triangle est en même temps conjugué par rapport aux deux coniques, et les équations des couples de sécantes communes, qui sont respectivement

$$\mu_1 f + \lambda_1 \varphi = 0, \qquad \mu_2 f + \lambda_2 \varphi = 0, \qquad \mu_3 f + \lambda_3 \varphi = 0,$$

deviennent

$$\varepsilon_2 y'^2 - \varepsilon_3 z'^2 = 0, \qquad \varepsilon_3 z'^2 - \varepsilon_1 x'^2 = 0, \qquad \varepsilon_1 x'^2 - \varepsilon_2 y'^2 = 0.$$

Si les coefficients de f et φ sont réels, et si le discriminant a ses racines réelles, le triangle conjugué est réel; les quatre points communs sont réels lorsque ε_1, ε_2, ε_3 sont de même signe, imaginaires dans le cas contraire. Si le discriminant n'a qu'une racine réelle, on peut poser $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, prendre pour x' une forme réelle, et pour y' et z' deux formes imaginaires conjuguées $y' = y'_1 + iz'_1$, $z' = y'_1 - iz'_1$; le triangle de référence a un côté réel et les deux autres imaginaires conjugués se coupant en un sommet réel, mais on peut le remplacer au besoin par celui dont les côtés réels ont pour équations

$$x' = 0, \qquad y'_1 = 0, \qquad z'_1 = 0.$$

Les coniques ont alors deux points communs réels tels que l'on ait

$$z'_1 = 0, \qquad x' = \pm y'_1,$$

et deux points communs imaginaires donnés par les équations

$$y'_1 = 0, \qquad x' = \pm iz'_1.$$

15. II. Les formules (13) montrent que les équations des coniques se ramènent à la forme

$$f = \lambda_3 x'^2 + 2\lambda_1 x'y' + \varepsilon\lambda_3 z'^2 = 0,$$
$$\varphi = \mu_3 x'^2 + 2\mu_1 x'y' + \varepsilon\mu_3 z'^2 = 0;$$

les points communs sont fournis par les équations

$$x'y' = 0, \qquad x'^2 + \varepsilon z'^2 = 0,$$

qui représentent les deux couples de sécantes communes, le second correspondant à la racine double. Les deux coniques ont deux points communs confondus à l'intersection du côté $z' = 0$ et de la droite $x' = 0$, qui est tangente commune aux deux courbes en ce point : les deux autres points sont distincts et sont fournis par $y' = 0$, $x'^2 + \varepsilon z'^2 = 0$; ils sont réels ou imaginaires suivant que ε est négatif ou positif. Les deux coniques sont tangentes en un point et le triangle de référence est formé de la tangente commune au point de contact, de la sécante passant par les points simples, et de la droite conjuguée harmonique de la tangente par rapport au couple de sécantes correspondant à la racine double.

III. Les formules (14) donnent pour équations réduites des coniques

$$-f = 2\lambda_3 x'y' + \lambda_1(y'^2 + 2x'z') = 0,$$
$$\varphi = 2\mu_3 x'y' - \mu_1(y'^2 + 2x'z') = 0;$$

les points communs sont donnés par les équations

$$x'y' = 0, \qquad y'^2 + 2x'z' = 0,$$

dont la première est celle du couple de sécantes unique $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi = 0$; elles donnent un point double $x' = 0$, $y' = 0$ et deux autres points simples $y' = 0$, $x' = 0$ et $y' = 0$, $z' = 0$; les coniques ont ainsi trois points communs confondus au sommet $x' = 0$, $y' = 0$, la droite $x' = 0$ étant la tangente commune; le triangle de référence est formé de la tangente au point triple, de la sécante joignant ce point au quatrième point commun, et d'une droite particulière passant par ce point, variable avec le choix que l'on fait de λ_3 et μ_3.

IV. Les formules (15) donnent pour équations réduites

$$-f = \lambda_1(\varepsilon_1 x'^2 + \varepsilon_2 y'^2) + \varepsilon_3 \lambda_3 z'^2 = 0,$$
$$\varphi = \mu_1(\varepsilon_1 x'^2 + \varepsilon_2 y'^2) + \varepsilon_3 \mu_3 z'^2 = 0;$$

les points communs sont donnés par les équations

$$z'^2 = 0, \qquad \varepsilon_1 x'^2 + \varepsilon_2 y'^2 = 0,$$

qui représentent les couples de sécantes communes; les coniques ont deux points doubles communs sur la droite $z' = 0$, réels ou imaginaires suivant que ε_1 et ε_2 sont de signes différents ou de même signe. Les coniques sont bitangentes et le triangle de référence, qui est conjugué commun par rapport aux deux coniques, est formé de la corde des contacts $z' = 0$ et de deux droites arbitraires conjuguées harmoniques par rapport aux sécantes correspondant à la racine simple.

V. Les formules (16) donnent des équations réduites de la forme

$$-f = \lambda_1 (x'^2 + 2y'z') + \varepsilon\lambda_3 z'^2 = 0,$$
$$\varphi = \mu_1 (x'^2 + 2y'z') + \varepsilon\mu_3 z'^2 = 0,$$

de sorte que les points communs sont fournis par les équations

$$z'^2 = 0, \qquad x'^2 + 2y'z' = 0,$$

dont la première représente le couple unique de sécantes communes $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi = 0$; les coniques ont quatre points confondus au sommet $x' = 0$, $z' = 0$, et ont en ce point même tangente, la droite $z' = 0$. Le triangle de référence est formé de la tangente commune, d'une droite passant par le point commun et d'un dernier côté passant par le pôle de la droite précédente.

VI. Les deux coniques sont confondues et ont tous leurs points communs.

Dans le cas où le discriminant $\Delta(\lambda, \mu)$ est identiquement nul, les deux coniques sont chacune un couple de droites, elles ont une droite commune ou bien les quatre droites passent toutes par le même point.

16. Nous terminerons par la remarque suivante relative aux triangles conjugués communs par rapport à deux coniques : s'il existe un tel triangle et si on le prend comme triangle de référence, les équations des

deux courbes doivent être de la forme

$$l_1\, x'^2 + l_2\, y'^2 + l_3\, z'^2 = 0,$$
$$m_1 x'^2 + m_2 y'^2 + m_3 z'^2 = 0;$$

il faut donc, comme nous l'avons vu au n° 3, que les diviseurs élémentaires du discriminant soient du premier degré, c'est-à-dire que les coniques aient quatre points communs distincts, ou soient bitangentes, ou soient confondues; nous avons vu que ces conditions sont suffisantes; dans le premier cas, il n'existe qu'un seul triangle répondant à la question, c'est le triangle diagonal du quadrangle des quatre points communs; dans le second, il y a une infinité de triangles conjugués ayant un côté et un sommet commun, la corde des contacts et le pôle de cette corde; dans le troisième cas, tout triangle conjugué par rapport à l'une des coniques est un triangle conjugué commun.