NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. GUTZMER

Remarque sur la formule thêta de Jacobi

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 365-369

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__365_1>

[F1d]

REMARQUE SUR LA FORMULE THÊTA DE JACOBI [1];

PAR M. A. GUTZMER,

Professeur à l'Université de Halle.

(Traduit, avec l'autorisation de l'auteur, par M. L. LAUGEL.)

L'étude de Kronecker [2] *Sur l'époque et sur le mode d'origine des formules thêta de Jacobi* a de nouveau attiré l'attention sur la relation qui a lieu entre les produits de quatre fonctions thêta, relation que Jacobi a prise pour principe de base de la Théorie des fonctions elliptiques dans son Cours de Königsberg [3]. Il ne me

(1) *Journal de Crelle,* t. CX, Cahier 3.

(2) *Crelle*, t. 108, p. 325. *Sitzungberichte der Berlin. Acad.*, 1891.

(3) JACOBI, *Œuvres,* t. I, p. 497-538.

semble donc pas superflu de communiquer, dans ce qui suit, une démonstration simple de la formule en question à laquelle j'ai été conduit, depuis assez longtemps, par les Leçons de M. Fuchs et par une communication orale de ce géomètre, démonstration qui présente une déduction de la relation entre les thêta conforme à la nature des choses.

Prenons comme point de départ cette remarque que la relation de Jacobi, qui se présente dans la notation employée par Kronecker [1] sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} T_2(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) + T_3(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \\ \quad = T_2(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3) + T_3(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$T_h(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \vartheta_h(\zeta_0 + \zeta_1)\,\vartheta_h(\zeta_0 - \zeta_1)\,\vartheta_h(\zeta_2 + \zeta_3)\,\vartheta_h(\zeta_2 - \zeta_3),$$

peut être représentée comme une relation entre fonctions thêta du second ordre. On sait [2] que, par fonction ϑ d'ordre k, on entend une fonction qui satisfait aux relations fonctionnelles

$$\Phi(\zeta + 1) = \Phi(\zeta),$$
$$\Phi(\zeta + \tau) = e^{-k\pi i(2\zeta+\tau)}\,\Phi(\zeta).$$

La première de ces équations fournit, comme l'on sait, un développement de la forme

$$\Phi(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{2\pi i m\zeta} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{\frac{\pi i}{k} m^2 \tau + 2\pi i m},$$

---

[1] *Remarques sur les formules thêta de Jacobi* (*Crelle*, t. 102, p. 260).

[2] HERMITE, *Note au Calcul différentiel* de Lacroix (6e édition). HERMITE, *Cours de la Faculté*, lithographié, 4e édition, p. 219. Comparer KÖNIGSBERGER, *Leçons sur la théorie des fonctions elliptiques*; Leipzig, Teubner.

et de la seconde équation fonctionnelle s'ensuit alors pour les coefficients la condition

$$c_{m+k} = c_m,$$

de sorte que en $\Phi(\zeta)$ renferme k constantes arbitraires. De ceci résulte directement qu'entre $k+1$ fonctions de cette nature a lieu une équation linéaire homogène à coefficients constants. La considération de l'intégrale

$$\int \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi(\zeta)} d\zeta,$$

prise le long du contour du parallélogramme des périodes, montre ensuite d'une manière connue ([1]) qu'à l'intérieur dudit parallélogramme, la fonction thêta d'ordre k possède k zéros dont la somme est $\equiv \frac{1}{2}k(1+\tau)$ (modules $1, \tau$).

Entre $k+1$ fonctions thêta d'ordre k aux mêmes périodes ([2]) a lieu par conséquent une équation linéaire homogène, à coefficients constants; il doit donc être possible de tirer de la relation la plus générale de cette nature toutes celles qui restent.

Si nous appliquons ce principe aux fonctions ϑ du second ordre, il est aisé de voir, puisqu'en ce cas la somme des zéros est $\equiv 0$, que la fonction ϑ la plus générale du second ordre est donnée par

$$\vartheta_h(\zeta_0 + \zeta_1)\vartheta_h(\zeta_0 - \zeta_1),$$

lorsque l'on regarde ζ_0 comme la variable indépendante. Toute autre fonction thêta du second ordre (aux mêmes périodes) ne peut en différer que par un facteur con-

---

([1]) HERMITE, *loc. cit.*, p. 223.

([2]) A l'exemple de M. Weber (*Fonctions elliptiques et nombres algébriques*, p. 43), on pourrait, pour abréger, employer la terminologie « fonctions thêta *parentes* ou *alliées* (verwandte) ».

stant. Entre *trois* pareilles fonctions doit avoir lieu une relation linéaire. Cette dernière peut, sans nuire à la *généralité*, s'écrire sous la forme

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & c_1 \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_1)+c_2\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_2) \\ & \qquad + c_3\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_3)=0, \end{aligned} \right.$$

où les grandeurs c_1, c_2, c_3 dépendront de ζ_1, ζ_2, ζ_3.

Si maintenant, dans (2), l'on pose $\zeta_0=\zeta_1$, le premier terme s'évanouit, d'où

$$\frac{c_2}{c_3}=-\frac{\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_3)}{\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_2)},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} c_2 &= \mu\,\vartheta_1(\zeta_3+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_3-\zeta_1), \\ c_3 &= \mu\,\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_2), \end{aligned}$$

de telle sorte que (2) prend la forme

$$\begin{aligned} & \overline{c_1}\,\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_1) \\ & \quad + \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_3+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_3-\zeta_1) \\ & \quad + \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_2)=0; \end{aligned}$$

on obtient la grandeur $\overline{c_1}$ en y faisant $\zeta_0=\zeta_2$, d'où

$$\overline{c_1}=\vartheta_1(\zeta_2+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_2-\zeta_3),$$

et l'on arrive ainsi à la relation

$$\begin{aligned} & \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_2+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_2-\zeta_3) \\ & + \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_3+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_3-\zeta_1) \\ & + \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_2)=0 \end{aligned}$$

qui est précisément l'équation à trois termes pour la fonction sigma de M. Weierstrass (1), écrite ici dans la

(1) *Sitzungberichte der Berlin. Akad.*, 1882, p. 505. *Formeln und Lehrsätze, etc.* herausgegeben von H. A. Schwarz, p. 47, Ouvrage dont une traduction de M. Padé vient de paraître récemment (Paris, Gauthier-Villars et fils). *Voir* aussi Scheibner (*Crelle*, t. 102, p. 255).

notation des thêta. Or, on sait que de cette formule, par des transformations simples de ζ_0 et ζ_3, et par la réunion des équations ainsi obtenues, l'on peut déduire la relation de Jacobi, de même que de cette dernière on peut inversement déduire la précédente formule. L'on a en même temps, par conséquent, aussi démontré la relation (1) de Jacobi à l'aide du principe en question, ce qui était notre but.

Dans un Travail suivant, il sera montré comment le principe très simple dont il a été fait usage ici peut servir à établir les relations qui ont lieu entre les fonctions thêta à plusieurs variables.