H. LAURENT

Sur les fonctions entières

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 23-28

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__23_0>

[B3d] SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. H. LAURENT,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

Dans la quatrième Partie de mon Algèbre, j'ai fait connaître une classe intéressante de polynomes et j'ai montré leur importance dans la théorie de l'élimination. Je vais montrer qu'ils peuvent servir à calculer les solutions communes à plusieurs équations algébriques.

Désignons par $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des polynomes entiers de degré m en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; soient

$$\begin{matrix} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_{1\mu}, & \alpha_{2\mu}, & \ldots, & \alpha_{n\mu}, \end{matrix}$$

les $\mu = m^n$ solutions, supposées finies et distinctes, des équations

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n = 0;$$

désignons, une fois pour toutes, par G_j ou par H_{ij} ce que devient G ou H_i quand on remplace $x_1, x_2, \ldots,$ par $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots$ dans G ou dans H_i.

Les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ peuvent se mettre sous les formes

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_1 - \alpha_{1i})\,P_1^{(i)} + (x_2 - \alpha_{2i})\,P_2^{(i)} \ldots, \\ f_2 &= (x_1 - \alpha_{1i})\,Q_1^{(i)} + (x_2 - \alpha_{2i})\,Q_2^{(i)} \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et cela d'une infinité de manières, les P, Q, ... désignant des polynomes entiers; j'ai posé

$$\xi_i = \frac{1}{D_i} \begin{vmatrix} P_1^i & P_2^i & \ldots & P_n^i \\ Q_1^i & Q_2^i & \ldots & Q_n^i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

D désignant le déterminant $\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, et l'on peut supposer que $D_i \xi_i$ ne change pas quand on permute x_1 et α_{1i}, x_2 et α_{2i}, ...

J'ai montré *que :* 1°

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\mu = 1;$$

2° *Que si* F *était de degré inférieur à* m, *on avait*

$$F = F_1\xi_1 + F_2\xi_2 + \ldots + F_\mu\xi_\mu;$$

3° *Que* ξ_i *était nul avec les* f, *excepté pour* $x_1 = \alpha_i$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ... *et qu'alors il était égal à* 1.

Les fonctions ξ sont susceptibles de prendre une forme remarquable et qui les rend particulièrement utiles.

Désignons par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des polynomes entiers en $x_1, x_2, \ldots x_n$ de degré m; on pourra poser

$$\begin{aligned}\varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) &- \varphi_p(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}) \\ &= (x_1 - \alpha_{1i})\varphi_p^1 + (x_2 - \alpha_{2i})\varphi_p^2 \ldots,\end{aligned}$$

et cela de bien des manières, les φ_p^i désignant des polynomes entiers. Je poserai

$$\varpi_i = \begin{vmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_1^2 & \ldots & \varphi_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^1 & \varphi_n^2 & \ldots & \varphi_n^n \end{vmatrix}.$$

et je supposerai, ce qui est permis, les φ_p^h choisis de telle sorte que ϖ_i ne change pas quand on permute, à la fois, x_1 et α_{1i}, x_2 et α_{2i}, ...

Je considère alors le déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} \varpi_{11} & \varpi_{12} & \ldots & \varpi_{1\mu} \\ \varpi_{21} & \varpi_{22} & \ldots & \varpi_{2\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \text{H},$$

H est une fonction symétrique des solutions de (1); c'est une fonction entière des coefficients des f qui s'annule en même temps que $D_1 D_2 \ldots D_\mu$, qui est une fonction entière des coefficients des f. Donc Π est divisible par $D_1 D_2 \ldots D_\mu$, mais Π et $D_1 D_2 \ldots D_\mu$ étant de mêmes degrés, on a

$$\Pi = D_1 D_2 \ldots D_\mu . C,$$

C désignant une quantité indépendante des α_{ij}. On peut donc, si l'on veut, pour déterminer C, prendre pour les α_{ij}, les solutions de

$$(2) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0.$$

Mais alors, en posant

$$\Delta = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

$\frac{\varpi_i}{\Delta_i}$ devient égal à la fonction ξ_i relative aux fonctions φ et l'on a $\frac{\varpi_{ij}}{\Delta_i} = 0$ ou 1, suivant que $i = j$ ou que $i \gtrless j$, en sorte que

$$\Pi = \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\mu,$$

et l'on a

$$C = \frac{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\mu}{D_1, D_2, \ldots, D_\mu},$$

et comme D ne diffère de Δ que par une constante, C est lui-même constant et indépendant des φ.

Les fonctions $\frac{\varpi_i}{D_i}$ jouissent des propriétés suivantes : elles sont, comme les ξ_i, linéairement indépendantes, au moins en général, car elles se réduisent aux ξ dans le cas particulier où $\varphi_1 = f_1$, $\varphi_2 = f_2$, ... Si l'on désigne par G un polynome entier et par G_i sa valeur pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ...,

$$\frac{G_1}{D_1}\varpi_1 + \frac{G_2}{D_2}\varpi_2 + \ldots + \frac{G_\mu}{D_\mu}\varpi_\mu = F$$

sera un polynome de degré égal au degré de G, pourvu que le degré de G ne dépasse pas $m-1$, et à chaque forme de G correspondra une forme différente de F, puisque les $\frac{\varpi_i}{D_i}$ sont linéairement indépendants. Or, si l'on pose

$$\xi_1 = \frac{P}{P_i}, \qquad P_i = \varpi_1 \frac{\partial P}{\partial \varpi_{i1}} + \varpi_2 \frac{\partial P}{\partial \varpi_{i2}} + \ldots,$$

on aura

$$\varpi_\mu = \xi_1 \varpi_{\mu 1} + \xi_2 \varpi_{\mu 2} + \ldots + \xi_\mu \varpi_{\mu\mu};$$

multiplions ces formules par $\frac{G_1}{D_1}$, $\frac{G_2}{D^2}$, ..., et ajoutons-les; nous aurons

$$F = F_1 \xi_1 + F_2 \xi_2 + \ldots + F_\mu \xi_\mu,$$

F_i désignant la valeur de F pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ...: les ξ sont donc indépendants des coefficients des φ; supposons φ_0 de degré m. Posons

$$\theta_i = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_{01}^i & \varphi_{02}^i & \ldots & \varphi_{0n}^i \\ \varphi_1 & \varphi_{11}^i & \varphi_{12}^i & \ldots & \varphi_{1n}^i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n & \varphi_{n1}^i & \varphi_{n2}^i & \ldots & \varphi_{nn}^i \end{vmatrix},$$

φ_{0j}^i étant défini comme φ_{hj}^i. On aura

$$\theta_i = \varpi_i \varphi_0 + \varpi_i^{(1)} \varphi_1 + \ldots + \varpi_i^{(n)} \varphi_n.$$

les $\varpi_i^{(k)}$ étant des fonctions analogues aux ϖ_i. On aura évidemment

$$\theta_i = \varphi_0(\varpi_{i1}\xi_1 + \varpi_{i2}\xi_2 + \ldots) + \varphi_1(\varpi_{i1}^{(1)}\xi_1 + \ldots) + \ldots,$$

c'est-à-dire, en appelant θ_{ij} la valeur de θ_i pour $x_1 = z_{1j}$, $x_2 = z_{2j}$, ...,

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \xi_1 \theta_{11} + \xi_2 \theta_{12} + \ldots + \xi_\mu \theta_{1\mu}, \\ \theta_2 = \xi_1 \theta_{21} + \xi_2 \theta_{22} + \ldots + \xi_\mu \theta_{2\mu}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Il est facile de conclure de là que

$$\Theta = \Sigma \pm \theta_{11}, \theta_{22}, \ldots, \theta_{\mu\mu}$$

est le premier membre de la résultante de

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = \varphi_n = 0.$$

En effet, si dans (7) on remplace les x par les solutions de $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ... $\varphi_n = 0$ et si l'on désigne par θ_i^j la valeur de θ_i quand x_1, x_2, ... sont l'une des solutions des équations en question, les équations (3) montrent que

$$(4) \qquad \Sigma \pm \theta_1^1, \theta_2^2, \ldots, \theta_\mu^\mu = \Theta X,$$

X désignant le déterminant $\Sigma \pm \xi_1^1, \xi_2^2, \ldots, \xi_\mu^\mu$, où ξ_i^j désigne la valeur que prend ξ_i pour une solution de $\varphi_1 = 0$, ... $\varphi_n = 0$; mais $\Sigma \pm \theta_1^1, \theta_2^2$, ... est égal à $\varphi_{01}, \varphi_{02}, \ldots, \varphi_{0\mu}$, H, H désignant un certain facteur indépendant de φ_0. Si dans (4) on suppose $\varphi_0 = 1$, elle devient

$$(5) \qquad H = \Pi X;$$

de (4) et de (5) on tire

$$\varphi_{01}, \varphi_{02}, \ldots, \varphi_{0\mu} = \frac{\Theta}{\Pi},$$

et comme Π est indépendant de φ, $\Theta = 0$ est la résultante des équations (5), ce que l'on savait.

Les équations (3) ou $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = 0$ se réduisent à $\mu - 1$ distinctes quand $\Theta = 0$; en leur adjoignant

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\mu,$$

elles déterminent ξ_1, ξ_2, ... pour la solution commune et une fonction de degré $m - 1$ au plus $G(x_1, x_2, \ldots)$

de cette solution sera donnée par la formule

$$G = G_1 \xi_1 + G_2 \xi_2 + \ldots - G_\mu \xi_\mu.$$

Discussion. — Si Θ est nul ainsi que ses mineurs d'ordre p, les équations (3) se réduisent à $\mu - p - 1$ distinctes seulement; les ξ d'une solution ne sont plus déterminés; cela tient à ce que les équations $\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = 0$ ont $p + 1$ solutions communes; on trouvera, par exemple, les x_1 de ces solutions en posant

$$\begin{array}{lcl} x_1^{p+1} & = & \alpha_{11}^{p+1} \xi_1 - \ldots + \alpha_{1\mu}^{p+1} \xi_\mu, \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1 & = & \alpha_{11} \xi_1 - \ldots + \alpha_{1\mu} \xi_\mu, \\ 1 & = & \xi_1 + \ldots + \xi_\mu; \end{array}$$

on éliminera les ξ entre les équations auxquelles se réduisent (3) (où l'on fera $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = 0$) et les équations précédentes, et l'on aura une équation du degré $p + 1$ pour déterminer les diverses valeurs de x_1.

En particulier, si tous les θ_{ij} étaient nuls, les équations $\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = 0$ auraient μ solutions communes.

En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que les équations en question aient $p + 1$ solutions communes est que les

$$\frac{\partial^p \Theta}{\partial \theta_{i j} \partial \theta_{k l} \ldots}$$

soient tous nuls. Ces conditions, bien entendu, ne sont pas toutes distinctes.

J'ai déjà montré (*loc. cit.*) que l'on pouvait lire, sur l'équation $\Theta = 0$, les principales propriétés de la résultante; je ne reviendrai donc pas ici sur ce point.

Les raisonnements qui précèdent manquent peut être de rigueur, mais les résultats sont très probablement exacts.