F. GOMES TEIXEIRA

Sur le développement de x^k en série ordonnée suivant les puissances du sinus de la variable

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 270-274

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__270_1>

[D1b]

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE x^k EN SÉRIE ORDONNÉE SUIVANT LES PUISSANCES DU SINUS DE LA VARIABLE;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,
Directeur de l'Académie polytechnique de Porto.

Dans un article *Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable,* publié dans le *Journal de Crelle-Fuchs* (t. CXVI, p. 14), nous avons donné, pour le développement des fonctions x^{2m} et x^{2m+1} suivant les puissances de $\sin x$, les formules suivantes :

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
x^{2m} = {} & \sin^{2m} x \\
& \times \left[1 + \frac{S_{2m+2}^{(1)}}{(2m+1)(2m+2)} \sin^2 x \right. \\
& \quad + \frac{S_{2m+4}^{(2)}}{(2m+1)\ldots(2m+4)} \sin^4 x \\
& \quad \left. + \frac{S_{2m+6}^{(3)}}{(2m+1)\ldots(2m+6)} \sin^6 x + \ldots \right],
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
x^{2m+1} = {} & \sin^{2m+1} x \\
& \times \left[1 + \frac{S_{2m+3}^{(1)}}{(2m+2)(2m+3)} \sin^2 x \right. \\
& \quad + \frac{S_{2m+5}^{(2)}}{(2m+2)\ldots(2m+5)} \sin^4 x \\
& \quad \left. + \frac{S_{2m+7}^{(3)}}{(2m+2)\ldots(2m+7)} \sin^6 x + \ldots \right],
\end{aligned}
\right.
$$

qui ont lieu quand on a $|\sin x| < 1$. Dans ces formules,

$S_{2a}^{(b)}$ représente la somme des combinaisons des nombres

$$2^2,\quad 4^2,\quad 6^2,\quad \ldots,\quad (2a-2)^2,$$

pris b à b, et $S_{2a+1}^{(b)}$ la somme des combinaisons des nombres

$$1^2,\quad 3^2,\quad 5^2,\quad (2a-1)^2,$$

pris aussi b à b.

Nous avons employé pour obtenir ces formules une méthode fondée sur la théorie des intégrales prises entre des limites imaginaires. Ici nous allons voir comment on peut les vérifier au moyen d'une méthode élémentaire.

Je remarque, en premier lieu, qu'on démontre, d'une manière très simple, la possibilité du développement de x^{2m} et x^{2m+1} en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$ en partant de l'égalité connue

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5}\sin^5 x + \ldots,$$

où $|\sin x| < 1$.

On sait, en effet, par un théorème bien connu, relatif à la multiplication des séries, que le second membre de l'égalité

$$x^k = \left(\sin x + \frac{1}{2.3}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5}\sin^5 x + \ldots\right)^k$$

peut être développé en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$.

Cela posé, je suppose que la formule (1) ait lieu quand l'exposant de x est égal à $2(m-1)$ et je vais démontrer qu'elle a encore lieu quand l'exposant est égal à $2m$. Dans ce but, je pose

$$x^{2m} = A_{2m}\sin^{2m} x + A_{2m+2}\sin^{2m+2} x + \ldots,$$

relation où l'on n'écrit pas les termes de degré impair, parce que la valeur de x^{2m} ne varie pas quand on change x en $-x$, et je dérive deux fois les deux membres de cette égalité. Il vient

$$\begin{aligned}
&2m(2m-1)x^{2m-2}\\
&\quad = -[2m\mathrm{A}_{2m}\sin^{2m}x + (2m+2)\mathrm{A}_{2m+2}\sin^{2m+2}x\\
&\qquad\qquad + (2m+4)\mathrm{A}_{2m+4}\sin^{2m+4}x + \ldots]\\
&\qquad + (1-\sin^2 x)[2m(2m-1)\mathrm{A}_{2m}\sin^{2m-2}x\\
&\qquad\qquad + (2m+2)(2m+1)\mathrm{A}_{2m+2}\sin^{2m}x + \ldots].
\end{aligned}$$

Si l'on pose dans cette identité

$$x^{2m-2} = \mathrm{A}'_{2m-2}\sin^{2m-2}x + \mathrm{A}'_{2m}\sin^{2m}x + \ldots,$$

on trouve les égalités

$$\begin{aligned}
&2m(2m-1)\mathrm{A}_{2m} = 2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m-2},\\
&-2m\mathrm{A}_{2m} + (2m+2)(2m+1)\mathrm{A}_{2m+2} - 2m(2m-1)\mathrm{A}_{2m}\\
&\quad = 2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m},\\
&-(2m+2)\mathrm{A}_{2m+2} + (2m+4)(2m+3)\mathrm{A}_{2m+4}\\
&\qquad -(2m+2)(2m+1)\mathrm{A}_{2m+2}\\
&\qquad\qquad = 2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

qui donnent

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_{2m} = \mathrm{A}'_{2m+2},\\
&-(2m)^2\mathrm{A}_{2m} + (2m+2)(2m+1)\mathrm{A}_{2m+2}\\
&\quad = 2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m},\\
&-(2m+2)^2\mathrm{A}_{2m+2} + (2m+4)(2m+3)\mathrm{A}_{2m+4}\\
&\quad = 2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m+2},\\
&-(2m+4)^2\mathrm{A}_{2m+4} + (2m+6)(2m+5)\mathrm{A}_{2m+6}\\
&\quad = 2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m+4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&-(2m+2\nu)^2\mathrm{A}_{2m+2\nu}\\
&\quad + (2m+2\nu+2)(2m+2\nu+1)\mathrm{A}_{2m+2\nu+2}\\
&\qquad\qquad = 2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m+2\nu},
\end{aligned}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mais, comme nous supposons que la formule (1) a lieu quand l'exposant de x est égal à $2(m-1)$, nous avons

$$A'_{2m-2} = 1,$$

$$A'_{2m+2\nu} = \frac{S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu}}{(2m-1)\,2m(2m+1)\ldots(2m+2\nu)},$$

et nous pouvons donc calculer A_{2m}, A_{2m+2}, A_{2m+4}, ... au moyen des formules antérieures.

Les valeurs qu'on obtient de cette manière pour les coefficients A_m, A_{2m+2}, A_{2m+4}, ... coïncident avec les valeurs des coefficients de la formule (1). Pour nous rendre compte de cette circonstance dans toute sa généralité, supposons qu'elle ait lieu pour le coefficient $A_{2m+2\nu}$, c'est-à-dire que l'on ait

$$A_{2m+2\nu} = \frac{S^{(\nu)}_{2m+2\nu}}{(2m+1)(2m+2)\ldots(2m+2\nu)}.$$

La formule (3) donne alors

$$A_{2m+2\nu+2} = \frac{1}{(2m+1)\ldots(2m+2\nu+2)}\left[S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu} + (2m+2\nu)^2\, S^{(\nu)}_{2m+2\nu}\right].$$

Mais si l'on a égard à la signification des symboles $S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu}$ et $S^{(\nu)}_{2m+2\nu+2}$, on voit que

$$S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu} + (2m+2\nu)^2\, S^{(\nu)}_{2m+2\nu} = S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu+2}.$$

Donc on a

$$A_{2m+2\nu+2} = \frac{S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu+2}}{(2m+1)\ldots(2m+2\nu+2)},$$

et l'on voit que la valeur de $A_{2m+2\nu+2}$ coïncide encore avec la valeur du coefficient de $\sin^{2m+2\nu+2} x$ dans la formule (1).

Au moyen de l'analyse qui précède, on voit que la formule (1) a lieu pour l'exposant $2m$ si elle a lieu pour l'exposant $2(m-1)$, et, par conséquent, si elle a lieu pour la fonction x^2. Mais cette formule, en y posant $m=1$ et en remarquant que

$$S_4^{(1)}=2^2, \qquad S_6^{(2)}=2^2.4^2, \qquad S_8^{(3)}=2^2.4^2.6^2, \qquad \ldots,$$

donne la formule *connue*

$$x^2=\sin^2 x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin^4 x+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{3}\sin^6 x+\ldots.$$

La formule (1) est donc démontrée. De la même manière, on vérifie la formule (2).

On tire de l'égalité (1), en la dérivant par rapport à x,

$$\frac{x^{2m-1}}{\cos x}=\sin^{2m-1}x\left[1+\frac{S_{2m+2}^{(1)}}{2m+1}\sin^2 x+\frac{S_{2m+4}^{(2)}}{(2m+1)\ldots(2m+3)}\sin^4 x+\ldots\right].$$

De l'égalité (2), on tire aussi

$$\frac{x^{2m}}{\cos x}=\sin^{2m}x\left[1+\frac{S_{2m+3}^{(1)}}{2m+2}\sin^2 x+\frac{S_{2m+5}^{(2)}}{(2m+2)\ldots(2m+4)}\sin^4 x+\ldots\right].$$