MAURICE FOUCHÉ

Sur la définition de l'intégrale définie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 207-215

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__207_1>

[C2h]

SUR LA DÉFINITION DE L'INTÉGRALE DÉFINIE;

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,
Professeur au collège Sainte-Barbe.

On rencontre, dès les Mathématiques élémentaires, un certain nombre de quantités qui ne peuvent être définies avec précision que comme des limites de sommes d'infiniment petits, parce qu'elles s'expriment analytiquement par une intégrale définie. Tels sont la longueur d'une ligne courbe, l'aire d'une figure plane limitée par une courbe, le volume de la pyramide, celui du secteur sphérique, le centre de gravité d'une ligne, etc. Toutes ces définitions, ainsi que celle de l'intégrale définie qui les comprend toutes, sont généralement données par la considération d'une suite de termes dont chacun est une somme de quantités qu'on fait tendre vers o. Cette manière de procéder a l'inconvénient d'entraîner des longueurs, parce qu'il faut démontrer : 1° que les termes de la suite considérée tendent vers une limite bien déterminée et 2° que cette limite reste la même, quelle que soit la manière de former la suite convergente, car la même quantité peut être définie au moyen d'une infinité de suites différentes qui toutes tendent vers la même limite. La définition de la longueur d'une ligne courbe, qu'on rencontre la première dans l'ordre de l'Enseignement, est assurément l'une des questions les plus difficiles que l'on ait à traiter dans la classe de Mathématiques élémentaires, à tel point qu'il est rare qu'on puisse l'exposer aux élèves avec toute la rigueur et tous les développements nécessaires. La définition de l'intégrale définie, envisagée d'une manière abstraite et indépendamment de toute considération géométrique, a paru assez pénible pour qu'on ait cru devoir la supprimer du programme d'admission à l'École Polytechnique.

On obtient des raisonnements beaucoup plus simples et beaucoup plus rapides, si, à la considération d'une suite de termes pouvant être rangés linéairement, on substitue la considération des *ensembles*.

M. Tannery a montré qu'on pouvait définir un nombre incommensurable par la propriété de partager tous les nombres commensurables en deux classes telles que tout nombre de la première classe soit plus petit que tout nombre de la seconde. Toute règle qui permettra d'effectuer cette classification de *tous* les nombres commensurables définit, par cela même, un nombre incommensurable qui sépare les deux classes. S'il arrive qu'un *seul* nombre commensurable échappe à cette classification, la règle, au lieu de définir un nombre incommensurable, définit ce nombre commensurable *unique* qui sépare tous les autres en deux classes. C'est ainsi que $\sqrt{2}$ définit un nombre incommensurable, parce que tous les nombres commensurables ont leur carré plus petit que 2 (1re classe) ou plus grand que 2 (2e classe), tandis que la fraction décimale périodique

$$0,1111\ldots$$

définit le nombre commensurable $\frac{1}{9}$, parce que cette fraction est la seule qui ne puisse être classée parmi les fractions plus petites que l'une des fractions décimales

$$\begin{array}{l} 0,1, \\ 0,11, \\ 0,111, \\ \ldots\ldots \\ 0,111\ldots1, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

ou parmi les fractions plus grandes que l'une des fractions

$$\begin{array}{l} 0,2, \\ 0,12, \\ 0,112, \\ \ldots\ldots, \\ 0,111\ldots12, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

En partant de cette idée si simple, il est facile d'établir une théorie complète des nombres incommensurables, de définir avec précision les opérations effectuées sur cette sorte de nombres, et de démontrer en toute rigueur que le nombre incommensurable est bien la limite de ses valeurs approchées, en ce sens que la différence entre le nombre incommensurable et ses valeurs approchées devient et reste aussi petite qu'on veut, dès que l'excès de la valeur approchée par excès sur la valeur approchée par défaut est lui-même plus petit que l'erreur qu'on ne veut pas dépasser.

C'est encore en partant de la même idée qu'on peut arriver à définir très simplement les quantités qui sont des sommes d'infiniment petits.

Il est inutile de dire ce qu'on entend par un *ensemble* de nombres. Je dirai seulement que je considère des *ensembles* contenant une *infinité de nombres* commensurables ou non. Je désigne un ensemble par $E(\alpha)$ et les nombres qui le composent par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, sans que les indices attachent à ces nombres l'idée de les ranger dans un ordre quelconque.

Je dirai que deux ensembles $E(\alpha)$ et $E(\beta)$ sont *contigus* si : 1° tout nombre du premier est plus petit que tout nombre du second :

$$\alpha_i < \beta_j,$$

quels que soient les indices, et si 2° on peut trouver deux nombres, l'un dans l'un des ensembles, l'autre dans l'autre, tels que leur différence soit plus petite qu'un nombre quelconque donné à l'avance :

$$\beta_h - \alpha_h < \varepsilon,$$

ε étant arbitraire.

Il est presque évident que deux ensembles contigus définissent un nombre qui les sépare. On peut l'établir rigoureusement en remarquant qu'à cause de l'hypothèse

$$\beta_h - \alpha_h < \varepsilon.$$

il est impossible que deux nombres A et B soient tous les deux compris entre les nombres α et les nombres β. Donc, tout nombre commensurable sera ou plus petit qu'un nombre α (1^{re} classe) ou plus grand qu'un nombre β (2^e classe), sauf peut-être un seul. D'autre part, à cause de l'hypothèse

$$\alpha_i < \beta_j,$$

tout nombre de la première classe sera plus petit que tout nombre de la seconde classe. Donc, d'après la définition de M. Tannery, les deux ensembles définissent un nombre qui est incommensurable si tous les nombres commensurables sont classés, et commensurable si un nombre commensurable échappe à la classification. De plus, le nombre A ainsi défini est bien la limite commune des deux ensembles, au sens habituel du mot *limite,* car on peut toujours choisir les indices de manière que les deux différences $\beta_i - A$ et $A - \alpha_i$ soient plus petites qu'un nombre ε, puisque chacune de ces deux différences est plus petite que

$$\beta_i - \alpha_i.$$

Ces principes préliminaires qui, du reste, peuvent servir à d'autres objets, par exemple à la définition de a^x quand x est incommensurable, étant bien établis, j'arrive à la définition de la limite d'une somme d'infiniment petits, et, comme toutes les questions de cette nature se ramènent à l'intégrale définie, je me bornerai à traiter la définition de l'intégrale définie, le même raisonnement pouvant s'adapter aux questions géométriques analogues qu'on voudrait traiter directement.

Soit $f(x)$ une fonction de x que je suppose seulement bien déterminée et croissante quand x varie de a à b. Je considère une suite

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n$$

de valeurs croissantes de x comprises entre a et b :

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < b,$$

et je forme les deux expressions

$$\begin{aligned}\alpha = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1)\\ + (x_3 - x_2)f(x_2) + \ldots + (b - x_n)f(x_n),\\ \beta = (x_1 - a)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2)\\ + (x_3 - x_2)f(x_3) + \ldots + (b - x_n)f(b).\end{aligned}$$

Si l'on fait varier les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à chaque système de ces nombres correspondront une valeur de α et une valeur de β. Je dis que toutes les valeurs de α et toutes les valeurs de β forment deux ensembles contigus.

En effet, en premier lieu, d'après nos hypothèses, chacun des binomes $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ... est positif, et, puisqu'on a supposé la fonction $f(x)$ croissante, chaque terme de β est plus grand que le terme correspondant de α. Donc, en faisant la somme, on a d'abord

$$\beta > \alpha.$$

Si maintenant on considère deux systèmes différents des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soit

$$\begin{aligned}\alpha &= (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (b - x_n)f(x_n),\\ \beta' &= (x'_1 - a)f(x'_1) + (x'_2 - x'_1)f(x'_2) + \ldots + (b - x'_{n'})f(b).\end{aligned}$$

J'appelle $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n+n'}$ les nombres x_i ou x'_j rangés par ordre de grandeur croissante, et je pose

$$\begin{aligned}\alpha'' &= (z_1 - a)f(a) + (z_2 - z_1)f(z_1) + \ldots + (b - z_{n+n'})f(z_{n+n'}),\\ \beta'' &= (z_1 - a)f(z_1) + (z_2 - z_1)f(z_2) + \ldots + (b - z_{n+n'})f(b).\end{aligned}$$

On aura, soit

$$x_p - x_{p-1} = z_q - z_{q-1},$$

soit

$$x_p - x_{p-1} = (z_q - z_{q-1}) + (z_{q-1} - z_{q-2}) + \ldots + (z_r - z_{r-1})$$

suivant que x_{p-1} et x_p seront deux termes consécutifs ou non de la suite des z.

Il en résulte que chaque terme de α est égal, soit à l'un des termes de α'', soit à une somme de plusieurs termes consécutifs de α'' dans lesquels on aurait remplacé les valeurs différentes de $f(z)$ par la première de ces valeurs, laquelle est la plus petite. Donc

$$\alpha < \alpha''.$$

On verrait de même que

$$\beta' > \beta''.$$

Mais on a $\beta'' > \alpha''$, comme on l'a vu précédemment pour α et β, et, par conséquent,

$$\beta' > \alpha,$$

quelles que soient les valeurs de α et β', ce qui est la première condition pour que les ensembles soient contigus.

En second lieu, si l'on suppose chacun des binomes $x - a$, $x_2 - x_1$, ..., plus petit qu'un nombre h, la différence

$$\beta - \alpha = (x_1 - a)[f(x_1) - f(a)] + (x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_1)] + \ldots,$$

qui est une somme de termes tous positifs, sera plus petite que

$$h[f(x_1) - f(a)] + h[f(x_2) - f(x_1)] + \ldots + h[f(b) - f(x_n)]$$

et, en mettant h en facteur commun,

$$\beta - \alpha < h[f(b) - f(a)],$$

quantité qu'on peut réduire autant qu'on voudra, puisque h est arbitraire.

Les deux ensembles $E(\alpha)$ et $E(\beta)$, étant contigus, définissent un nombre A, qui est la valeur de l'intégrale définie, et qu'on représente par le symbole

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Cette valeur A est la limite commune vers laquelle tendent les nombres α et β quand la différence des valeurs consécutives de x tend vers zéro, car chacune des différences

$$\beta - \mathrm{A}, \quad \mathrm{A} - \alpha$$

est plus petite que $\beta - \alpha$ et, par suite, plus petite que

$$h[f(b) - f(a)],$$

quantité qui est elle-même plus petite que ε dès que toutes les différences $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ... sont plus petites que

$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Nous avons supposé la fonction croissante de a à b. Il n'y aurait presque rien à changer au raisonnement précédent si elle était décroissante. Dans le cas général, on partagera l'intervalle de variation en plusieurs autres satisfaisant à la condition énoncée, et l'on fera la somme des résultats.

Le raisonnement précédent ne suppose pas la fonction continue, mais il suppose qu'on peut partager l'intervalle de variation en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels la fonction est constamment croissante ou constamment décroissante. On peut le modifier en remplaçant dans les expressions de α et β les valeurs successives de $f(x)$ par le minimum m et le maximum M des valeurs de la fonction dans chacun des intervalles :

$$\alpha = (x_1 - a)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + \ldots + (b - x_n)m_n,$$
$$\beta = (x_1 - a)\mathrm{M}_1 + (x_2 - x_1)\mathrm{M}_2 + \ldots + (b - x_n)\mathrm{M}_n$$

On démontrera aisément, toujours par la considération des quantités α'' et β'', qu'on a bien la condition

$$\alpha_i < \beta_j.$$

Mais, pour établir la condition

$$\beta - \alpha < \varepsilon,$$

il faudra supposer qu'on peut prendre les intervalles assez petits pour que chacune des différences $M_1 - m_1$, $M_2 - m_2$, ..., soit plus petite qu'un nombre arbitraire ε. Or on sait que cela est possible toutes les fois que la fonction est finie et continue.

Les deux démonstrations sont à peu près aussi simples; mais elles montrent que, pour qu'une fonction soit intégrable, il suffit qu'elle rentre dans l'un des deux cas qui permettent de faire l'un ou l'autre raisonnement. Il en résulte qu'une fonction est intégrable dans les deux cas suivants :

1° Si l'on peut partager l'intervalle de variation en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels la fonction est toujours croissante ou toujours décroissante;

2° Si l'on peut partager l'intervalle de variation en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels la fonction est finie et continue.