NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Sur les segments de coniques limités à une normale

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 215-217

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__215_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[L¹9a] SUR LES SEGMENTS DE CONIQUES LIMITÉS A UNE NORMALE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Considérons l'aire du segment compris entre une conique et une normale à cette conique, et cherchons la position de cette normale pour laquelle cette aire est minimum.

Ce problème a été traité par Ossian Bonnet, au moyen de calculs assez compliqués (*Nouvelles Annales*, 1re série, t. III, p. 64). Nous allons le résoudre ici par un procédé purement élémentaire en nous appuyant sur un théorème que nous avons donné dans ce Recueil (3e série, t. V, p. 298).

Supposons que la normale en M à la conique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} = 1 \qquad (\text{où } \varepsilon = \pm 1), \tag{1}$$

rencontre la courbe au point V.

Si l'aire comprise entre la courbe et la normale MV est minimum, sa différentielle est nulle. Par suite, les triangles formés avec la normale infiniment voisine sont égaux. On en déduit immédiatement que le centre de courbure ω situé sur MV est le milieu de ce segment de normale.

Le cercle osculateur en M, que nous représenterons par (ω), passe donc par le point V. Or, nous avons fait voir à l'endroit cité que la corde commune à ce cercle et à la conique passe par le point G dont les coordonnées η et ζ sont liées aux coordonnées α et β du centre de courbure ω par les équations

$$\frac{\eta}{\alpha} + \frac{\zeta}{\beta} = 1, \tag{2}$$

$$\frac{\eta}{a^2\alpha} + \frac{\zeta}{\varepsilon b^2 \beta} = 0. \tag{3}$$

Ici, la corde commune n'étant autre que la normale MV, le point G doit être sur cette normale, ce qui exige, x et y étant les coordonnées du point M, que l'on ait

$$a^2 \frac{\eta}{x} - b^2 \frac{\zeta}{y} = a^2 - b^2. \tag{4}$$

Si, dans les équations (2) et (3), nous remplaçons α et β par leurs expressions

$$\alpha = x^3 \frac{a^2 - \varepsilon b^2}{a^4}, \qquad \beta = -y^3 \frac{a^2 - \varepsilon b^2}{b^4},$$

nous pouvons les écrire

$$(2') \qquad \frac{\eta a^4}{x^3} - \frac{\zeta b^4}{y^3} = a^2 - \varepsilon b^2,$$

$$(3') \qquad \frac{\eta a^2}{x^3} - \frac{\zeta \varepsilon b^2}{y^3} = 0.$$

L'élimination de η et ζ entre (2'), (3') et (4) est des plus faciles. Elle donne

$$(5) \qquad x^2 - y^2 = a^2 - \varepsilon b^2.$$

Les points M cherchés sont donc à la rencontre de la conique (1) et de l'hyperbole équilatère (5) qui a pour sommets sur l'axe des x les foyers de la conique (1).

De (1) et (5) on tire

$$(6) \qquad x = \frac{a^2}{\pm\sqrt{a^2 + \varepsilon b^2}}, \qquad y = \frac{\varepsilon b^2}{\pm\sqrt{a^2 + \varepsilon b^2}}.$$

Il est dès lors très facile de construire les points demandés. Remarquons que de (6) on tire

$$a^2 y = \pm \varepsilon b^2 x,$$

ce qui prouve que *la normale en* M, dont le coefficient angulaire est égal à $\frac{a^2 y}{\varepsilon b^2 x}$, *fait un angle de* 45° *avec l'axe des* x. Tel est le résultat qu'avait remarqué O. Bonnet.

Si de l'ellipse on passe à la parabole considérée comme sa limite, l'hyperbole équilatère, ayant pour sommets les foyers et qui détermine les points demandés, devient la perpendiculaire à l'axe élevée par le foyer.