NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

X. STOUFF

Sur une application des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 262-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__262_1>

[F8f]

SUR UNE APPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. X. STOUFF,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

Dans un ellipsoïde à trois axes inégaux, représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{1}$$

on suppose que

$$(2) \qquad 2b^2 = a^2 + c^2,$$

on demande de trouver les lignes de cette surface qui, en chacun de leurs points, sont tangentes aux diagonales du rectangle des axes de l'indicatrice de ce point.

En désignant par λ et μ les deux racines, différentes de zéro, de l'équation

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2+\rho} + \frac{y^2}{b^2+\rho} + \frac{z^2}{c^2+\rho} - 1 = 0,$$

les lignes asymptotiques de l'ellipsoïde ont pour équation différentielle

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = \frac{\pm\, d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}}.$$

θ étant l'angle (imaginaire) que fait l'une de ces lignes asymptotiques avec une ligne de courbure, ω l'angle que fait une diagonale du rectangle des axes de l'indicatrice avec la même ligne de courbure, on a

$$\operatorname{tang}\omega = \pm\, i \operatorname{tang}\theta,$$

et l'équation différentielle des lignes cherchées est, par suite,

$$(4) \qquad \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = \frac{\pm\, i\, d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}}.$$

Nous pouvons poser

$$\begin{aligned}
b^2+\lambda &= (b^2-a^2)\operatorname{sn}^2 u, & b^2+\mu &= (a^2-b^2)\operatorname{sn}^2 v,\\
a^2+\lambda &= (a^2-b^2)\operatorname{cn}^2 u, & a^2+\mu &= (a^2-b^2)\operatorname{dn}^2 v,\\
c^2+\lambda &= (c^2-b^2)\operatorname{dn}^2 u, & c^2+\mu &= (c^2-b^2)\operatorname{cn}^2 v.
\end{aligned}$$

En effet, les fonctions sn, cn, dn ainsi définies vérifient les relations fondamentales en prenant pour module $k = i$. L'équation (4) devient alors

$$du = \pm dv,$$

d'où

$$u \pm v = \alpha,$$

α étant une constante

$$u = \int \frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{\sqrt{1 - \mathrm{sn}^4 u}}, \qquad v = \int \frac{d\,\mathrm{sn}\,v}{\sqrt{1 - \mathrm{sn}^4 v}}.$$

On sait, d'après le *Calcul intégral* de Bertrand (p. 569) que la relation précédente équivaut à

$$(5) \quad \mathrm{sn}^2 u + \mathrm{sn}^2 v + m\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v = m - 2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,v\sqrt{1 - m^2}.$$

On déduit aisément de (5) les équations en coordonnées rectilignes des courbes cherchées, d'après les relations faciles à vérifier

$$\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v = \frac{y}{b}, \qquad \mathrm{sn}^2 u + \mathrm{sn}^2 v = \frac{\lambda - \mu}{b^2 - a^2}.$$

D'après (3), en tenant compte de (2) et en posant

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

on a

$$\lambda - \mu = \sqrt{\left(r^2 - \frac{a^2 + c^2}{2}\right)^2 + y^2 \frac{(a^2 - c^2)^2}{b^2}},$$

(5) devient alors

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(r^2 - \frac{a^2 + c^2}{2}\right)^2 = \frac{(a^2 - c^2)^2}{4} & \\ \times \left[m\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y}{b}\left(\sqrt{1 - m^2} + 1\right) - m\right] & \\ \times \left[m\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y}{b}\left(\sqrt{1 - m^2} - 1\right) - m\right]. & \end{aligned} \right.$$

L'équation (6) représente une surface de révolution : son second membre est le produit de quatre facteurs linéaires réels, et peut se mettre sous une forme remarquable et avantageuse pour la discussion. En posant $m = \sin\varphi$, $\frac{y}{b} = \operatorname{tang}\theta$, le second membre de (6) devient

$$\frac{(a^2-c^2)^2}{4}\sin^2\varphi\left(\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{4}\right)\left[\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\times\left[\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right]\left[\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)\right],$$

et, à l'aide d'identités trigonométriques élémentaires,

$$\frac{(a^2-c^2)^2}{4}\,\frac{\sin\varphi\sin(\varphi-4\theta)}{\cos^4\theta},$$

(6) donne alors

$$(7)\qquad r^2 = \frac{a^2+c^2}{2} \pm \frac{a^2-c^2}{2}\,\frac{\sqrt{\sin\varphi\sin(\varphi-4\theta)}}{\cos^2\theta},$$

Il est naturel de chercher à exprimer x, y, z en fonction de θ. Par un calcul facile et ne présentant pas de circonstances remarquables, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{\cos 2\theta + \sqrt{\sin\varphi\sin(\varphi-4\theta)}}{2\cos^2\theta},$$
$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{\cos 2\theta - \sqrt{\sin\varphi\sin(\varphi-4\theta)}}{2\cos^2\theta};$$

$\frac{x^2}{a^2}$ et $\frac{z^2}{c^2}$ sont donc racines d'une équation du second degré

$$(8)\qquad Z^2\cos^4\theta - Z\cos 2\theta\cos^2\theta + \frac{\cos^2(2\theta+\varphi)}{4} = 0.$$

On ne devra donner à θ que des valeurs qui rendent réelles les racines de cette équation et toutes deux comprises entre 0 et 1. On voit de suite que les conditions relatives aux résultats de substitution et à la demi-somme sont toujours remplies. Donc il suffit que

$$\sin\varphi\sin(\varphi-4\theta) \geqq 0.$$

$\frac{y}{b}$ devant être compris entre -1 et $+1$, on devra avoir aussi

$$-1 \leqq \operatorname{tang} \theta \leqq 1.$$

L'angle φ variant de 0 à 2π on aura deux cas à distinguer. Si φ est moindre que π, θ devra varier de $\frac{\varphi}{4} - \frac{\pi}{4}$ à $\frac{\varphi}{4}$. Si φ est supérieur à π, on fera varier θ de $\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{2}$ à $\frac{\varphi}{4} + \frac{3\pi}{4}$. Cela donnera dans les deux cas toute la courbe. Pour $\varphi = 0$, on obtient les sections cycliques de la surface. Les autres courbes sont fermées, analogues aux sections cycliques et admettent les plans cycliques comme plans diamétraux.