Nouvelles annales de mathématiques

Agrégation des sciences mathématiques. Concours de 1896

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 382-386

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__382_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1896.

Mathématiques élémentaires.

On considère une sphère variable Σ orthogonale à une sphère fixe S et tangente à une autre sphère fixe S_1.

1° Lorsque la sphère Σ est assujettie à la condition d'avoir son centre dans un plan P, le lieu du point de contact de Σ et de S_1 est un cercle.

Démontrer que, si le plan P est tangent à la sphère S, le lieu du centre de la sphère Σ est une section conique ayant pour foyer le point de contact de S et de P.

Examiner le cas où le plan P est tangent à la sphère S en un point du cercle d'intersection de S et de S_1.

2° On peut déterminer sur la ligne des centres de S et de S_1 un point f tel que la sphère Σ_0 concentrique à Σ et passant par f reste toujours, quand Σ varie, tangente à une sphère fixe D ayant pour centre le point f_1, centre de S_1.

3° Soient m le centre de Σ_0 et m' le point de contact de Σ_0 et de D. Lorsque le point m' décrit un cercle de D, le point m reste dans un plan et décrit, dans ce plan, une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

Discuter, en supposant que le plan du cercle considéré sur D se déplace parallèlement à lui-même.

4° Soit T le plan perpendiculaire au milieu du segment qui joint le point f à un point m' pris sur la sphère D; lorsque le plan T passe par un point fixe q, le lieu du point m' est un cercle γ_q.

Si le point q vient à se déplacer dans un plan fixe, le cercle γ_q reste orthogonal à un cercle fixe de la sphère D. Examiner le cas où le point q décrit une droite fixe.

5° Soit c le milieu de ff_1, prouver que les droites cm et fm' se coupent en un point qui demeure dans un plan fixe lorsqu'on fait varier la sphère Σ_0.

Mathématiques spéciales.

Étant donnés, en coordonnées rectangulaires, l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

et la sphère concentrique

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0,$$

on prend les plans polaires d'un même point M par rapport à ces deux surfaces. Ces plans se coupent suivant une droite Δ.

1° On demande quel lieu Σ engendre la droite Δ quand le point M décrit une droite quelconque D de l'espace.

2° Quel lieu doit décrire le point M pour que la droite Δ passe par un point fixe P? Quel est le degré du cône décrit par la droite Δ?

3° On demande quelle relation géométrique doit exister entre deux points M, M' pour que les droites correspondantes Δ, Δ' se coupent.

4° Quel lieu Γ doit décrire le point M pour que la droite Δ demeure dans un plan fixe Π,

$$ux+vy+wz+p=0.$$

Les coordonnées du point M s'expriment alors rationnellement en fonction d'un paramètre.

Trouver l'enveloppe E de la droite Δ dans le plan Π.

5° Quel est le lieu de cette enveloppe quand le plan Π se meut parallèlement à lui-même?

6° D'après la 4e partie, à tout plan Π se trouve attachée une ligne Γ, qui est le lieu des points pour lesquels la droite Δ correspondante se trouve dans le plan Π et, dans ce plan, ces droites Δ enveloppent une certaine courbe E. On suppose maintenant qu'un point M décrive le plan Π : montrer que la droite Δ correspondante s'appuie constamment en deux points sur la ligne Γ et que, réciproquement, toute corde de Γ correspond à un point M du plan Π.

7° Quel lieu décrit Δ quand le point M se déplace sur une tangente de la ligne E, ou bien quand le point M se meut sur la ligne E elle-même?

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On considère la courbe définie en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation

$$(x^2+y^2)^2-7y^2-ax^2-2x-a+3=0,$$

où a désigne une constante.

I. La constante a étant supposée quelconque :

1° Déterminer le genre de la courbe;

2° Écrire à l'aide du théorème d'Abel les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la courbe soient en ligne droite;

3° Écrire, à l'aide du même théorème, la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de la courbe soient sur un cercle;

4° Conclure de cette dernière condition le nombre des sommets de la courbe, un sommet étant, par définition, un point où le cercle osculateur a un contact du troisième ordre avec la courbe;

5° Conclure de la même condition le nombre des systèmes de cercles bitangents à la courbe;

6° Déterminer le nombre des cercles osculateurs qu'on peut mener à la courbe par un point pris sur la courbe et étudier la disposition des points de contact de ces cercles;

7° On mène en un point M_1 le cercle osculateur à la courbe : ce cercle coupe la courbe en un point M_2; en M_2 on mène le cercle osculateur qui coupe la courbe en un point M_3, ... et ainsi de suite: en M_n on mène le cercle osculateur qui coupe la courbe en M_{n+1}; de combien de manières peut-on choisir la position du point M_1 de telle façon que M_{n+1} coïncide avec M_1; application à $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 6$.

II. On donne à a la valeur 1. Démontrer que le genre s'abaisse et reprendre pour ce cas les questions précédentes, en exprimant les coordonnées d'un point de la courbe en fonctions rationnelles d'un paramètre. Déterminer, dans ce cas particulier, les paramètres des points de contact des tangentes doubles.

Mécanique rationnelle.

Dans un plan vertical est fixé un disque circulaire A dont la circonférence est dépolie.

I. Un point pesant P est placé sans vitesse initiale sur la circonférence du disque A, dans le voisinage du point le plus haut du disque A :

1° On demande de déterminer l'angle minimum α que doit faire le rayon qui passe par le point P avec la verticale dirigée vers le haut pour que le point P cesse d'être en équilibre; 2° si le point P est placé sur le disque sans vitesse initiale de manière que le rayon qui passe par le point P fasse avec la verticale un angle un peu plus grand que α, le point P glisse d'abord sur le disque, puis quitte le disque. On demande de former l'équation qui donne l'angle de la verticale avec le rayon qui passe par P, lorsque ce point P se détache du disque pour tomber librement.

II. Sur le disque circulaire A, dans le plan de ce disque, on place un deuxième disque circulaire pesant B qui est homogène et dont le rayon est égal à la moitié du rayon du disque A. La circonférence de B est dépolie, en sorte que les deux disques frottent l'un sur l'autre; on néglige la résistance au roulement.

A l'origine le disque B est sans vitesse et le rayon du disque A aboutissant au point de contact des deux disques fait avec la verticale ascendante un angle aigu β.

Entre quelles limites doit être compris β pour que le disque B roule d'abord sans glisser sur le disque A?

En admettant que le disque B commence par rouler, étudier son mouvement et former les équations qui donnent : 1° l'angle que fait avec la verticale ascendante le rayon de A qui passe par le centre de B à l'instant où cesse le roulement simple sans glissement; 2° l'angle analogue à l'instant où le disque B se détache de A.

Dans les deux questions, on désignera par f le coefficient du frottement de glissement.