Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 284-295

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__284_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 662.

(1863, p. 336.)

$2S$ *étant l'aire d'un quadrilatère sphérique inscrit; a, b, c, d les côtés; $2p$ le périmètre; on a*

$$\sin\frac{S}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}\sin\frac{p-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}},$$

$$\cos\frac{S}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a-b}{2}\cos\frac{p-a-c}{2}\cos\frac{p-a-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}}.$$

(GRUNERT).

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Il existe, comme on sait, des relations remarquables entre les côtés a, b, c, d et les diagonales m, n d'un quadrilatère plan inscriptible. On a ainsi

$$mn = ac + bd$$

et

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

La première a été découverte par Ptolémée; la seconde a été signalée en 1831 par Ernest-Guillaume Grebe dans son Ouvrage: *De quadrilatero circulari observationes quædam.*

On a étendu ces formules aux quadrilatères sphériques inscriptibles, et pour y parvenir, on a profité des propriétés des projections stéréographiques. C'est ainsi que M. Collète a obtenu les formules

$$\sin\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2} = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2},$$

$$\frac{\sin\frac{m}{2}}{\sin\frac{n}{2}} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} + \sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}},$$

qu'il a énoncées et démontrées dans les *Nouvelles Annales*, 1849, p. 440.

La première de ces formules trigonométriques nous servira dans ce qui va suivre.

Considérons sur la sphère un quadrilatère inscrit ABCD dont les côtés AB, BC, CD, DA sont respectivement représentés par a, b, c, d et les diagonales AC, BD par m, n. Faisons la projection stéréographique de cé quadrilatère en prenant pour point de vue l'extrémité I du diamètre AaI du sommet A. Nous aurons ainsi un quadrilatère mixtiligne $abcd$ dont les côtés ab, ad sont des droites et les côtés bc, cd des arcs de cercle convexes. Les points A, B, C, D étant sur une circonférence, il en sera de même des quatre points a, b, c, d. Il est essentiel aussi de rappeler que les angles sont conservés. Considérons à part ce quadrilatère inscriptible $abcd$. Prolongeons les arcs de cercle cb, cd jusqu'à leur rencontre en g qui se fait d'ailleurs sur la diagonale ac et joignons bd, bg, dg, cb et cd. Menons aux arcs bc, cd des tangentes à leurs extrémités. On déterminera ainsi deux points e, f. Posons

$$A + B + C + D - 4^d = 2S.$$

Nous aurons, dans l'hexagone $abecfd$,

$$A + B + e + C + f + D = 2^d(6-2) = 8^d;$$

par suite

$$2S = 4^d - (e+f).$$

Remarquons maintenant que dans les triangles isoscèles ebc et dfc, on a

$$2^d - e = 2\widehat{ebc} = 2\widehat{bgc} \quad \text{et} \quad 2^d - f = 2\widehat{dcf} = 2\widehat{dgc}.$$

Par conséquent, $4^d - (e+f) = 2\widehat{bgd}$; il en résulte $S = \widehat{bgd}$.

La question est ainsi ramenée à calculer $\sin\frac{\widehat{bgd}}{2}$ et $\cos\frac{\widehat{bgd}}{2}$. Or, dans le triangle rectiligne bgd, on a

$$\overline{bd}^2 = \overline{bg}^2 + \overline{dg}^2 - 2\,bg.dg\cos\widehat{bgd}.$$

Remplaçant $\cos\widehat{bgd} = \cos S$ par $1 - 2\sin^2\frac{S}{2}$, on en tire

$$\sin^2\frac{S}{2} = \frac{\overline{bd}^2 - (bg - dg)^2}{4\,bg.dg} = \frac{(bd + dg - bg)(bd + bg - dg)}{4\,bg.dg}.$$

Pour calculer bd, bg et dg, et avoir leurs expressions en fonction de a, b, c, d, m et n, rappelons que, par suite de la relation géométrique des deux figures, on a

$$bd = \frac{\sin\frac{n}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{d}{2}},\qquad bg = \frac{\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{a}{2}\sin\frac{m}{2}},\qquad dg = \frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{d}{2}\sin\frac{m}{2}}.$$

On multipliera haut et bas les valeurs de ces trois lignes, respectivement par $\sin\frac{m}{2}$, $\cos\frac{d}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$ pour établir l'égalité des dénominateurs, et l'on substituera dans l'expression de $\sin^2\frac{S}{2}$ qui deviendra ainsi

$$\sin^2\frac{S}{2} = \frac{\left\{\begin{array}{l}\left(\sin\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2} + \cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2} - \cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2}\right)\\ \times\left(\sin\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2} + \cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2} - \cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}\right)\end{array}\right\}}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}.$$

Mais le quadrilatère étant inscriptible, on peut éliminer $\sin\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2}$ en profitant de la relation énoncée au commencement de cet article. Le premier facteur deviendra ainsi

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2}+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2}\\
&=\cos\frac{a-c}{2}-\cos\frac{b+d}{2}\\
&=2\sin\frac{a-c+b+d}{4}\sin\frac{b+d-a+c}{4}\\
&=2\sin\frac{p-c}{2}\sin\frac{p-a}{2},
\end{aligned}$$

en posant $a+b+c+d=2p$.

On aura de même, pour l'autre facteur, $2\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-d}{2}$.

On en conclut

$$\sin^2\frac{S}{2}=\frac{\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}\sin\frac{p-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}.$$

C. Q. F. D.

Pour établir la seconde formule énoncée, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{S}{2}=1-\sin^2\frac{S}{2}&=\frac{(bg+dg)^2-\overline{bd}^2}{4bg.dg}\\
&=\frac{(bg+dg+bd)(bg+dg-bd)}{4bg.dg}.
\end{aligned}$$

Mais d'après les développements ci-dessus, on trouve, à un facteur près,

$$\begin{aligned}
bg+dg+bd&=\cos\frac{a-c}{2}+\cos\frac{b-d}{2}\\
&=2\cos\frac{a+b-c-d}{2}\cos\frac{a+d-c-b}{2}\\
&=2\cos\frac{p-c-d}{2}\cos\frac{p-c-b}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
bg+dg-bd&=\cos\frac{a-c}{2}+\cos\frac{b+d}{2}\\
&=2\cos\frac{a+b+c+d}{2}\cos\frac{a+c-b-d}{2}\\
&=2\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-b-d}{2}.
\end{aligned}$$

On a donc en définitive

$$\cos^2\frac{S}{2} = \frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-b-d}{2}\cos\frac{p-c-d}{2}\cos\frac{p-c-b}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}},$$

formule qui ne diffère pas de la proposée, car, en vertu de la relation $2p = a + b + c + d$, on peut, sous le signe cosinus, remplacer les angles $p - c - d$, $p - c - b$, $p - b - d$ respectivement par $-(p - a - b)$, $-(p - a - d)$, $-(p - a - c)$.

C. Q. F. D.

Question 1032.

(1871, p. 335.)

Trouver trois nombres en progression géométrique tels que chacun d'eux, augmenté d'une unité, donne un carré.

(A. MARTIN.)

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Les équations du problème sont

$$(1) \qquad x = a^2 - 1,$$

$$(2) \qquad xy = b^2 - 1,$$

$$(3) \qquad xy^2 = c^2 - 1.$$

On en déduit

$$\frac{c^2 - 1}{a^2 - 1} = y^2,$$

c'est-à-dire que $\frac{c^2-1}{a^2-1}$ doit être un carré.

Les valeurs de c, a et y, qui vérifient cette équation, sont faciles à trouver. Il suffit d'écrire la suite des nombres $(c^2 - 1)$, 3, 8, 15, 24, 35, ..., et, au-dessous de chacun d'eux, les quotients de leur division par les précédents. Les carrés qui se trouvent parmi ces quotients ont pour valeurs 16, 36, ..., d'où l'on déduit $y = 4, 6, \ldots$. Les diviseurs correspondants ayant pour valeurs $a^2 - 1$, expriment les valeurs de x. Nous avons donc un système de solutions des équations (1) et (2) : $x = 3$,

$y = 4$; $x = 8$, $y = 6$. Or, de l'équation (2) on tire

$$xy = (b+1)(b-1) = l(l+2).$$

Ainsi la différence entre x et y doit être égale au moins à 2. On en conclut que le premier groupe de valeurs ne saurait convenir. Le second vérifie l'équation (3) comme on peut s'en assurer, et l'on a

$$\begin{aligned} x &= 8 = 3^2 - 1, \\ xy &= 48 = 7^2 - 1, \\ xy^2 &= 288 = 17^2 - 1. \end{aligned}$$

Notons en passant que le produit de ces trois nombres est un cube : $x^3y^3 = 48^3$.

On peut remarquer que xy et xy^2 sont de même parité que x. Si donc, par exemple, x est pair, on en déduira

$$x = 2p = a^2 - 1,$$

d'où

$$a = 2n + 1.$$

et par suite

$$x = 4n(n+1) = 8m.$$

Les valeurs paires de x sont donc toutes renfermées parmi les multiples de 8. La question revient donc à résoudre les trois équations

$$\begin{aligned} 8m &= a^2 - 1, \\ 8my &= b^2 - 1, \\ 8my^2 &= c^2 - 1, \end{aligned}$$

ou à chercher les multiples de 8 qui répondent au type général $8m = a^2 - 1$, car cela a lieu pour les deux premières équations, et la troisième peut s'écrire $8uy = c^2 - 1$.

Ces multiples ont pour valeurs

$$(\text{A}) \left\{ \begin{array}{cccccccc} 8, & 16, & 24, & 32, & 40, & 48, & 56, & 64, \\ 3^2-1, & & 5^2-1, & & & 7^2-1, & & \\ 72, & 80, & 88, & 96, & 104, & 112, & 120, & 128, \\ & 9^2-1, & & & & & 11^2-1, & \\ 136, & 144, & 152, & 160, & 168, & 176, & \ldots, & \ldots, \\ & & & & 13^2-1. & & & \end{array} \right.$$

Comme on l'a vu plus haut, on a pour tous les nombres impairs, $(2n+1)^2-1=M8$, et pour $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, on a, pour les valeurs de m, les nombres

(B) 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...

Ainsi les seuls multiples de 8 à considérer et qui soient les valeurs de x sont les suivants :

(C) 0, 8, 24, 48, 80, 120, 168, ...

Il en résulte que y et y^2 doivent se trouver parmi les nombres (B). Mais les valeurs de $8my$ se trouvent nécessairement dans la série (A). Il faut donc chercher ceux de ces nombres dont les carrés se trouvent dans la même série. Cela a lieu, par exemple, pour le nombre 6 dont le carré est 36. Ainsi $x=8$, $y=6$ satisfont à ces équations.

Lorsque x est impair, xy et xy^2 sont impairs; a, b, c sont donc pairs. Soit donc $a=2n$; on aura $x=4n^2-1$. x se trouve donc dans la série des nombres

(D) 3, 15, 35, 63, 99, 143, 195, 255, 323, ...,

parmi lesquels doivent figurer également xy et xy^2, mais ces nombres sont tous le produit de deux nombres impairs consécutifs qui ne peuvent avoir de diviseur commun. Par conséquent, il n'existe pas de solution dans l'hypothèse de x impair.

Question 1641.

(1892, pp. 31* et 46*.)

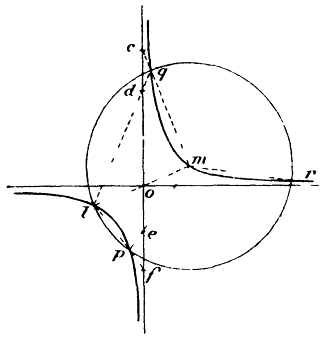
Si un cercle a pour centre un point d'une hyperbole équilatère et passe par le symétrique de ce point par rapport au centre de l'hyperbole, il coupe cette courbe en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral. LEMAIRE.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE ET TRANSFORMATION

Par M. MANNHEIM.

Le numéro de mars 1896 renferme une bonne vérification analytique de ce joli théorème, mais elle ne permet pas de voir pourquoi il est particulier à l'hyperbole équilatère. Nous ajoutons alors une solution géométrique ayant l'avantage de montrer que ce théorème existe pour cette courbe parce qu'elle jouit de cette propriété : ses diamètres conjugués sont également inclinés sur ses asymptotes. Cette solution n'emploie, en effet, que cette seule propriété.

Soient m le point de l'hyperbole pris pour centre de la circonférence, l le point diamétralement à m par lequel passe



cette courbe, p, q, r les points de rencontre de cette circonférence avec l'hyperbole. Les droites ql, qm étant deux cordes supplémentaires, sont également inclinées sur les asymptotes; les angles en c et d sont alors égaux.

De même, les angles en e et f sont égaux. L'angle def est le supplément de la somme des angles en f et d, et l'angle cme est le supplément de la somme des angles en c et e. Comme, d'après ce qui précède, la somme des angles en f et d est égale à la somme des angles en c et e, il en résulte que l'angle qlp est égal à l'angle qmp. Si l'on prend sur la circonférence les arcs qui mesurent ces angles égaux, on voit que l'angle qmp est le tiers de quatre droits. De même pour l'angle pmr; donc, etc.

La proposition en question, transformée par polaires réciproques, par rapport à la circonférence qui conduit à son énoncé, conduit au théorème suivant :

On donne une parabole dont le foyer est f. D'un point c de la directrice de cette courbe, pris comme centre, on décrit un cercle qui a pour rayon la distance de c au point e *milieu de cf. En plus de la tangente en e à la circonférence, il y a trois tangentes communes à ce cercle et à la parabole : ces droites forment un triangle équilatéral.*

La démonstration géométrique de cette propriété peut paraître plus difficile à établir que celle du théorème proposé. Elle est pourtant tout aussi simple, puisqu'elle n'est autre que la transformée de la démonstration précédente. Pour obtenir cette transformation de démonstration, on doit avoir soin de transformer préalablement le théorème sur lequel elle est basée. Voici la propriété qui résulte de cette transformation :

La droite, qui joint un point c de la directrice d'une parabole à un point arbitraire m de cette courbe, et la droite qui joint le point c au point de rencontre de la polaire de ce point et de la tangente en m, sont également inclinées sur les tangentes à la parabole qui sont issues de c.

La démonstration directe de cette propriété est des plus simples.

Question 1674.

(1894, p. 4*.)

On considère tous les cercles tangents en un même point à une conique donnée. Lieu du pôle de la seconde corde d'intersection du cercle et de la conique par rapport à la conique. (André Cazamian.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. Mannheim.

Quel que soit le cercle, on sait que cette seconde corde a toujours même direction. Donc son pôle est sur le diamètre conjugué à cette direction.

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

Prenons pour axe des x la tangente, et pour axe des y la normale au point donné de la conique donnée. L'équation de la conique peut donc s'écrire

(1) $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0.$$

L'équation d'un cercle tangent à la conique à l'origine est

(2) $$x^2 + y^2 - 2ky = 0.$$

Multiplions l'équation (2) par A, et retranchons-la de (1), on trouve

$$y[2Bx + (C - A)y + 2(E + Ak)] = 0.$$

Cette dernière équation représente donc deux droites passant par le point d'intersection de la conique (1) et du cercle (2). L'une des droites est l'axe des x.

La seconde corde d'intersection a donc pour équation

(3) $$2Bx + (C - A)y + 2(E + Ak) = 0.$$

La polaire d'un point (α, β) par rapport à la conique (1) a pour équation

(4) $$(A\alpha + B\beta)x + (B\alpha + C\beta + E)y + E\beta = 0.$$

Identifiant (3) et (4), on obtient

$$\frac{A\alpha + B\beta}{2B} = \frac{B\alpha + C\beta + E}{C - A} = \frac{E\beta}{2(E + Ak)}.$$

On aura le lieu du point (α, β) en éliminant k entre ces deux dernières équations.

Or, les deux premiers rapports étant indépendants de k, l'élimination se trouve toute faite. Le lieu est donc la droite ayant pour équation

(5) $$\alpha[A(A - C) + 2B^2] + B(A + C)\beta + 2EB = 0.$$

Si $A + C = 0$, c'est-à-dire si la conique donnée est une hyperbole équilatère, l'équation (5) devient

$$\alpha = -\frac{EB}{A^2 + B^2}.$$

C'est une droite parallèle à l'axe des y.

Question 1701.

(1895, p. 38*.)

Le lieu géométrique des points milieux des cordes d'un limaçon de Pascal, qui sont vues du point double réel sous un angle droit, est une circonférence. (A. Droz.)

SOLUTION
Par M. E.-N. Barisien.

Considérons l'équation polaire du limaçon de Pascal

$$r = a + b\cos\theta.$$

Soit OA un rayon vecteur passant par le point double O. Alors

$$OA = a + b\cos\theta.$$

Le rayon vecteur perpendiculaire OB a pour expression

$$OB = a - b\sin\theta.$$

De sorte que les coordonnées $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ des points A et B sont

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 = (a + b\cos\theta)\cos\theta, & x_2 = -(a - b\sin\theta)\sin\theta, \\ y_1 = (a + b\cos\theta)\sin\theta, & y_2 = (a - b\sin\theta)\cos\theta. \end{array}\right.$$

Les coordonnées du milieu de AB sont, par suite,

$$2X = x_1 + x_2 = a(\cos\theta - \sin\theta) + b,$$
$$2Y = y_1 + y_2 = a(\cos\theta + \sin\theta),$$

ou

$$2X - b = a(\cos\theta - \sin\theta),$$
$$2Y = a(\cos\theta + \sin\theta).$$

Elevons au carré et ajoutons ces deux équations; on trouve immédiatement que le lieu du milieu de AB est le cercle qui a pour équation

$$(2X - b)^2 + 4Y^2 = 2a^2.$$

Autre solution de M. A. Dardès.

Question 1702.

(1895, p. 38*.)

Soient AB *et* A′B′ *deux diamètres d'une hyperbole équilatère et* C *un point quelconque de cette dernière : les deux triangles* AA′C *et* BB′C *sont orthocentriques.*

(A. Droz.)

SOLUTION

par M. E.-N. Barisien.

Cette propriété est la conséquence de la suivante, bien connue :

L'orthocentre de tout triangle inscrit dans une hyperbole équilatère est situé sur cette courbe.

Or, la hauteur du triangle CAA′ issue de C se confond avec la hauteur du triangle CBB′ issue de C, puisque AA′ et BB′ sont parallèles.

Le point H, orthocentre commun aux deux triangles, est donc situé au second point d'intersection de la hauteur commune aux deux triangles avec l'hyperbole.

Autre solution de M. A. Dardès.