Nouvelles annales de mathématiques

Licence ès sciences mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 29-55

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__29_0>

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE JUILLET 1895. — COMPOSITIONS.

Paris.

Analyse. — I. *Les points d'un plan étant rapportés à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on donne les relations*

$$(1) \qquad \begin{cases} x = (u + V)\cos v - V'\sin v, \\ y = (u + V)\sin v + V'\cos v, \end{cases}$$

où u *et* v *désignent deux paramètres variables,* V *une fonction de* v, *et* V' *sa dérivée.*

Vérifier que les droites $v =$ const. *sont normales aux courbes* $u =$ const.

Démontrer que, pour obtenir toutes les surfaces dont les lignes de courbure se projettent orthogonalement sur le plan xOy *suivant les droites* $v =$ const. *et suivant les courbes* $u =$ const., *il suffit d'associer aux formules* (1) *une relation de la forme* $z = U$, *où* U *est une fonction arbitraire du seul paramètre* u.

Pour vérifier que les droites $v =$ const. sont normales aux courbes $u =$ const., il suffit de vérifier qu'on a la relation

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

ce qui n'offre aucune difficulté.

Pour obtenir toutes les surfaces dont les projections orthogonales des lignes de courbure sur le plan xOy sont les droites $v =$ const. et les courbes $u =$ const., on observe que les lignes de courbure d'une famille ont leurs tangentes parallèles au plan xOy, et sont, dès lors, dans des plans parallèles au plan xOy. Il en résulte qu'elles se projettent suivant les courbes $u =$ const., et que, le long de chacune de ces courbes, z conserve une valeur constante. On achève alors facilement la solution.

Les surfaces cherchées sont d'ailleurs des *surfaces moulures*.

II. — *Trouver la valeur de l'intégrale*

$$\int z^2 \log \frac{z+1}{z+1}\, dz,$$

prise dans le sens direct le long d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon supérieur à l'unité.

On part des identités

$$\mathrm{D}\left[\frac{z^3}{3}\mathrm{L}(z+1)\right] = z^2\mathrm{L}(z+1) + \frac{z^3}{3(z+1)},$$

$$\mathrm{D}\left[\frac{z^3}{3}\mathrm{L}(z-1)\right] = z^2\mathrm{L}(z-1) + \frac{z^3}{3(z-1)}.$$

On intègre, on retranche membre à membre, et l'on fait décrire au point z le cercle indiqué dans l'énoncé. On trouve ainsi que la valeur de l'intégrale considérée est $\frac{4i\pi}{3}$.

III. — (Élèves de l'École Normale). — *Étudier la surface*

$$\mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^y + \mathrm{C}e^z = \mathrm{D}.$$

1° *Former l'équation des courbes* C *le long desquelles cette surface touche un cylindre circonscrit.*

Montrer que ces courbes se répartissent en une infi-

nité de familles, de telle façon que l'une de ces familles se compose d'une infinité de courbes toutes égales entre elles et semblablement orientées.

2° *Déduire de là que l'on peut, d'une infinité de manières, exprimer les coordonnées d'un point de la surface en fonction de deux paramètres t et u sous la forme suivante :*

$$x = f_1(t) - f_1(u),$$
$$y = f_2(t) + f_2(u),$$
$$z = f_3(t) + f_3(u).$$

3° *Montrer que par chaque point de la surface passent deux courbes C de chaque famille et que les tangentes à ces deux courbes sont des diamètres conjugués de l'indicatrice.*

4° *Démontrer que les lignes asymptotiques ne sont autre chose que les enveloppes des courbes C d'une même famille.*

5° *Montrer que le lieu des milieux des cordes d'une des lignes asymptotiques est la surface elle-même.*

La première partie seule présente quelque difficulté. Pour la résoudre, on observe d'abord qu'en déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes, on peut ramener l'équation de la surface à la forme

$$(1) \qquad e^x + e^y + e^z = 1.$$

Si l'on appelle alors α, β, γ les paramètres directeurs de la direction des génératrices d'un premier cylindre circonscrit, la courbe de contact de ce cylindre est définie par l'équation (1) et par l'équation

$$(2) \qquad \alpha e^x + \beta e^y + \gamma e^z = 0.$$

De même, la courbe de contact d'un second cylindre dont les paramètres directeurs des génératrices sont α', β', γ' est définie par l'équation (1) et par l'équation

$$(3) \qquad \alpha' e^x + \beta' e^y + \gamma' e^z = 0.$$

Pour que les deux courbes soient égales et semblablement orientées, il faut qu'on puisse les faire coïncider en déplaçant l'une d'elles parallèlement à elle-même. Si donc ξ, η, ζ sont trois constantes convenablement choisies, il faut que les deux systèmes

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} e^x + e^y + e^z = 1, \\ \alpha e^x + \beta e^y + \gamma e^z = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} e^{x+\xi} + e^{y+\eta} + e^{z+\zeta} = 1, \\ \alpha' e^{x+\xi} + \beta' e^{y+\eta} + \gamma' e^{z+\zeta} = 0 \end{cases}$$

soient équivalents.

Ces deux systèmes sont linéaires par rapport à e^x, e^y, e^z et, si l'on exprime qu'ils sont équivalents, on obtient, après l'élimination de ξ, η, ζ,

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'};$$

de sorte que si l'on appelle u la valeur commune des trois différences qui figurent dans ces égalités, u_1, u_2, u_3 trois constantes, on a

$$\alpha = \frac{1}{u - u_1}, \qquad \beta = \frac{1}{u + u_2}, \qquad \gamma = \frac{1}{u + u_3}.$$

Il en résulte que les directions qui correspondent à des courbes égales et semblablement orientées sont les génératrices d'un cône du second degré représenté par l'équation

$$(u_2 - u_3) yz + (u_3 - u_1) zx + (u_1 - u_2) xy = 0$$

Comme ce cône dépend de deux constantes arbitraires, on voit qu'il existe deux familles de courbes égales et semblablement orientées.

MÉCANIQUE. — I. *Une barre pesante homogène* AA′ *a ses deux extrémités assujetties à glisser sans frottement sur une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit fixe dont l'axe est vertical. On propose :*

1° *De trouver le mouvement de la barre sur l'hélice et les réactions de la courbe sur les deux extrémités de la barre;*

2° *En considérant le point* C, *situé sur l'axe du cylindre à égale distance de* A *et de* A′, *comme invariablement lié à la barre, de déterminer pour une époque quelconque, dans le plan* ACA′, *le point dont la vitesse est perpendiculaire à ce plan.*

Chaque point de la barre décrit une hélice d'un mouvement uniformément varié, comme on peut le constater aisément par l'application du théorème des forces vives.

Le calcul des réactions se fait en appliquant le théorème du centre de gravité et le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à Oz.

Quant à la détermination du point dont la vitesse est perpendiculaire au plan ACA′, elle est identique à la détermination du *foyer* de ce plan. On trouve qu'il est situé à l'intersection du plan ACA′ et du plan perpendiculaire à AA′ en son milieu, plan qui passe par le point C. Sa distance au point C est $h \cot \alpha$, en appelant h le pas de l'hélice et α l'angle de la barre avec Oz.

II. — (ÉLÈVES DE L'ÉCOLE NORMALE). — *Un corps solide pesant, non homogène, ayant la forme d'un cylindre de révolution, est couché sur un plan hori-*

zontal fixe P, *sur lequel il peut glisser sans frottement. On suppose que le centre de gravité* G *du corps est sur l'axe de révolution* Gz *du cylindre et que cet axe est un axe principal d'inertie relatif au point* G.

Trouver le mouvement du solide supposé lancé sur le plan. On appellera A, B, C *les moments d'inertie du corps par rapport aux axes principaux* Gx, Gy, Gz *relatifs au centre de gravité.*

En vertu des hypothèses, le cylindre est déterminé en position par les coordonnées du centre de gravité et par la direction de l'axe de révolution Gz. En appliquant d'abord le théorème du centre de gravité, on trouve que le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme; en appliquant ensuite le théorème des forces vives, on trouve que le cylindre tourne uniformément autour de la verticale du point G.

III. — (Élèves de l'École Normale). — *Une figure* F *de forme invariable se meut dans l'espace dans les conditions suivantes :*

Un cercle C, *lié invariablement à la figure, roule uniformément sans glisser sur la droite fixe* AB, *tandis que son plan tourne uniformément autour de cette même droite.*

1° *Prouver que tout déplacement infiniment petit de la figure consiste en une rotation* Ω *autour d'un axe* Δ.

2° *Trouver le lieu de cet axe dans le corps.*

3° *Trouver une définition géométrique de la surface décrite dans l'espace fixe par ce même axe.*

4° *Rappeler la démonstration de ce fait que les surfaces ainsi trouvées sont applicables l'une sur l'autre.*

Le lieu de l'axe de rotation dans le corps est un hyperboloïde de révolution dont le cercle de gorge est le cercle C. Dans l'espace fixe le lieu de ce même axe est un *hélicoïde réglé*. L'hyperboloïde roule sans glisser sur l'hélicoïde.

ÉPREUVES PRATIQUES. — I. *Le* 24 *juillet* 1895, *à midi moyen de Paris, les coordonnées écliptiques de Vénus sont :*

Longitude	166° 5′ 6″,0
Latitude	0° 45′ 7″,7

Calculer les coordonnées équatoriales de la planète, l'obliquité de l'écliptique étant 23° 27′ 18″,73.

On devra vérifier l'exactitude des résultats en calculant une relation dans laquelle entrent simultanément toutes les données et les inconnues du problème.

II. — (ÉLÈVES DE L'ÉCOLE NORMALE). — *Le* 2 *juillet* 1895, *à midi moyen de Paris, la planète Mars a pour coordonnées héliocentriques :*

Longitude	152° 56′ 24″,0
Latitude	+ 1° 47′ 37″,7
Log. du rayon vecteur	0,221 6426

Au même moment, les coordonnées du Soleil par rapport au centre de la Terre sont :

Longitude	100° 17′ 42″,25
Latitude	0° 0′ 0
Log distance du Soleil à la Terre	0,007 1905

Calculer les coordonnées géocentriques de la planète.

Besançon.

ANALYSE. — *On donne dans un plan* P *un cercle* O. *On considère un point* M *sur la circonférence de ce cercle, et par* M *une normale* MN *à ce cercle non con-*

tenue dans le plan P. *Soit* φ *l'angle du rayon* OM *avec un rayon fixe et* θ *l'angle de* MN *avec le prolongement de* OM.

Quelle relation doit avoir lieu entre φ *et* θ, *pour que, le point* M *se déplaçant sur la circonférence,* MN *soit normale principale à une courbe gauche? On démontrera d'abord que la longueur interceptée sur* MN *entre la circonférence et la courbe gauche est nécessairement constante. Montrer que le problème se ramène à une quadrature; discuter, et effectuer l'intégration quand elle est possible.*

On exprime que MN est dans le plan osculateur à la courbe gauche en égalant à zéro un certain déterminant. Ce déterminant se simplifie en combinant les colonnes, et l'on obtient une équation de Bernoulli par rapport à $\frac{d\varphi}{d\theta}$ pris comme fonction inconnue.

Après l'intégration de cette équation, φ s'exprime par une intégrale elliptique, dont la discussion est aisée.

MÉCANIQUE. — I. *Exposer le théorème des forces vives pour un point matériel et pour un système de points matériels.*

II. *Un mobile de poids* P *est assujetti à se mouvoir sur un cercle vertical fixe. A ce mobile sont fixés deux fils inextensibles passant sur deux poulies infiniment petites situées aux extrémités* A *et* B *du diamètre horizontal, et supportant deux poids* p *et* q. *Déterminer le mouvement du système.*

On met ce problème en équation à l'aide du théorème des forces vives. Il y a deux cas particuliers remarquables : 1° le poids p est nul et les poids p et q sont égaux. Dans ce cas le point le plus bas du cercle constitue, pour le mobile, une position d'équilibre stable; 2° le poids P est très grand par rapport à p et à q. Dans le voisinage du point le plus bas on a alors une position d'équilibre stable.

III. *Dans un plan vertical une parabole constante tourne autour de son foyer* F. *Un fil enroulé sur la parabole porte un poids* M. *Déterminer la trajectoire du point* M *et sa vitesse quand la parabole tourne d'un mouvement uniforme.*

La trajectoire du point M est une chaînette.

Épreuve pratique. — *Calculer les coordonnées équatoriales* $\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$, R' *du centre de la Lune vue d'un lieu de latitude* $\varphi = 45°28'10''$ *au moment où l'heure sidérale locale est* $5^h 43^m 56^s$ *et où les coordonnées géocentriques de la Lune sont :*

$$\mathcal{A} = 2^h 15^m 49^s, \qquad \mathcal{D} = +10°3'17'',$$

$$R = \frac{1}{\sin\varpi}, \qquad \varpi = 58'17.$$

Caen.

Analyse et Géométrie. — I. *Étant donnés deux axes rectangulaires* OX, OY, *on considère toutes les ellipses qui ont pour axe* OX, *qui passent par un point* B *donné sur* OY *et qui sont semblables à l'ellipse* $3x^2 + y^2 = 1$: *trouver les trajectoires orthogonales de ces ellipses.*

Équation des ellipses :

$$3x^2 + y^2 + 2\alpha x - h^2 = 0 \qquad (\alpha \text{ variable}, h = \text{OB}).$$

Équation des trajectoires :

$$x^2 = \frac{y^3}{C} + y^2 - \frac{h^2}{3}.$$

II. *En désignant par $z = x + iy$ une variable imaginaire, calculer l'intégrale*

$$\int \frac{\sin z \, dz}{z^3(\pi - z)},$$

prise le long du contour représenté par l'équation $x^2 + 2y^2 - 2x - 1 = 0$.

Le contour, elliptique, contient le seul pôle $z = 0$: or

$$\frac{\sin z}{z^3(\pi - z)} = \frac{1}{\pi z^3}\left(z - \frac{z^3}{6} + \ldots\right)\left(1 + \frac{z}{\pi} + \frac{z^2}{\pi^2} + \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{\pi z^2} + \frac{1}{\pi^2 z} + \ldots,$$

l'intégrale est $\frac{2i}{\pi}$, le contour étant parcouru en sens direct.

Mécanique. — I. *Un plan* P *se meut en glissant sur un plan fixe* Q, *de telle sorte que le centre instantané de rotation* C *se déplace avec une vitesse constante* m *sur une droite fixe* OX *du plan* Q *et que le centre des accélérations du plan mobile,* A, *reste à une distance invariable* h *de* OX, *l'angle* ACX *étant droit à l'instant initial. Chercher comment varient avec le temps la vitesse* ω *de rotation du plan* P *et l'angle* ACX. *Déterminer et construire la roulante lieu du centre instantané* C *dans le plan* P.

Des formules qui donnent à un instant les accélérations des points d'un plan mobile, on tire, pour les coordonnées du centre A relatives à la tangente et à la normale communes à la base et à la roulante S,

$$y = -\frac{\omega^3}{\omega^4 + \omega'^2}\frac{ds}{dt}, \qquad \frac{x}{y} = -\frac{\omega'}{\omega^2} = \cot \mathrm{ACX},$$

s étant l'arc parcouru par C sur la base et la roulante S, si $y = h$, $\frac{ds}{dt} = m$, on trouve, après intégration,

$$(1) \quad \frac{1}{\omega} = -\frac{h}{m}\left[1 + m^2\frac{(t-\tau)^2}{4h^2}\right], \qquad \cot \mathrm{ACX} = m\frac{t-\tau}{2h};$$

la constante τ est nulle. Soient ξ, η les coordonnées de C par rapport à des axes $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ du plan P, α l'angle de la tangente à S avec $\Omega\xi$; $d\alpha = -\omega\, dt$; remplaçant ω par sa valeur (1) et s par $\frac{t}{m}$, on a

$$d\alpha = \frac{4h\,ds}{4h^2 + s^2}, \qquad s = 2h \tang\frac{1}{2}\alpha, \qquad ds = \frac{h\,d\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha},$$
$$d\xi = ds\cos\alpha, \qquad d\eta = ds\sin\alpha,$$

l'intégration donne ξ, η en fonction de α.

II. *Chaque élément d'un fil flexible et inextensible est attiré vers un point fixe* O *avec une force proportionnelle à la masse de l'élément et à l'inverse de sa distance au point* O; *on suppose que, lorsque le fil est en équilibre, sa tension en chaque point y est proportionnelle à la densité. Déterminer la figure d'équilibre et la loi suivant laquelle la densité varie le long du fil.*

Courbe funiculaire plane. — Soient T la tension, ε la densité :

$$\mathrm{T} = \lambda\varepsilon, \qquad d\mathrm{T} = k\lambda\varepsilon\frac{dr}{r} = k\,\mathrm{T}\frac{dr}{r}, \qquad \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^k,$$

p étant la distance du pôle O à la tangente, $\mathrm{T}p = \mathrm{T}_0 p_0$

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^k p = \left(\frac{r}{r_0}\right)^k \frac{r^2\,d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2}} = p_0; \qquad r^{k+1} = \frac{p_0 r_0^k}{\cos(k+1)\theta}.$$

Épreuve pratique. — *Calcul de la longitude et de la latitude d'une étoile, étant données* Æ, ⴲ *et l'obliquité de l'écliptique.*

Dijon.

Analyse. — I. *Prouver que la somme d'une série entière est une fonction continue de ses variables dans des cercles concentriques à des cercles de convergence, mais de rayons plus petits.*

II. *Formation et intégration de l'équation aux dérivées partielles des surfaces développables.*

III. *Trouver les trajectoires orthogonales des surfaces ayant pour équation générale en coordonnées rectilignes rectangulaires*

$$Px^\lambda + Qy^\mu + aRz^\nu = 0,$$

où a représente un paramètre variable; examiner les divers cas qui peuvent se présenter suivant les valeurs particulières attribuées aux quantités constantes P, Q, R, λ, μ, ν.

Les équations

$$(1) \qquad X = \varphi(a), \qquad Y = \chi(a), \qquad Z = \psi(a),$$

où a joue maintenant le rôle d'une variable auxiliaire, représenteront une ligne trajectoire des surfaces proposées, si l'on a, quelle que soit a, l'équation finie

$$(2) \qquad PX^\lambda + QY^\mu + aRZ^\nu = 0,$$

et cette trajectoire sera orthogonale, si l'on a les deux équations différentielles

$$(3) \qquad \frac{dX}{da} : \lambda PX^{\lambda-1} = \frac{dY}{da} : \mu QY^{\mu-1} = \frac{dZ}{da} : \nu aRZ^{\nu-1},$$

exprimant l'identité, en direction, de la tangente menée à la ligne (1), au point correspondant à la valeur actuelle de a et de la normale construite en ce même point à celle des surfaces proposées qui y passe.

L'addition terme à terme des rapports égaux (3), multipliés, en haut et en bas, par $\frac{X}{\lambda}$, $\frac{Y}{\mu}$, $\frac{Z}{\nu}$ respectivement, donne, à cause de l'équation (2),

$$\frac{X}{\lambda}\frac{dX}{da}+\frac{Y}{\mu}\frac{dY}{da}+\frac{Z}{\nu}\frac{dZ}{da}=0,$$

d'où l'équation intégrale première

$$\frac{X^2}{\lambda}+\frac{Y^2}{\mu}+\frac{Z^2}{\nu}=C.$$

Une seconde, à adjoindre à celle-ci et à l'équation (2) pour achever la solution du problème, est fournie par l'intégration de la première équation différentielle du groupe (3), intégration s'exécutant immédiatement d'une manière variable avec les valeurs des exposants λ, μ et des coefficients P, Q. Si, par exemple, on a $\lambda=\mu=2$, $P=Q$; cette seconde intégrale est

$$Y=DX,$$

montrant que les trajectoires sont alors des lignes planes dont les plans passent par l'axe des z, etc.

MÉCANIQUE. — I. *Équations d'équilibre du fil flexible; cas où l'on peut former des intégrales premières; cas où l'on prend pour variable indépendante l'une des coordonnées d'un point du fil.*

II. *Un point pesant est lancé verticalement au-dessus du sol avec une vitesse v_0. On demande en quel point il traverse le plan horizontal passant par la position initiale, lorsqu'on tient compte de la rotation de la terre.*

Les axes étant : l'axe des z la verticale dirigée vers le haut, l'axe des x la tangente au méridien dirigée vers le nord; l'axe des y la perpendiculaire au méridien dirigée vers l'est, les équations à appliquer sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\left(\cos\lambda\frac{dx}{dt} - \sin\lambda\frac{dy}{dt}\right),$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt},$$

où ω est la vitesse de rotation de la Terre, λ la colatitude du lieu, l'origine des axes est la position initiale.

On intègre ces équations avec les données initiales

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = v_0,$$

on développe les intégrales suivant les puissances de ω, en se bornant à la première puissance.

Épreuve pratique. — *Connaissant la longitude d'un astre,* 45° 12′ 13″,5, *sa latitude* 0° 23′ 58″,1 *et l'obliquité de l'écliptique* 23° 27′ 10″,4, *calculer son ascension droite et sa déclinaison.*

On trouve

$$Æ = 42^\circ\,36'\,13'',65,$$
$$\delta = 16^\circ\,47'\,7'',7.$$

Nancy.

Analyse. — I. *Étant donnée l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où x désigne une variable réelle et f une fonction réelle, démontrer que, sous certaines conditions que l'on indiquera, il existe une fonction réelle y de x, définie et continue dans le domaine de x_0, satisfaisant *à l'équation différentielle et qui, pour* $x = x_0$, *prend la valeur* y_0. *Montrer, en outre, qu'il n'existe qu'une seule fonction possédant ces propriétés.*

II. *On donne une courbe* C *tracée sur une sphère de centre* O *et de rayon égal à l'unité. Les coordonnées rectangulaires d'un point* M *de cette courbe ont pour expressions*

$$x = \alpha(\nu), \qquad y = \beta(\nu), \qquad z = \gamma(\nu),$$

ν *désignant l'arc de la courbe terminé en* M. *A chaque point* M, *on fait correspondre une droite* D, *passant par* M, *la correspondance étant définie par les équations*

$$a = f(\nu), \qquad b = g(\nu), \qquad c = h(\nu),$$

où a, b, c *sont les cosinus directeurs de* D; *soit* S *la surface réglée engendrée par* D.

1° *Démontrer que la condition nécessaire et suffisante, pour que* C *soit la ligne de striction de* S, *est*

$$da\,d\alpha + db\,d\beta + dc\,d\gamma = 0.$$

2° *On suppose que la droite* D *est située dans le plan tangent mené par* M *au cône de sommet* O *ayant pour directrice* C; *calculer l'angle* ω *ayant, pour côté origine, la direction* OM *et, pour autre côté, la direction de* D.

3° *On applique la surface du cône et ses plans tangents sur un même plan; expliquer comment se développent les droites* D; *déduire de là un mode de génération simple des surfaces* S *dans le cas particulier considéré.*

Menons à chaque génératrice MG de S une parallèle Og par le point O; on forme un cône directeur s, dont la trace sur la sphère est une courbe c; soit m le point de cette courbe situé sur Og.

1° La perpendiculaire commune à une génératrice G et à la génératrice infiniment voisine est perpendiculaire au plan tangent au cône s suivant g, par suite à la tangente en m à la courbe c; pour que C soit la ligne de striction de la surface S, il faut que la perpendiculaire commune considérée soit la tangente en M à C; par suite, les deux tangentes à C et c en des points correspondants doivent être rectangulaires, d'où la condition

$$da\,d\alpha + db\,d\beta + dc\,d\gamma = 0.$$

2° Si, de plus, G se trouve dans le plan tangent au cône de directrice C, c'est que g se trouve aussi dans ce plan, et que m se trouve sur l'arc de grand cercle tan-

Fig. 1

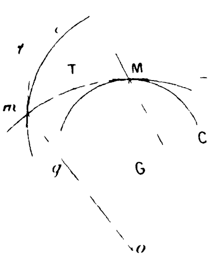
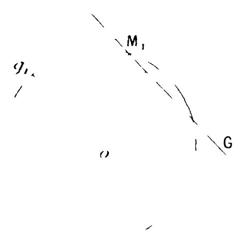


Fig. 2.



gent à C en M; d'après la condition précédente, la tangente mt doit être perpendiculaire à MT, et l'arc du grand cercle Mm doit être normal en m à la courbe c; dès lors la courbe c est une développante de C, et l'arc Mm est égal à l'arc ν de C, compté dans un sens convenable; c'est la valeur de l'angle MOg.

3° Lorsqu'on applique le cône de directrice C sur un plan, la courbe C devient un grand cercle, et les génératrices G se développent suivant des droites parallèles à une droite fixe Og, puisque l'angle OM_1G_1 est égal à l'arc g_1M_1 compté à partir d'un point fixe.

On aura la surface en traçant, dans un plan tangent au cône des droites, M_1G_1 parallèles à une droite fixe, et enroulant le plan considéré sur la surface du cône de directrice C, de façon que les génératrices restent dans les plans tangents successifs.

Les formules ordinaires conduisent au résultat. Si l'on prend

$$\begin{aligned} x &= \alpha + a\rho, \\ y &= \beta + b\rho, \\ z &= \gamma + c\rho, \end{aligned}$$

comme coordonnées d'un point de S, la ligne de striction est définie par

$$\rho = \frac{-\begin{vmatrix} bdc - cdb & a & d\alpha \\ cda - adc & b & d\beta \\ adb - bda & c & d\gamma \end{vmatrix}}{(bdc - cdb)^2 + (cda - adc)^2 + (adb - bda)^2};$$

en annulant le numérateur, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} bdc - cdb & a & d\alpha \\ cda - adc & b & d\beta \\ adb - bda & c & d\gamma \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{c}\begin{vmatrix} bdc - cdb & a & d\alpha \\ cda - adc & b & d\beta \\ 0 & 0 & da\,d\alpha + db\,d\beta + dc\,d\gamma \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

d'après $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, d'où la condition.

Pour la deuxième partie, on a d'abord la condition

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{d\alpha}{d\nu} & \frac{d\beta}{d\nu} & \frac{d\gamma}{d\nu} \end{vmatrix} = 0.$$

puis

$$a\,da + b\,db + c\,dc = 0,$$
$$\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma = 0,$$
$$da\,d\alpha + db\,d\beta + dc\,d\gamma = 0.$$

$$\frac{da}{\begin{vmatrix} b & c \\ d\beta & d\gamma \end{vmatrix}} = \frac{db}{\begin{vmatrix} c & a \\ d\gamma & d\alpha \end{vmatrix}} = \frac{dc}{\begin{vmatrix} a & b \\ d\alpha & d\beta \end{vmatrix}}$$
$$= \frac{\Sigma\alpha\,da}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma\alpha\,da}{0}.$$

D'où

$$\Sigma\alpha\,da = 0.$$

De plus

$$\cos\omega = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$
$$\frac{d\cos\omega}{d\nu} = \Sigma a\frac{d\alpha}{d\nu} + \Sigma\alpha\frac{da}{d\nu} = \Sigma a\frac{d\alpha}{d\nu}.$$

Alors, en formant Δ^2,

$$0 = \Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \dfrac{d\cos\omega}{d\nu} \\ \cos\omega & 1 & 0 \\ \dfrac{d\cos\omega}{d\nu} & 0 & \dfrac{d\nu^2}{d\nu^2} = 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\omega - \left(\frac{d\cos\omega}{d\nu}\right)^2.$$

D'où

$$\frac{d\omega}{d\nu} = \pm 1, \qquad \omega = \gamma \pm \omega_0.$$

Le reste s'en déduit.

Mécanique. — 1° *Un gyroscope est composé: 1° d'un tore homogène* (τ) *pouvant se mouvoir librement autour de son axe; 2° d'un cercle homogène* (c) *situé dans le plan de l'équateur du tore, tangent intérieurement et invariablement lié au tore; 3° d'une tige homogène* AB *formant l'axe du tore, invariablement liée au cercle* (c) *et dont le milieu* O *coïncide avec le centre de gravité commun du tore* (τ) *et du cercle* (c), *et* 4° *d'une circonférence de cercle* (γ) *homogène, de centre* O, *dont un diamètre coïncide toujours avec l'axe* AB *du tore et qui peut se mouvoir librement autour de son diamètre* A′B′ *perpendiculaire* à AB.

Le gyroscope est fixé par son centre de gravité O. *Le diamètre* A′B′ *de la circonférence* (γ) *étant horizontal, on le fait tourner avec une vitesse angulaire constante donnée* ω *autour de la nadirale* O*z passant par* O. *On incline l'axe* AB *du tore sur la nadirale d'un angle donné* α *et l'on imprime au tore une vitesse initiale n autour de cet axe* AB, *puis on l'abandonne à lui-même.*

En quel point de l'axe AB *du tore faut-il appliquer à l'instant initial une masse pesante additionnelle m pour que cet axe* AB *tende indéfiniment vers la nadirale* O*z sans jamais l'atteindre.*

2° *Si le rayon du cercle générateur du tore est égal à un centimètre, le rayon du cercle* (*c*) *à trois centimètres et le rayon de la circonférence* (γ) *à six centimètres, on demande de calculer les moments d'inertie des quatre pièces du gyroscope par rapport à* AB, *par rapport à* A′B′ *et par rapport à la perpendiculaire menée par* O *au plan* AB A′B′.

Épreuve pratique. — *A San Francisco, dont les coordonnées geographiques sont*

Longitude .... 124°45′15″ Ouest,
Latitude .... 37°49′27″ Nord,

on observe l'étoile Wéga, dont les coordonnées sont

Ascension droite .... 18h33m6″,84
Déclinaison .... 38°41′,0″2

après son passage au plan méridien ; on trouve pour sa distance zénithale

72°28′36″,4.

Déterminer l'heure sidérale de San Francisco et celle de Paris au moment de l'observation.

Lyon.

ANALYSE. — *Intégrer*

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + a^2 x^2 y = x^4 \sin^2 a x.$$

Après avoir intégré l'équation sans second membre, on vérifiera que l'équation complète possède l'intégrale particulière

$$y = \mathrm{A} + \mathrm{B}\left(-2a^2x^2 + \frac{4-6a^2x^2}{9}\cos 2ax + \frac{8}{9}ax\sin 2ax\right),$$

où A *et* B *sont des constantes à déterminer, a une constante donnée.*

Tout se réduit à intégrer

(o) $$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - k^2 x^2 y = 0.$$

Quelques explications préalables sont nécessaires sur certaines équations traitées par M. Lafon dans son Cours.

Soit l'équation de Riccati

$$\mathrm{H} = \mathrm{P}(y, a, b, c, n) = x \frac{dy}{dx} - ay + by^2 - cx^n = 0,$$

$$a, b, c, n = \text{const.}$$

Lorsque $n = 2a$, la substitution

(1) $$y = zx^a$$

sépare les variables, et il vient

$$x^{a-1} dx = \frac{dz}{c - bz^2}.$$

Posons maintenant

$$y = \frac{a}{b} + \frac{x^n}{y_1};$$

il viendra

$$H_1 = P(y_1, a - n, c, b, n) = 0.$$

Si ensuite

$$y_1 = \frac{a-n}{c} + \frac{x^n}{y_2},$$

$$H_2 = P(y_2, a + 2n, b, c, n) = 0 \quad \text{et enfin}$$

. . . .

$$\left\{\begin{array}{ll} H_i = P(y_i, a + in, c, b, n) = 0 & \text{si } i \text{ impair} \\ H_i = P(y_i, a + in, b, c, n) = 0 & \text{si } i \text{ pair} \end{array}\right\}.$$

Posons maintenant $y = \frac{x^n}{u}$; on aura

$$G = P(u, n - a, c, b, n)$$

et par le même procédé

$$\left\{\begin{array}{ll} G_i = P(u_i, n - a + in, b, c, n) & \text{si } i \text{ impair} \\ G_i = P(u_i, n - a + in, c, b, n) & \text{si } i \text{ pair} \end{array}\right\}.$$

La séparation des variables se fera par la formule (1) sur

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{ll} H_i & \text{si } \; 2(a - in) = n \\ G_i & \text{si } \; 2(n - a + in) = n \end{array}\right\}.$$

Pour un candidat élève de M. Lafon et prévenu des habitudes de ce professeur, il était naturel de se demander si (o) n'était pas une équation H déguisée. C'est effectivement le cas.

Posons $y t = \frac{dy}{dx}$, puis $z = tx$; il viendra

$$H = P(z, 3, 1, -k^2, 2).$$

La seconde des relations (2) est satisfaite pour $i = 1$, puisque $a = 3$ et $n = 2$. La séparation des variables se fait sur G_1.

On trouve

$$G = P(u, -1, -k^2, 1, 2),$$
$$G_1 = P(u_1, 1, 1, -k^2, 2),$$

c'est-à-dire

$$x\frac{du_1}{dx} - u_1 + u_1^2 = -k^2x^2.$$

Posons, conformément à (1), $u_1 = xv$; on aura finalement

$$x + \int \frac{dv}{k^2+v^2} = \text{const.}$$

Le lecteur achèvera sans peine l'intégration de (0).

Mécanique. — I. *Attraction d'un ellipsoïde homogène de révolution aplati sur un point de sa surface.*

II. *A chaque sommet d'un triangle équilatéral, de grandeur invariable, dont la hauteur h est donnée, on fixe un point matériel, non pesant, de même masse m. L'un des côtés se meut dans un plan fixe; le sommet opposé se meut dans un second plan fixe, parallèle au premier; la distance des deux plans est $\frac{h}{2}$.*

Étudier le mouvement des trois masses, en tenant compte des forces résultant des équations des liaisons. On négligera les frottements.

SESSION DE NOVEMBRE 1895. — COMPOSITIONS.

Montpellier.

Analyse. — I. *Calculer la valeur de l'intégrale triple*

$$\iiint [5(x-y)^2 + 3az - 4a^2]\, dx\, dy\, dz,$$

x, y, z prenant tous les systèmes de valeurs qui vérifient les relations

$$x^2+y^2-az<0, \qquad x^2+y^2+z^2-2a^2<0.$$

En posant $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, et remarquant que $\int\int\int xy\,dx\,dy\,dz=0$, on a

$$\int\int\int(5\rho^2+3az-4a^2)\rho\,d\rho\,dz\,d\theta,$$

où

$$0<\theta<2\pi \quad \text{et} \quad \rho^2<az, \qquad \rho^2<2a^2-z^2,$$

ou encore

$$\begin{aligned}2\pi\Bigg[\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{az}}&(5\rho^2+3az-4a^2)\rho\,d\rho\\ +\int_a^{a\sqrt{2}}dz\int_0^{\sqrt{2a^2-z^2}}&(5\rho^2+3az-4a^2)\rho\,d\rho\Bigg]\\ &=2\pi\left[-\frac{a^5}{12}+\frac{a^5}{8}\right]=\frac{\pi a^5}{12}.\end{aligned}$$

II. *Intégrer l'équation*

$$\begin{aligned}x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3(1-a)x^2\frac{d^2y}{dx^2}&\\ +(3a^2-3a+1)x\frac{dy}{dx}-a^3y&=bx^m.\end{aligned}$$

Examiner en particulier le cas où $m=a$.

En posant $x=e^t$, l'équation devient

$$\frac{d^3y}{dt^3}-3a\frac{d^2y}{dt^2}+3a^2\frac{dy}{dt}-a^3y=be^{mt}$$

dont l'intégrale générale est

$$\begin{aligned}y&=\frac{b}{(m-a)^3}e^{mt}+e^{at}(c_1+c_2t+c_3t^2)\\ &=\frac{b}{(m-a)^3}x^m+x^a[c_1+c_2\log x+c_3\log^2 x].\end{aligned}$$

Si $m=a$, en posant $m=a+\varepsilon$, et faisant tendre ε

vers o, on trouve

$$y = \frac{b}{6} x^a \log^3 x + x^a [c'_1 + c'_2 \log x + c'_3 \log^2 x].$$

Mécanique. — I. *Dans le tétraèdre* OABC, *l'angle trièdre* O *est trirectangle, et les arêtes issues de* O *ont pour longueur commune l'unité. Ce tétraèdre est en mouvement et, à l'époque t, les vitesses des points* A, B, C *ont pour projections respectives sur les droites* OA, OB, OC *les valeurs suivantes :*

$$\begin{array}{llll}
A: & \frac{2}{3}, & \frac{2+\sqrt{3}}{3}, & \frac{2-\sqrt{3}}{3}. \\[2mm]
B: & \frac{2-\sqrt{3}}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{2+\sqrt{3}}{3}, \\[2mm]
C: & \frac{2+\sqrt{3}}{3}, & \frac{2-\sqrt{3}}{3}, & \frac{2}{3};
\end{array}$$

on demande de déterminer, pour l'époque t, les éléments du mouvement hélicoïdal du tétraèdre.

Les parallèles aux trois vitesses menées par O ont leurs extrémités dans le plan $X + Y + Z = 2$. L'axe instantané est perpendiculaire à ce plan, et la vitesse de translation parallèle à cet axe a ses trois composantes égales à $\frac{2}{3}$.

On a les composantes des vitesses de rotation en retranchant $\frac{2}{3}$ de chacune des composantes données. Les trois plans menés par A, B, C, perpendiculairement à ces vitesses, se coupent suivant une même droite, $X = Y = Z$, qui est l'axe instantané. La vitesse angulaire $\omega = 1$ se déduit de la vitesse de l'un des points A.

II. *Un point matériel non pesant, de masse* 1, *est* *sollicité par la force centrale*

$$F = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\omega^2}\right), \qquad \text{où} \qquad \rho = \sqrt{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega},$$

a, b étant des constantes ; r, ω les coordonnées polaires du point par rapport au centre. A $t = 0$, on a $r = a$, la vitesse étant perpendiculaire au rayon vecteur et égale à $\frac{1}{a}$.

Déterminer la trajectoire, étudier la variation de la vitesse, trouver le temps mis par le mobile pour revenir à sa position initiale.

Le principe des aires et le théorème des forces vives donnent les deux équations

$$r^2\frac{d\omega}{dt} = 1,$$

$$2F\,dr = d\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right] = d\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right],$$

d'où

$$-Fr^2 = \frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\omega^2} = \frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\omega^2},$$

équation dont l'intégrale générale est

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} + c_1\cos\omega + c_2\sin\omega;$$

les conditions initiales donnent $c_1 = c_2 = 0$ et

$$r^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega;$$

la trajectoire est la podaire d'une ellipse. On a

$$v^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 = \frac{a^4\cos^2\omega + b^4\sin^2\omega}{r^6},$$

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{2(a^2 - b^2)}{r^{10}}\big[a^2(2a^2 - b^2)\cos^2\omega + b^2(2b^2 - a^2)\sin^2\omega\big]\sin\omega\cos\omega.$$

Si $1 < \frac{a}{b} < \sqrt{2}$, la vitesse est maxima pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, et minima pour $\omega = 0$ et π.

Si $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$, la vitesse est maxima pour

$$\operatorname{tang}\omega = \pm \frac{a}{b}\sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}},$$

et minima pour $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \ldots$.

Si $\frac{a}{b} < 1$, on a des résultats analogues.

Le temps employé pour revenir au point de départ est

$$T = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega)\, d\omega = \pi(a^2 + b^2).$$

Épreuves pratiques. — *Calculer, pour un instant déterminé, la longitude et la latitude géocentriques d'une planète, connaissant, en cet instant, les coordonnées héliocentriques de cette planète :*

Longitude	$253^\circ\ 8'\ 47'',2$
Latitude	$-\ 5^\circ 32'\ 6'',4$
Log. du rayon vecteur.	$\bar{1},7836251$

et les coordonnées géocentriques du Soleil :

Longitude	$53^\circ 13'\ 14'',7$
Log. du rayon vecteur ...	$0,0187234$

L, B, R, ♃ et d représentant les données; λ, β les inconnues, on a

$$\begin{aligned}
\rho \cos\beta \cos\lambda &= d \cos ♃ + R \cos B \cos L,\\
\rho \cos\beta \sin\lambda &= d \sin ♃ + R \cos B \sin L,\\
\rho \sin\beta &= R \sin B,
\end{aligned}$$

et en posant

$$\frac{R \cos B \sin L}{d \sin ♃} = -\operatorname{tang}^2\varphi, \qquad \frac{R \cos B \cos L}{d \cos ♃} = -\operatorname{tang}^2\psi,$$

on a

$$\tang\lambda = \frac{\tang\mathcal{L}\cos 2\varphi\cos^2\psi}{\cos^2\varphi\cos 2\psi},\qquad \tang\beta = \frac{R\sin B\sin\lambda\cos^2\varphi}{d\sin\mathcal{L}\cos 2\varphi};$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\varphi &= 39^{\circ}.45'.32'',4,\\
\psi &= 27.54.23,5,\\
\beta &= -\ 6.27.\ 7,6,\\
\lambda &= 29.47.\ 7,3.
\end{aligned}$$