F. DUMONT

Sur la représentation de la surface cubique générale sur un plan

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 318-325

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__318_0>

[$M^2 3b$]

SUR LA REPRÉSENTATION DE LA SURFACE CUBIQUE GÉNÉRALE SUR UN PLAN;

PAR M. F. DUMONT,
Professeur au lycée d'Annecy.

Les divers modes de représentation (1, 1) d'une surface sur un plan ont, en général, une assez grande importance, chacun d'eux pouvant devenir, par une transposition convenable des propriétés des lignes du plan représentatif, la source d'un grand nombre de propositions relatives à la surface représentée.

Pour les surfaces cubiques, les deux plus connus sont :

1° Celui dans lequel, la surface étant supposée engendrée à l'aide de trois gerbes de plans deux à deux homographiques, on rapporte corrélativement chacune d'elles à un système plan, de telle sorte qu'à trois plans homologues P_1, P_2, P_3 des trois gerbes, corresponde un même point du plan. Ce point correspond alors à un point unique de la surface, savoir (P_1, P_2, P_3) et réciproquement. (*voir* REYE, *Géométrie de position,* trad. Chemin, p. 208 et suiv.).

2° Celui dans lequel les points correspondants de la surface cubique S et du plan P sont donnés par les intersections de la surface et du plan avec une droite mobile l assujettie à s'appuyer sur deux droites d, d' de la surface, ne se coupant pas (*voir* SALMON, *Géométrie à trois dimensions* (trad. Chemin), 3e Partie, p. 133).

En traduisant ces deux modes par des formules, on s'assure aisément que, si x, y, z, t désignent les coordonnées d'un point de la surface, X, Y, Z les coordonnées homogènes du point correspondant du plan, les formules

$$\frac{x}{P} = \frac{y}{Q} = \frac{z}{R} = \frac{t}{S}, \tag{1}$$

où P, Q, R, S représentent des fonctions homogènes en X, Y, Z, sont du troisième degré dans le premier cas, du quatrième dans le second.

Pour que les formules (1), P, Q, R, S étant du quatrième degré, traduisent une représentation (1, 1) de la surface générale du troisième ordre, il faut que les courbes $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$, aient treize points fixes en commun, afin que les deux courbes

$$\begin{aligned} \alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S &= 0, \\ \alpha' P + \beta' Q + \gamma' R + \delta' S &= 0 \end{aligned}$$

n'aient plus que trois points d'intersection variables, lesquels représenteront alors les trois points d'intersection de la surface avec la droite

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0, \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' t = 0. \end{cases}$$

Il faut de plus que les courbes $\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S = 0$ soient du genre 1 afin de pouvoir représenter les sections planes de la surface, qui sont des cubiques générales. Par suite, $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ doivent avoir en commun deux points doubles. Ces points devant être comptés en tant que points d'intersection, chacun pour quatre points simples, les courbes $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ doivent avoir encore cinq points simples en commun.

Si l'on se reporte au mode de représentation 2°, on voit immédiatement que les deux points doubles communs aux biquadratiques du plan P qui représentent les sections planes de la surface, sont les deux points (d, P) et $d', P)$ et que les cinq points simples sont les cinq points (s_i, P), s_i étant l'une des cinq droites de la surface S coupant à la fois d et d'.

Il existe des modes de représentation (1, 1) de la surface cubique, dans lesquels les fonctions P, Q, R, S sont d'un degré supérieur à 4 et qui, cependant, ont une définition géométrique simple.

Soit n le degré de ces fonctions (supposé > 4). On s'assure aisément que les quatre courbes ne peuvent pas n'avoir que des points simples en commun. Supposons qu'elles aient d points doubles communs ; pour que les deux courbes

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S = 0,$$
$$\alpha' P + \beta' Q + \gamma' R + \delta' S = 0$$

n'aient que trois points d'intersection variables, il faut que P, Q, R, S aient encore en commun $n^2 - 4d - 3$ points simples.

Chaque point double, comptant pour 3, en tant que point servant à la détermination, le degré d'indétermination du système de biquadratiques planes représentant les sections planes de la surface est donné par

$$\frac{n(n+3)}{2} - 3d - (n^2 - 4d - 3),$$

ou

$$d + \frac{3n - n^2 - 6}{2}.$$

Or ces sections planes constituent un système triplement indéterminé (l'équation d'un plan a trois paramètres). Donc, on doit avoir

$$d + \frac{3n - n^2 - 6}{2} = 3,$$

d'où

$$d = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1,$$

résultat qui nous montre que ces biquadratiques seront alors du genre 1.

Si $n = 5$, on a $d = 5$ et le nombre des points simples est $25 - 20 - 3 = 2$.

Si $n \geqq 6$, on a $d \geqq 9$, mais on trouve pour le nombre de points simples un résultat négatif.

C'est qu'en effet, pour $n = 6$, par exemple, les neuf points doubles communs équivalent à trente-six points simples et les biquadratiques ne forment plus un réseau pouvant représenter les sections planes. Ainsi, à partir de $n = 6$, les courbes du plan $P = 0, \ldots$ doivent avoir en commun un ou plusieurs points triples.

Les quatre courbes peuvent déjà, pour le cas $n = 5$, avoir en commun un point triple. En recommençant le raisonnement précédent et tenant compte de ce qu'un point triple équivaut à six simples, en tant que point déterminatif, et à neuf simples, en tant que point d'intersection de deux courbes l'ayant toutes deux pour point triple, on trouve que, si P, Q, R, S sont des quintiques ayant en commun un point triple, elles doivent avoir encore en commun cinq points simples.

On a un exemple de représentation de ce genre, si l'on imagine une droite mobile l s'appuyant sur une conique C de la surface et une droite d de cette surface, coupant la conique. Les intersections de l avec la surface S et le plan P ont évidemment une correspondance (1, 1).

Soit s la droite de la surface située dans le plan de C. Le double [1] (d, s) de la surface S a cinq sécantes com-

[1] Système de deux droites non situées dans un même plan.

plètes (c'est-à-dire coupant à la fois d et s), donc les cinq autres sécantes à d, situées sur la surface, coupent la conique C, puisqu'elles coupent nécessairement la section plane (C, s).

Les pieds de ces cinq droites sur le plan P représentent chacun tous les points d'une droite de la surface. Par suite, toute courbe du plan P représentant une section plane de S passe par ces cinq points qui en sont, d'ailleurs, des points simples.

Soient A et B les points (C, P) et I le point (d, P); toute courbe représentative d'une section plane aura A et B pour point double, I pour point triple. En effet, soit Π le plan d'une section plane (Π). La droite d'intersection des plans Π et (A, d) coupe la section (Π) en trois points, dont l'un est le point (Π, d); les deux autres M_1 et M_2 sont des points de la courbe, qui sont tous les deux représentés par A, et les points voisins de M_1 et M_2 sur la section (Π) fournissent les deux branches de la courbe représentative qui passent par A.

Considérons maintenant le cône de sommet I et ayant (C) pour directrice. Son intersection avec le plan Π est une conique rencontrant la section (Π) en six points, dont trois sont les points (d, Π) et $[(C), (\Pi)]$. Les trois autres sont des points de la cubique plane représentés par I et les points voisins de ces trois points sur (Π) fournissent sur la courbe représentative trois branches passant par I.

On voit aisément qu'il n'y a pas d'autres points multiples sur cette courbe. Elle est donc du genre

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 2 - 3$$

(le point triple équivaut à trois doubles).

Or ce genre est égal à celui de (Π), c'est-à-dire est 1.

On a donc

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 6$$

ou

$$n^2 - 3n - 10 = 0,$$

d'où

$$n = 5.$$

Ainsi les fonctions P, Q, R, S seraient du cinquième degré; mais les quatre courbes, au lieu d'avoir deux points simples en commun, comme dans le cas où elles ont cinq points doubles et aucun point triple, ont ici cinq points communs simples, deux doubles et un triple.

Il a déjà été dit que, si $n \gtreqless 6$, il est nécessaire que les nombres P, Q, R, S aient en commun des points triples. Supposons qu'elles en aient t et de plus d points doubles. Il faut alors qu'elles aient encore en commun

$$n^2 - 9t - 4d - 3$$

points simples.

Le degré d'indétermination est alors

$$\frac{n(n+3)}{2} - 6t - 3d - (n^2 - 9t - 4d - 3)$$

ou

$$d + 3t + \frac{3n - n^2 + 6}{2}.$$

Pour qu'il soit 3, on doit avoir

$$d + 3t = \frac{n^2 - 3n}{2}.$$

Supposons alors $n = 6$, on a

$$d + 3t = 9,$$

et alors, suivant que l'on aura $t = 1$, 2 ou 3, on aura $d = 6$, 3 ou 0, et il faudra, en outre, un nombre de points simples égal à 0, 3 ou 6.

On a un exemple de ce dernier cas dans le mode de représentation dans lequel, une droite l mobile étant assujettie à rester constamment corde d'une cubique gauche Γ de la surface S, on fait correspondre le point (l, P), P étant le plan de la représentation avec le troisième point d'intersection de l avec la surface.

Cette représentation est évidemment de l'espèce $(1,1)$, puisque d'un point de l'espace passe une seule corde de Γ.

On sait qu'il y a sur la surface six sécantes doubles (ou cordes) de la cubique. L'intersection de chacune avec le plan P représente la sécante entière et par suite, les six intersections sont des points communs à toutes les courbes de P représentant des sections planes.

Chacun des trois points (Γ, P) est un point triple de toutes ces courbes représentatives. En effet, soit I l'un d'eux, considérons le cône quadratique de sommet I, ayant Γ pour directrice. La conique suivant laquelle il rencontre le plan Π d'une section (Π) a six points d'intersection avec (Π). Trois de ces points sont sur la cubique gauche Γ; les trois autres A, B, C fournissent chacun une branche de courbe passant par I, chacun d'eux étant représenté par ce point.

Les courbes représentatives n'ont d'ailleurs pas d'autres points multiples. Ainsi, leur genre est

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 3 \times 3.$$

Il est égal à celui de (Π), c'est-à-dire égal à 1. On a donc

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 10$$

ou

$$n^2 - 3n - 18 = 0,$$

d'où l'on tire $n = 6$.

Les fonctions P, Q, R, S sont donc bien du sixième ordre et l'on est dans le cas où les quatre courbes ont en commun trois points triples, o double et six points simples.