NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FÉLIX KLEIN

L'œuvre géométrique de Sophus Lie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__1_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[V9] L'ŒUVRE GÉOMÉTRIQUE DE SOPHUS LIE (1);

PAR M. FÉLIX KLEIN.

(Traduit de l'anglais par M. L. LAUGEL.)

Pour bien comprendre tout le génie mathématique de *Sophus Lie,* nous ne devons pas nous en tenir aux Volumes qu'il vient de publier récemment en collaboration avec le Dr *Engel,* mais il faut encore étudier les premiers Mémoires qu'il fit paraître pendant les premières années de sa carrière scientifique. C'est là que se révèle le grand *géomètre* qui a nom *Sophus Lie;* dans ses dernières publications, voyant qu'il était imparfaitement compris des mathématiciens, accoutumés plutôt au point de vue analytique, il a adopté un traitement très général basé sur l'Analyse seule et qu'il n'est pas, du reste, toujours aisé de suivre.

Heureusement pour moi, j'eus l'avantage d'être initié de très près aux idées de *Lie* à une époque très

(1) Extrait de l'Ouvrage : *The Evanston Colloquium;* Conférences sur les Mathématiques faites du 28 août au 9 septembre 1893 devant le Congrès des mathématiciens réunis à Chicago lors de l'Exposition, par M. FELIX KLEIN, Professeur à Göttingue; recueillies par M. ALEX. ZIWET; Londres et New-York, Mac Millan et Cie, 1894.

primitive, lorsqu'elles étaient encore, comme disent les chimistes, « à l'état naissant », et par conséquent des plus capables de produire une énergique « réaction ».

Aussi ai-je aujourd'hui en vue de vous entretenir surtout du Mémoire *Sur les complexes et en particulier les complexes de droites et de sphères et de leur application à la théorie des équations aux dérivées partielles* (*Math. Annalen*, t. V, 1872, p. 145-256).

Avant de définir la place qu'occupe ce Mémoire dans le développement historique de la Géométrie, il faut dire quelques mots de deux grands géomètres d'une époque antérieure : *Plücker* (1801-1868) et *Monge* (1746-1818). Le nom de *Plücker* est familier à toute personne qui connaît un peu de Mathématiques, par ses formules relatives aux courbes algébriques. Mais ce qui aujourd'hui, pour nous, est de plus d'importance, c'est son idée généralisée de l'élément d'espace. La Géométrie ordinaire, où le point se présente comme élément, traite de l'espace comme ayant trois dimensions, conformément aux trois constantes qui déterminent la position d'un point. Une transformation dualistique donne le plan comme élément. L'espace, en ce cas, a encore trois dimensions, car il se présente trois constantes indépendantes entre elles dans l'équation d'un plan. Mais si l'on choisit la droite comme élément d'espace, ce dernier doit être regardé comme quadri-dimensionnel, puisque quatre constantes indépendantes déterminent une ligne droite. Et encore, si l'on prend comme élément d'espace une surface quadrique F_2, l'espace aura neuf dimensions, car chaque élément de ce type exige neuf constantes pour sa détermination, les neuf constantes indépendantes entre elles de la surface du second ordre F_2. En d'autres termes, l'espace contient ∞^9 quadriques. Cette conception des hyperespaces doit être soigneusement distinguée de celle de *Grassmann* et autres. En effet, *Plücker* rejetait toute autre conception d'espaces à plus de trois dimensions comme étant trop abstraite. Le travail de *Monge,* qui est ici d'importance capitale, est son *Application de l'Analyse à la Géométrie* (1809, *nouvelle édition,* 1850). On sait qu'il y traite des équations différentielles aux dérivées partielles et totales des premier et second ordre et en fait l'application à des questions géométriques telles que : courbure des surfaces, lignes de courbure, lignes géodésiques, etc. Le traitement des problèmes de la Géométrie au moyen de l'Analyse infinitésimale est un caractère de cet Ouvrage; mais un autre trait, peut-être encore plus important, qui le caractérise, c'est la réciproque, c'est-à-dire l'application de l'intuition géométrique à l'Analyse.

Or c'est là le caractère prédominant de l'œuvre de *Lie;* et il en augmente la puissance et la fécondité en adoptant l'idée plückérienne d'un élément d'espace généralisé et en étendant encore cette conception fondamentale.

Quelques exemples serviront mieux que tout à donner une idée de la portée de l'œuvre. Je choisis, comme je l'ai déjà fait autre part, la *Géométrie des sphères* de *Lie* (*Kugel-Geometrie*).

Prenant l'équation de la sphère sous la forme

$$x^2+y^2+z^2-2Bx-2Cy-2Dz+E=0,$$

les coefficients B, C, D, E peuvent être regardés comme les coordonnées de la sphère, et l'espace ordinaire se présente alors comme une variété (1) à quatre dimen-

(1) [*Mannigfaltigkeit*]. Variété. C'est la traduction adoptée en général. M. Poincaré emploie aussi ce mot. Voir *Analysis Situs* (*Journal de l'École Polytechnique,* 2e série, Cahier I).

Note du Traducteur.

sions. Quant au rayon R de la sphère, nous avons

$$R^2 = B^2 + C^2 + D^2 - E,$$

relation qui lie la cinquième grandeur R aux quatre coordonnées B, C, D, E.

Pour introduire des coordonnées homogènes, posons

$$B = \frac{b}{a}, \qquad C = \frac{c}{a}, \qquad D = \frac{d}{a}, \qquad E = \frac{e}{a}, \qquad R = \frac{r}{a};$$

alors $a : b : c : d : e$ sont les cinq coordonnées homogènes de la sphère, et la sixième grandeur r leur est liée par l'entremise de l'équation quadratique homogène

$$r^2 = b^2 + c^2 + d^2 - ae. \tag{1}$$

Maintenant, la Géométrie des sphères a été traitée d'après deux méthodes qui doivent être soigneusement distinguées l'une de l'autre. Dans la première, que nous pouvons désigner par *Géométrie élémentaire des sphères,* on emploie seulement les cinq quantités a, b, c, d, e, tandis que dans l'autre, que je nommerai *Géométrie supérieure des sphères* ou *de Lie,* on introduit encore la grandeur r. Et, dans ce dernier système, une sphère a six coordonnées homogènes a, b, c, d, e, r qui sont liées entre elles par l'équation (1).

A un point de vue plus élevé, la distinction entre ces deux géométries, ainsi que leur caractère individuel, est mise en pleine lumière si l'on considère *le groupe* qui correspond à chacune d'elles.

En effet, tout système de géométrie est caractérisé par son groupe, au sens que j'ai exposé dans mon *Programme d'Erlangen* (*Études comparatives sur les nouvelles recherches géométriques.* Programme présenté à la Faculté philosophique et au Sénat de l'Université du roi Frédéric-Alexandre à Erlangen. Deichert-

Erlangen; 1872. Traduit en anglais par Haskell. *Bulletin de la Société mathématique de New-York*, t. II, 1893, p. 215-249). Ainsi, chaque système de géométrie ne s'occupe que de ces relations de l'espace qui restent inaltérées par toutes les transformations de son groupe.

Par exemple, dans la géométrie ordinaire des sphères, le groupe est formé par toutes les substitutions linéaires des cinq quantités a, b, c, d, e qui laissent inaltérée l'équation quadratique homogène

$$b^2 + c^2 + d^2 - ae = 0. \tag{2}$$

Ceci fournit $\infty^{25-15} = \infty^{10}$ substitutions. En adoptant cette définition, nous obtenons des transformations ponctuelles d'un caractère simple. L'interprétation de l'équation (2) se traduit géométriquement en disant que le rayon est nul. Toute sphère de rayon zéro, c'est-à-dire tout point, se transforme ainsi en un point. De plus la polaire

$$2bb' + 2cc' + 2dd' - ae' - a'e = 0$$

reste inaltérée par l'effet de la transformation, et l'on a cette conséquence que les sphères orthogonales se transforment en sphères orthogonales. Ainsi le groupe de la géométrie élémentaire des sphères est caractérisé comme *groupe conforme*, groupe que l'on sait être celui qui correspond à la transformation par inversion, c'est-à-dire par rayons vecteurs réciproques, et qui est bien connu par ses applications en Physique mathématique.

M. *Darboux* a grandement développé cette géométrie élémentaire des sphères. Toute équation du second degré

$$F(a, b, c, d, e) = 0,$$

adjointe à la relation (2), représente une Punckt-fläche (*surface ponctuelle*) désignée par M. *Darboux* sous le nom de *cyclide*. Au point de vue de la Géométrie ordinaire projective, la cyclide est une surface du quatrième ordre, admettant une conique double spéciale, le cercle de l'infini. On trouvera une étude détaillée de ces cyclides dans le célèbre Ouvrage de M. *Darboux : Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal,* et en d'autres Mémoires de cet illustre auteur ([1]).

Comme les quadriques peuvent être regardées comme des cas particuliers de cyclides, il se présente aussi une méthode de généralisation des propriétés connues des quadriques en les étendant aux cyclides. Ainsi, M. *Bôcher,* de l'Université de *Harvard* (*États-Unis*), dans sa dissertation (*Sur les développements en série de la théorie du potentiel;* Mémoire couronné; *Göttingue, Dietrich;* 1891), a traité de l'extension d'un problème de la théorie du potentiel, relatif à un corps ayant pour limites des surfaces du second degré, cas bien connu, en considérant un corps limité par des cyclides. M. *Bôcher* doit publier dans quelques mois un Ouvrage étendu sur le même sujet ([1]).

Dans la *Géométrie supérieure* des sphères *de Lie,* les six coordonnées homogènes $a:b:c:d:e:r$ sont liées, comme nous l'avons déjà dit, par l'équation qua-

---

([1]) En particulier, *Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires,* 2e édition, 1896. Hermann, Paris. Présenté à l'Académie des Sciences en 1869. Un Avant-propos de M. *Darboux,* dont il est superflu de signaler l'intérêt, est reproduit dans le Catalogue n° 48 (décembre 1895) de la librairie Hermann, 8, rue de la Sorbonne, Paris.

Note du Traducteur.

([1]) Maxime Bôcher, *Sur les développements en série dans la Théorie du potentiel,* avec préface de *Félix Klein.* Leipzig, Teubner; 1894. *Note du Traducteur.*

dratique homogène

$$b^2 + c^2 + d^2 - r^2 - ae = 0.$$

Le groupe correspondant est le groupe de substitutions linéaires transformant cette équation en elle-même. Nous avons ainsi un groupe de $\infty^{36-21} = \infty^{15}$ substitutions. Mais ceci n'est pas un groupe de transformations ponctuelles. En effet, une sphère de rayon zéro devient une sphère dont, en général, le rayon est différent de zéro. Car, si l'on pose, par exemple,

$$B' = B, \qquad C' = C, \qquad D' = D, \qquad E' = E,$$
$$R' = R + \text{const.},$$

on voit que la transformation consiste en une simple dilatation, si l'on peut s'exprimer ainsi, de chaque sphère, un point devenant une sphère de rayon donné.

La signification de ce fait que l'équation polaire

$$2bb' + 2cc' + 2dd' - 2rr' - ae' - a'e = 0$$

demeure invariante pour toute transformation du groupe se traduit tout simplement par cette importante circonstance que les sphères primitivement en contact demeurent encore en contact. Le groupe appartient donc à cette classe importante de *transformations* dites *de contact* que nous allons considérer plus loin avec quelque détail.

Lorsque l'on étudie une géométrie spéciale, comme, par exemple, la géométrie des sphères de *Lie,* deux méthodes se présentent :

1° Nous pouvons envisager des équations de divers degrés et étudier ce qu'elles représentent. En se livrant à ces recherches, lorsque *Lie* dut créer une terminologie relative aux diverses configurations ainsi obtenues, il fit usage des désignations introduites par *Plücker* dans sa géométrie de la droite. Ainsi une seule équation

$$F(a, b, c, d, e, r) = 0$$

est dite représenter *un complexe* du premier, second, etc. ordre, suivant le degré de l'équation. Un complexe renferme donc ∞^3 sphères. Deux équations telles que

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0$$

représentent *une congruence* renfermant ∞^2 sphères. Trois équations

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0$$

représentent un *système de sphères,* leur nombre étant ∞^1. Il faut, du reste, ne pas oublier que, dans chaque cas, l'équation du second degré

$$b^2 + c^2 + d^2 + r^2 - ae = 0$$

est sous-entendue combinée avec l'équation $F = 0$.

Il est bon aussi d'observer que ces mots sont employés par d'autres auteurs dans ce que j'ai nommé *Géométrie élémentaire des sphères,* où leur sens est alors naturellement différent.

2° Une autre méthode qui se présente lorsque l'on étudie une nouvelle géométrie est la suivante : On se demandera comment les configurations ordinaires de la géométrie ponctuelle pourront être traitées à l'aide du nouveau système. Cette ligne de recherches a conduit *Sophus Lie* à des résultats du plus haut intérêt.

Dans la Géométrie ordinaire, l'on conçoit une surface comme un lieu de points; dans la Géométrie de *Lie*, la surface apparaît comme l'ensemble de toutes les sphères qui ont un contact avec la surface. Ceci donne une triple infinité de sphères, ou complexe de sphères

$$F(a, b, c, d, e, r) = 0.$$

Ceci naturellement n'est pas un complexe ***général,*** car tout complexe n'est pas tel qu'il doive nécessairement avoir un contact avec une surface, et l'on a démontré que la condition à remplir pour un complexe de sphères, lorsque toutes ses sphères doivent être tangentes à une surface, est la suivante :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial d}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 - \frac{\partial F}{\partial a}\,\frac{\partial F}{\partial e} = 0.$$

Pour donner au moins un exemple relatif au développement de cette belle théorie, je mentionnerai ici que, parmi le nombre infini de sphères tangentes à la surface en un point quelconque, il en est deux qui ont avec elle un contact *stationnaire*. Elles sont dites *les sphères principales*. Les lignes de courbure de la surface peuvent être alors définies comme les courbes le long desquelles les sphères principales sont tangentes à la surface en deux points consécutifs.

La Géométrie de la droite de *Plücker* peut être étudiée d'après les deux méthodes que nous venons d'indiquer. Dans cette géométrie, désignons alors par p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23} les six coordonnées habituelles homogènes avec $p_{ik} = -p_{ki}$. Nous avons alors l'identité

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

et nous choisirons pour groupe les ∞^{15} substitutions linéaires qui transforment cette équation en elle-même. Ce groupe correspond à l'ensemble total des collinéations (¹) et des *inversions* (ou transformations par rayons vecteurs réciproques); autrement dit, c'est le groupe projectif. La raison de ceci tient à ce fait que l'équa-

(¹) C'est le mot employé, en général, en Allemagne pour désigner les transformations homographiques. *Note du traducteur.*

tion polaire

$$p_{12}p'_{34}+p_{13}p'_{42}+p_{14}p'_{23}+p_{34}p'_{12}+p_{42}p'_{13}+p_{23}p'_{14}=0$$

représente simplement l'intersection des deux droites p et p'.

Maintenant, *Lie* a institué une comparaison du plus haut intérêt entre la géométrie plückérienne de la droite et sa propre géométrie des sphères. Dans chacune de ces géométries, il se présente six coordonnées homogènes qui sont respectivement liées entre elles par une équation quadratique homogène. Le discriminant de chaque équation est différent de zéro. Il s'ensuit que nous pouvons passer de l'une à l'autre de ces deux géométries au moyen de substitutions linéaires.

Ainsi, pour transformer

$$p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0$$

en

$$b^2+c^2-d^2-r^2-ae=0,$$

il suffit de poser

$$p_{12}=b+ic, \qquad p_{13}=d+r, \qquad p_{14}=-a,$$
$$p_{34}=b-ic, \qquad p_{42}=d-r, \qquad p_{23}=e.$$

Il résulte du caractère linéaire des substitutions que les équations polaires sont transformées de même l'une en l'autre; d'où ce merveilleux résultat : *Deux sphères en contact correspondent à deux droites qui se coupent.*

Il n'est pas inutile de remarquer que les équations de transformation renferment l'unité imaginaire i; et la loi, dite *loi d'inertie des formes quadratiques,* nous indique immédiatement que cette introduction de l'imaginaire est non seulement inévitable, mais essentielle.

Pour donner une idée de la portée de cette transformation de la géométrie de la droite en géométrie des sphères et *vice versa,* considérons trois équations linéaires

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0,$$

les variables étant, soit des coordonnées de droites, soit des coordonnées de sphères. Dans le premier de ces deux cas, les trois équations représentent un *système de droites,* c'est-à-dire l'un des deux systèmes de droites, génératrices d'un hyperboloïde à une nappe. On sait bien que chaque droite de l'un ou l'autre système coupe toutes les droites de l'autre système. Transformons en géométrie des sphères; nous obtenons *un système de sphères* correspondant à chaque système de droites, et chaque sphère de l'un ou l'autre système est nécessairement tangente à toute sphère de l'autre système. Nous sommes en présence d'une configuration bien connue en Géométrie par d'autres études; en effet, toutes ces sphères sont l'enveloppe d'une surface célèbre sous le nom de *cyclide de Dupin.* Nous avons ainsi trouvé une corrélation bien remarquable entre la cyclide de Dupin et l'hyperboloïde à une nappe.

L'exemple peut-être le plus frappant de la fécondité de ces recherches de *Lie* est celui de sa belle découverte qu'à l'aide de cette transformation les lignes de courbure d'une surface sont transformées en lignes asymptotiques de la surface transformée, et réciproquement. Ceci se reconnaît immédiatement lorsque l'on prend la définition donnée ci-dessus pour les lignes de courbure, et que l'on traduit alors cette définition mot à mot dans le langage de la géométrie de la droite. Ainsi se trouve démontré que deux problèmes de Géométrie infinitésimale, longtemps regardés comme complètement distincts, sont au fond identiques. C'est là certainement une des plus élégantes contributions qui aient été faites de notre temps à la Géométrie différentielle.

La distinction entre les fonctions analytiques et les fonctions algébriques, si importante en pure Analyse, se présente encore dans le traitement géométrique.

Les fonctions *analytiques* sont celles que l'on peut représenter par des séries de puissances qui convergent dans une certaine région ayant pour contour la circonférence du cercle dit *de convergence*. En dehors de cette région, la fonction analytique n'est pas regardée comme donnée *a priori;* son prolongement dans des régions plus étendues est un sujet de recherches spéciales et peut conduire à des résultats tout différents, selon le cas particulier envisagé.

D'autre part, une fonction *algébrique* $w = \text{alg.}\,(z)$ est supposée connue dans tout le plan de la variable complexe et possède un nombre fini de valeurs pour chaque valeur de z.

De même en Géométrie, nous pouvons réserver toute notre attention à une portion limitée de courbe analytique ou de surface, par exemple en nous occupant de la construction de la tangente, de l'évaluation de la courbure, etc.; ou bien nous pouvons envisager l'ensemble total des courbes algébriques et des surfaces dans l'espace.

Presque toutes les applications du Calcul différentiel et intégral à la Géométrie appartiennent à la première branche ci-dessus de la Géométrie, et comme c'est principalement là ce qui m'occupera aujourd'hui, il n'est pas besoin de nous limiter strictement aux fonctions algébriques, mais nous pourrons employer des fonctions analytiques plus générales; toujours, bien entendu, en nous limitant à des portions finies de l'espace. J'ai cru bon de dire ceci une fois pour toutes, car il me semble qu'aux *États-Unis* l'unique considération des courbes algébriques est peut-être trop prédominante.

Dans la dernière Conférence, nous avons examiné la possibilité d'introduire de nouveaux éléments d'espace. Aujourd'hui encore, nous emploierons un nouvel élément; cet élément consiste en une portion infinitésimale de surface (ou mieux de son plan tangent). C'est ce que l'on nomme, et la désignation n'est pas très juste, *un élément de surface* (Flächen-element) et l'on peut le comparer par exemple à une écaille de poisson infiniment petite. A un point de vue plus abstrait, on peut le définir tout simplement comme la combinaison d'un plan et d'un point situé sur ce plan.

Comme l'équation d'un plan passant par un point (x, y, z) peut s'écrire sous la forme

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

x', y', z' désignant les coordonnées courantes, nous aurons x, y, z, p, q comme coordonnées de notre élément de surface, en sorte que l'espace se présente comme une variété à cinq dimensions. Si l'on emploie les coordonnées homogènes, le point (x_1, x_2, x_3, x_4) et le plan (u_1, u_2, u_3, u_4) passant par ce point sont liés par la relation

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0,$$

qui exprime leur position corrélative, et le nombre de constantes indépendantes entre elles est $3 + 3 - 1 = 5$.

Examinons alors comment la Géométrie ordinaire se présente dans cette représentation. Un point étant le lieu de tous les éléments de surface qui passent par ledit point est représenté comme une variété à deux dimensions; disons, pour abréger le langage, une M_2. Une courbe est représentée par la totalité de ces éléments de surface, qui ont leur point sur la courbe et dont le plan contient la tangente. Ces éléments forment encore une M_2. Enfin, une surface est donnée par ces éléments de surface, qui ont leurs points sur la surface et dont le plan coïncide avec le plan tangent à la surface. Ceux-ci forment encore une M_2.

Bien plus, toutes ces M_2 ont une bien importante propriété en commun. Deux éléments de surface consécutifs, qui appartiennent aux mêmes point, courbe ou surface respectivement, satisfont toujours à la condition

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

cas simple d'une relation dite de *Pfaff*; et réciproquement, si deux éléments de surface satisfont à cette condition, ils appartiennent aux mêmes point, courbe ou surface, selon les cas.

Nous avons ainsi ce résultat du plus haut intérêt que, dans la géométrie des éléments de surface, les points, aussi bien que les courbes et les surfaces, sont tous comme réunis en un tout ensemble, tous étant représentés par les variétés à deux dimensions qui jouissent de la propriété susdite. Cette définition est d'autant plus importante, qu'il n'existe pas d'autre M_2 jouissant de cette propriété.

Passons maintenant à ce type très général de transformations, auquel *Lie* a donné le nom de *transformations de contact*. Ce sont les transformations qui changent notre élément (x, y, z, p, q) en (x', y', z', p', q') par l'effet de substitutions :

$$\begin{aligned} x' &= \Phi(x, y, z, p, q), \\ y' &= \Psi(x, y, z, p, q), \\ z' &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p' &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q' &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

qui transforment en elle-même l'équation différentielle linéaire de *Pfaff*

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

La traduction géométrique de ceci, c'est que, par l'effet de la transformation, toute M_2 ayant la propriété donnée est transformée en une M_2 qui en jouit également. Ainsi, par exemple, une surface se transforme, en général, en une surface et, dans des cas spéciaux, en un point ou en une courbe. De plus, considérons deux variétés M_2 ayant entre elles un contact, autrement dit ayant un élément de surface en commun; ces M_2 sont changées par la transformation en deux autres M_2, qui ont aussi entre elles un contact. On comprend bien, par cet exemple, pourquoi *Lie* a choisi la désignation, classique aujourd'hui, de transformation de contact.

Lesdites transformations sont d'une telle importance et se présentent si fréquemment, que des cas particuliers avaient déjà, il y a bien longtemps, attiré l'attention des géomètres, mais ce n'était pas sous cette désignation naturellement, ni même à ce point de vue relatif au contact, en sorte que leur véritable et profonde portée restait ignorée.

J'ai donné de nombreux exemples de transformations de contact dans mon *Cours lithographié de Géométrie supérieure,* professé à *Göttingue*, pendant le semestre d'hiver de 1892-1893.

Ainsi, l'on en rencontre encore un intéressant exemple dans le domaine à deux dimensions, relativement au problème des engrenages de roues dentées. Le profil de la dent d'une roue est donné, on demande de trouver le profil de l'autre. J'ai exposé ceci dans une conférence faite à l'Exposition de *Chicago,* en employant des modèles, envoyés à l'Exposition par les Universités allemandes.

Je citerai encore un autre exemple, que l'on rencontre dans la théorie des perturbations en Astronomie. La méthode de la variation des paramètres, exposée par

Lagrange dans le Problème des trois corps, est équivalente à une transformation de contact dans un espace à dimensions supérieures.

Le groupe de ∞^{15} substitutions, traité dans la première partie de cette conférence, est aussi un groupe de transformations de contact, les collinéations et les inversions (transformation par rayons vecteurs réciproques) ayant toutes deux ce caractère. Les inversions donnent le premier exemple bien connu de la transformation d'un point en un plan (c'est-à-dire une surface) et d'une courbe en une développable (aussi une surface). Ces transformations de courbes doivent être considérées ici comme transformant *les éléments* des points ou courbes en *les éléments* de la surface.

Finalement nous avons des exemples de transformations de contact non seulement dans les transformations des sphères discutées dans la première Partie de cette conférence, mais encore dans la transition générale qui nous conduit de la géométrie plückérienne des droites à la géométrie des sphères de *Lie*.

Considérons ce dernier cas avec quelque détail.

En premier lieu, deux lignes droites qui se coupent ont évidemment un élément de surface en commun, et, comme les deux sphères correspondantes doivent aussi avoir un élément de surface en commun, elles auront un contact, ce qui est effectivement le cas dans notre transformation. Il sera maintenant intéressant de considérer de plus près la corrélation entre les éléments de surface d'une droite et ceux d'une sphère, bien qu'elle soit donnée par des formules où entre l'imaginaire. Prenons, par exemple, la totalité des éléments de surface appartenant à une circonférence sur l'une des sphères; nous pouvons la désigner sous le nom de *système circulaire d'éléments*. Dans la géométrie de la droite, à ceci correspond le système d'éléments de surface situés le long d'une génératrice d'une surface gauche, et ainsi de suite. Le théorème relatif à la transformation des lignes de courbure en lignes asymptotiques devient maintenant pour ainsi dire évident par lui-même. Au lieu de la ligne de courbure d'une surface nous devons ici considérer les éléments correspondants de la surface que nous pourrons nommer *système de courbure*. D'une façon similaire, une ligne asymptotique est remplacée par les éléments de la surface situés le long de cette ligne; nous pourrons les nommer *système osculateur*.

La correspondance entre les deux systèmes saute aux yeux si l'on réfléchit à ce fait que deux éléments consécutifs d'un système de courbure appartiennent à une même sphère tandis que deux éléments consécutifs d'un système osculateur appartiennent à une même droite.

Une des plus merveilleuses applications des transformations de contact se trouve dans la *Théorie des équations aux dérivées partielles*. Je m'en tiendrai ici à celles du premier ordre. A ces nouveaux points de vue cette théorie prend un degré de profondeur inconnue auparavant et la véritable signification des mots *solution*, solutions *générale, complète, singulière*, introduits par *Lagrange* et *Monge*, devient extrêmement claire.

Considérons l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Dans l'ancienne théorie classique on fait une distinction suivant la manière dont p et q se présentent dans l'équation. Ainsi, lorsque p et q y entrent au premier degré, l'équation est dite *linéaire;* si p et q tous deux étaient absents, l'on ne regarderait pas l'équation comme étant une équation *différentielle.* Au point de vue de la nouvelle géométrie de Lie, ces distinctions disparaissent complètement, comme nous allons le voir.

Le nombre de tous les éléments de surface, dans tout l'espace, est évidemment ∞^5.

Écrire notre équation différentielle, c'est mettre à part, prendre, parmi ces éléments, une variété à 4 dimensions M_4 de ∞^4 éléments.

Or, trouver une *solution* de l'équation au sens de *Lie,* c'est prendre encore dans cette M_4 et mettre à part une variété M_2 jouissant de la propriété caractéristique; que cette M_2 soit point, courbe ou surface, c'est là chose indifférente.

Ce que *Lagrange* nomme trouver une *solution complète* consiste à partager l'M_4 en ∞^2 variétés M_2. Ceci naturellement peut être pratiqué d'un nombre infini de manières. Enfin, si dans ces ∞^2 variétés M_2 nous prenons un système simplement infini, l'enveloppe de ce système représente ce que Lagrange nomme *solution générale.* Ces définitions sont valables d'une manière toute générale pour *toutes* les équations aux dérivées partielles du premier ordre, sous leurs formes même les plus particulières.

Nous allons faire voir par un exemple en quel sens une équation $f(x, y, z) = 0$ peut être regardée comme une telle équation et ce que l'on entend par les solutions diverses. Prenons le cas tout spécial $z = 0$. Tandis que, dans le système habituel de coordonnées, cette expression représente tous *les points* du plan des x, y; dans le système de *Lie,* elle représente naturellement tous *les éléments* (de surface) dont les points font partie du plan. Rien de plus simple que d'assigner une *solu-*

tion complète dans ce cas. Nous n'avons qu'à prendre les ∞^2 points du plan eux-mêmes, chaque point étant une M_2 relative à l'équation.

Pour déduire de ceci la *solution générale,* nous devons prendre tous les systèmes en nombre simplement infini de points du plan, autrement dit une courbe quelconque, et former alors l'enveloppe des éléments de surface appartenant aux points; en d'autres termes encore, nous devons prendre les éléments qui ont un contact avec la courbe. En dernier lieu, c'est évidemment le plan lui-même qui représente une *solution singulière.*

Or, l'immense importance et l'intérêt capital de ce simple exemple tiennent à cette circonstance qu'à l'aide d'une transformation de contact, toute équation aux dérivées partielles du premier ordre peut être mise sous cette forme particulière si simple, $z = 0$. Ainsi, toute la disposition des solutions que nous venons d'esquisser à grands traits reste valable et légitime d'une manière toute générale.

A l'aide de la grande théorie de *Lie* on a donc obtenu une vue nouvelle, claire et pénétrante, de la signification de problèmes regardés depuis bien longtemps comme classiques, et en même temps une immense multitude de problèmes nouveaux ont pris naissance et y trouvent leur solution.

Je ne puis ici que mentionner que *Lie* a fait encore beaucoup en appliquant des principes similaires aux équations aux dérivées partielles du second ordre.

Au moment actuel, *Lie* est surtout célèbre par sa *Théorie des groupes continus* de transformations et, à première vue, il pourrait sembler qu'il n'y a que peu de rapports entre cette théorie et les considérations géométriques qui ont fait l'objet de ces deux conférences.

Je crois désirable d'attirer votre attention cependant sur ce fait qu'il y a corrélation entre ces études.

Dès ses débuts, le but final qu'a poursuivi avec tant de succès Sophus Lie a été le progrès dans la théorie des équations différentielles (1); et nous pouvons regarder aussi bien à ce point de vue les développements géométriques que nous avons indiqués que la théorie des groupes continus.

Pour plus de détails sur les sujets de ces conférences, je renverrai à mon Cours déjà cité : *Géométrie supérieure* (*Gottingue*, 1892-93). Quant à la théorie des éléments de surface, elle est développée d'une manière complète dans le second Volume de la *Théorie des groupes de transformation* de *Lie* et *Engel* (*Leipzig, Teubner*; 1890).