Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 339-344

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__339_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1707.

(1896, p. 55).

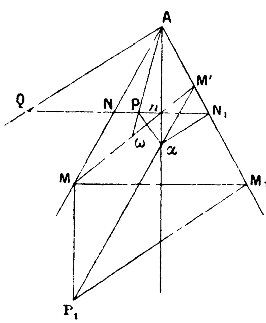
Les courbes (M) *et* (M′) *sont caustiques réciproques par rapport à la courbe* (A), *c'est-à-dire que les tangentes* MA *et* M′A *aux courbes* (M) *et* (M′) *font des angles égaux avec la normale* Aα *en* A *à la courbe* (A), α *étant le centre de* *courbure correspondant. La perpendiculaire abaissée de* M *sur* $A\alpha$ *coupe* AM' *en* M_1. *Démontrer que la perpendiculaire élevée en* M *à* MM_1 *et la perpendiculaire élevée en* M_1 *à* AM_1 *se coupent sur la droite* $\alpha M'$, *ce qui permet de construire le point* M' *lorsque* M *et* α *sont connus.*

COROLLAIRE. — *Si la courbe* (A) *est une conique de foyers* M *et* M', *ce théorème fait connaître le centre de courbure* α *répondant au point* A *de la conique.* (M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. E. DUPORCQ.

Si l'on remplace la courbe (A) par une autre courbe osculatrice à la première au point A, le point M' ne changera évi-



demment pas sur la droite AM' : en choisissant comme courbe (A) la conique de foyer M qui passe par A et admet α comme centre de courbure correspondant, on voit que la démonstration de la question revient à celle du corollaire qui en termine l'énoncé.

Soit donc P_1 le point où se coupent la perpendiculaire élevée en M à MM_1 et la perpendiculaire élevée en M_1 à AM_1 : nous voulons montrer que la droite P_1M' et la perpendiculaire $A\alpha$ à MM_1 ont pour point de concours α, le centre de courbure répondant au point A de la conique de foyers M et M' normale en A à $A\alpha$. Soient ω le milieu de MM', n le point où $A\alpha$ coupe MM', enfin N, N_1, P et Q les points où la parallèle à MM_1 menée par n coupe respectivement les droites AM, AM_1, $A\omega$ et la parallèle menée par A à MM'. Les triangles MP_1M_1 et $n\alpha N_1$

étant homothétiques par rapport au point M', on voit que N_1 est la projection de α sur AM_1. D'ailleurs, les points P et Q sont conjugués harmoniques par rapport aux points N et N_1; on a donc

$$\overline{nP}\,\overline{nQ} = \overline{nN}\,\overline{nN_1} = -\overline{nN_1}^2 = \overline{n\alpha}\,\overline{nA}.$$

L'égalité des termes extrêmes montre que P est l'orthocentre du triangle $A\alpha Q$. Par suite, αP est perpendiculaire à MM'. La détermination du point α au moyen des droites ωA, nP et $P\alpha$ est une construction connue du centre de courbure de la conique de centre ω, d'axe MM', normale en A à An. Le théorème en résulte.

Remarque. — La construction du point M' se simplifie ainsi : N étant la projection de α sur AM, et n celle de N sur $A\alpha$, la droite MM' passe par n.

Question 1708.

(1896, p. 55.)

Soit M *le pied de la perpendiculaire abaissée du point fixe* O *sur la tangente en* A *à la courbe* (A). *Le point* M *décrit la podaire* (M) *de la courbe* (A) *pour le point* O. *La perpendiculaire élevée en* O *à* OM *coupe la normale en* A *à la courbe* (A) *au point* m. *On sait que* Mm *est la normale à la podaire* (M).

Soient, en outre, α *et* μ *les centres de courbure des courbes* (A) *et* (M) *répondant aux points* A *et* M.

On a les théorèmes suivants :

I. *Si la perpendiculaire élevée à* OA *au point* O *coupe* $A\alpha$ *au point* B, *et si* MB *coupe* $O\alpha$ *au point* D, *la droite* AD *passe par* μ.

II. *Si la perpendiculaire élevée à* Mm *en* m *coupe* OM *au point* H, *la droite qui joint le point* H *au milieu* I *de* $O\alpha$ *passe par* μ.

III. *Si* J *est le pied de la perpendiculaire abaissée de* α *sur* OM, K *le pied de la perpendiculaire abaissée de* J *sur* Mm, L *le pied de la perpendiculaire abaissée de* K *sur* $A\alpha$, *la droite* OL *passe par* μ.

Le théorème I *a été démontré par M. Husquin de Rhéville dans les* Nouvelles Annales (3^e série, t. IX, p. 142). *J'ai obtenu les théorèmes* II *et* III *par des voies absolument différentes. Je propose ici de déduire ces deux théorèmes du précédent.* (M. D'OCAGNE.)

SOLUTION [1]
par M. E. Duporcq.

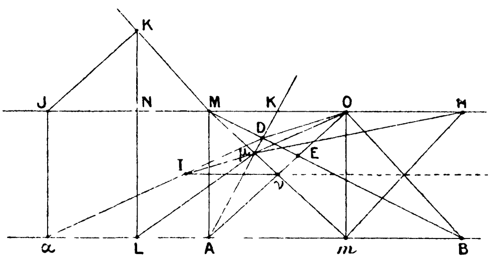
II. Les points μ et α se correspondant de manière que la propriété I soit satisfaite, il s'agit de prouver que le point I, où se coupent OD et $H\mu$, est le milieu de $O\alpha$. Je désigne par ν et E les points d'intersection de OA avec Mm et MB. Évidemment

$$(M\mu\nu m) = (MDEB),$$

d'où

$$H(M\mu\nu m) = O(MDEB).$$

Les rayons HM et OM coïncidant, les intersections des autres rayons conjugués sont en ligne droite : le point I est



donc sur la droite qui joint V au point commun à OB et mH. La propriété à démontrer en résulte.

III. Il s'agit de prouver que le point L, où $O\mu$ coupe AB est la projection de K sur cette droite, ou encore, en désignant par N la projection de K sur MJ, il faut prouver que

$$\frac{LA}{L\alpha} = \frac{NM}{NJ} = \frac{OM}{OH}.$$

Or, soit K le point où AD coupe OM ; on a

$$\frac{LA}{L\alpha} = O(AD\mu K) = M(AD\mu K) = \frac{mA}{mB},$$

C. Q. F. D.

---

[1] La proposition I est déjà démontrée, comme le rappelle l'énoncé de la question.

Question 1718.

(1896, p. 151.)

$f(z)$ désignant un polynome entier en z, on a l'égalité

$$2i\pi[f(x)-f(0)] = \int f'(z) \mathrm{L}z\, dz,$$

$f'(z)$ désignant la dérivée de $f(z)$ et l'intégrale étant prise dans le sens positif le long d'un contour fermé C simple, partant du point x pour y revenir après avoir entouré l'origine O. (C. Bourlet.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Décrivons du point x un lacet dont l'entrée est en x et la boucle un cercle de rayon ε infiniment petit enveloppant l'origine O. L'intégrale prise le long du contour C et du lacet sera nulle, car il n'existe dans le champ ainsi délimité aucun point critique de la fonction $f'(z)\,\mathrm{L}z\,dz$.

Précisons maintenant la valeur de l'intégrale sur chacune des branches de ce parcours. Désignons par A sa valeur prise de x à o dans le sens direct, le long de la branche rectiligne du lacet au-dessus de la droite xO. Le point z, après avoir contourné l'origine, revient en x sur la branche rectiligne inférieure du lacet, dans le sens inverse. Mais après que z a tourné autour de O, $\mathrm{L}z$ a crû de $2\pi i$; donc l'intégrale sur la deuxième branche du lacet sera $-\mathrm{A}-2\pi i\int_x^0 f'(z)\,dz$. Quant à sa valeur I sur le petit cercle, elle est nulle. En effet, en posant $z = \varepsilon e^{\theta i}$, on aura

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} f'(\varepsilon e^{\theta i})(\mathrm{L}\varepsilon + \theta i)\,\varepsilon e^{\theta i} i\, d\theta = 0,$$

car à la limite $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon \mathrm{L}\varepsilon = 0$.

Finalement, on a l'équation

$$0 = \mathrm{A} + \mathrm{I} - \mathrm{A} - 2\pi i \int_x^0 f'(z)\,dz - \int_c f'(z)\,\mathrm{L}z\,dz,$$

d'où

$$\int_c f'(z)\,\mathrm{L}z\,dz = 2\pi i[f(x)-f(0)].$$

Remarque sur la question 1644 [1].

Pour résoudre cette question, il suffisait de dire :

La normale en A rencontre de nouveau la parabole en B. Le diamètre qui passe par le pôle C de AB coupe ce segment en son milieu F. On a alors $\frac{CA}{AF} + 2\frac{CB}{AB}$. Donc, etc.

Z.