Licence ès sciences mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 175-196

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__175_0>

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE JUILLET 1895. — COMPOSITIONS.

Montpellier.

Analyse. — *Déterminer une courbe plane telle que la portion de tangente comprise entre le point de contact et une droite fixe ait une longueur donnée. Etudier la forme de la courbe; calculer son rayon de courbure, et les coordonnées du centre de courbure. Déterminer sa développée. Calculer l'aire comprise entre la courbe, une normale et la développée.*

Solution. — Cette courbe est connue sous le nom de *tractrice*. OY étant la droite donnée, elle doit vérifier l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2 - x^2}{x^2},$$

d'où

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}\sqrt{a^2 - x^2};$$

la valeur positive de $\sqrt{a^2 - x^2}$ donnant la portion de courbe située dans l'angle XOY, la valeur négative donne une branche symétrique; x variant de o à a, y varie de $+\infty$ à o, ce qui indique la forme de la courbe. Les formules connues donnent le rayon et le centre de courbure

$$R = \frac{a}{x}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad \begin{cases} X = \dfrac{a^2}{x}, \\ Y = y + R\dfrac{x}{a} = a\log\dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}; \end{cases}$$

la développée est une chaînette dont le sommet est le point $(a, 0)$.

Soit ω l'angle de la normale avec OY; l'aire cherchée est

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^\omega R^2 d\omega = \frac{a^2}{2}\int_0^\omega \operatorname{tang}^2\omega\, d\omega \\ &= \frac{a^2}{2}(\operatorname{tang}\omega - \omega) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arccos\frac{x}{a}\right). \end{aligned}$$

Mécanique. — *Une plaque circulaire infiniment mince, homogène et pesante, touche par l'un de ses points un plan horizontal fixe parfaitement poli. Le centre de gravité de la plaque étant maintenu fixe, on imprime à celle-ci une rotation ω autour du rayon qui passe par le point de contact avec le plan fixe; puis on l'abandonne aux forces qui la sollicitent.*

On demande d'étudier le mouvement de la plaque, et en particulier d'indiquer la forme de la courbe que décrit sur le plan fixe le point de contact avec la plaque.

Solution. — OXY étant le plan horizontal fixe, ox, oy deux rayons du disque, soient M sa masse, ρ son rayon, et MR la réaction verticale appliquée au point de contact. Soit (X, Y, Z) le centre du disque; on a

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2Y}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2Z}{dt^2} = R - g.$$

Les moments d'inertie sont $A = B = M\frac{\rho^2}{4}$, $C = M\frac{\rho^2}{2}$, et les équations d'Euler donnent, pour le mouvement autour du centre de gravité,

$$\left(\frac{dp}{dt}+qr\right)\frac{\rho^2}{4}= \quad \mathrm{R}\rho\cos\theta\cos\varphi,$$

$$\left(\frac{dq}{dt}-pr\right)\frac{\rho^2}{4}=-\mathrm{R}\rho\cos\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{dr}{dt}=0,$$

où

$$\left\{\begin{aligned} p\sin\varphi+q\cos\varphi &= \sin\theta\frac{d\psi}{dt},\\ q\sin\varphi-p\cos\varphi &= \frac{d\theta}{dt},\\ r &= \frac{d\varphi}{dt}-\cos\theta\frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Enfin, l'équation $\mathrm{Z}=\rho\sin\theta$ exprime que le disque reste tangent au plan XOY.

Pour $t=0$, soit $\varphi_0=\psi_0=0$; les conditions de l'énoncé donnent

$$\mathrm{X}=\mathrm{Y}=0,\qquad p_0=r_0=\theta'_0=0,\qquad \text{d'où}\qquad r=0,$$

ce qui simplifie les équations précédentes. En éliminant p, q et Z, on a

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\psi}{dt^2}\sin\theta+\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta+\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt}=0,\\ &\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}\sin\theta-\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{4}{\rho}\mathrm{R}\cos\theta,\\ &\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\theta=\frac{\mathrm{R}-g}{\rho},\\ &\frac{d\varphi}{dt}-\cos\theta\frac{d\psi}{dt}=0. \end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cot\theta=0,$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta = \alpha = q_0\sin\theta_0,$$

puis

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(3+2\cos 2\theta) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 2\sin 2\theta + \frac{4g}{\rho}\cos\theta - \alpha^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = 0.$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cos 2\theta + \frac{4g}{\rho}\sin\theta + \frac{\alpha^2}{2\sin^2\theta}$$
$$= \beta = \frac{q_0^2}{2} + \frac{4g}{\rho}\sin^2\theta_0,$$

ou encore

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{\sin\theta_0 - \sin\theta}{5-4\sin^2\theta}\left(\frac{8g}{\rho} - q_0^2\,\frac{\sin\theta+\sin\theta_0}{\sin^2\theta}\right),$$

et

$$R = \frac{\sin\theta}{(5-4\sin^2\theta)^2}\left[\rho q_0^2\sin^2\theta_0\,\frac{1+4\cos^4\theta}{\sin^4\theta} - \rho q_0^2 + g\left(4\sin\theta + \frac{5}{\sin\theta} - 8\sin\theta_0\right)\right].$$

Pour $t=0$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ et par suite $\frac{d\theta}{dt}$ prennent le signe de $q_0^2 - \frac{4g}{\rho}\sin\theta_0$.

Si $q_0^2 < \frac{8g}{\rho(1+\sin\theta_0)}$, $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule pour une valeur θ_1 de θ comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$, et θ variera entre θ_0 et θ_1. Dans ce cas, R reste positif, de même que $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$. Les coordonnées polaires du point de contact sont

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \psi, \qquad r = \rho\cos\theta,$$

ce qui permet de déterminer la forme de la courbe, $\frac{dr}{dt}$ s'annulant pour $\theta = \theta_0$ et θ_1 ; les valeurs correspondantes de ω sont données par une intégrale définie, $\frac{d\psi}{d\theta}$ étant une fonction connue de θ.

Si $q_0^2 < \frac{4g}{\rho} \sin\theta_0$, on a

$$\theta_1 > \theta_0, \qquad \text{sinon} \qquad \theta_1 < \theta_0;$$

mais le mouvement est le même dans ces deux cas, qui ne diffèrent que par le choix de la position initiale.

Si $q_0^2 = \frac{4g}{\rho} \sin\theta_0$, θ reste constant, et l'on a

$$\psi = \frac{q_0}{\sin\theta_0} \times t, \qquad \varphi = q_0 \cot\theta_0 \times t.$$

Si $\frac{4g}{\rho} \sin\theta_0 < q_0^2 < \frac{g}{\rho \cos^2\theta_0}(9 - 8\sin\theta_0)$, θ varie entre θ_0 et $\frac{\pi}{2}$, R reste encore positif, le disque passe par une position verticale, pour laquelle $\frac{d\varphi}{dt}$ s'annule, $\frac{d\psi}{dt}$ reste positif.

Si $q_0^2 > \frac{g}{\rho \cos^2\theta_0}(9 - 8\sin\theta_0)$, θ augmente aussi; mais pour une valeur de θ, comprise entre θ_0 et $\frac{\pi}{2}$, R devient nul, puis négatif; le point de contact quittera alors le plan, et le mouvement cesse de correspondre aux conditions de l'énoncé, le disque n'étant plus soumis qu'à son poids jusqu'au moment où il reviendra en contact avec le plan XOY. Le mouvement autour du centre de gravité est alors celui d'un corps qui n'est soumis à aucune force extérieure.

Épreuve pratique. — *Connaissant la longitude v d'une planète dans son orbite, ainsi que l'inclinaison ω de l'orbite et la longitude Ω du nœud ascendant, calculer la longitude et la latitude héliocentrique.*

$$v = 178^\circ 19' 13'',4,$$
$$\omega = 7^\circ 6' 56'',7,$$
$$\Omega = 235^\circ 42' 8'',1.$$

SESSION DE NOVEMBRE 1895. — COMPOSITIONS.

Besançon.

Analyse. — *Un hyperboloïde de révolution à une nappe est donné par le rayon a du cercle de gorge et par l'angle ω que font les génératrices avec le plan de ce cercle. Déterminer les courbes de cette surface telles que l'angle α_1 sous lequel une de ces courbes coupe les génératrices de l'un des deux systèmes soit une fonction donnée de la distance r du point d'intersection de la courbe et de la génératrice au point où cette même génératrice rencontre le cercle de gorge.*

Application.

$$\cos\alpha = \pm\frac{a^2(1-2\cos^2\omega)+r^2\cos^2\omega}{a^2+r^2\cos^2\omega};$$

on achèvera l'intégration dans tous les cas qui se présentent, de manière à avoir les intégrales sous forme réelle ; on discutera et l'on indiquera la forme des courbes obtenues.

Soit $\cos\alpha = f(r)$; $f(r)$ pourra être considéré comme donné. Les coordonnées d'un point de l'hyperboloïde peuvent être représentées par

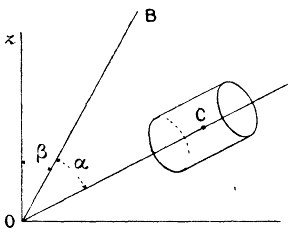
$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta - r\cos\omega\sin\theta, \\ y &= a\sin\theta + r\cos\omega\cos\theta, \\ z &= r\sin\omega, \end{aligned}$$

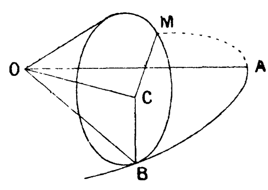
r et θ étant variables. Les courbes cherchées sont définies par l'équation différentielle

$$d\theta = \frac{a\cos\omega(f^2-1)\pm f\sqrt{(1-f^2)(a^2\sin^2\omega+r^2\cos^2\omega)}}{a^2\cos^2\omega - a^2f^2 - r^2f^2\cos^2\omega}\,dr;$$

on voit qu'elles s'obtiennent par une quadrature. Dans l'application indiquée, la quantité placée sous le radical devient carré parfait. A l'un des signes du radical correspondent les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde du second système; à l'autre signe, des courbes dont l'équation est facile à obtenir sous forme finie. Cette équation contient des fonctions trigonométriques ou des exponentielles, suivant que ω est supérieur ou inférieur à 60°.

Mécanique. — 1° *Un cylindre de révolution dont l'axe est* OA *est mobile autour de la droite fixe* OB. *L'angle* BOA *est constant; discuter la durée d'une petite oscillation en fonction de l'angle* β *de* OB *avec la verticale et de la distance* $OC = l$ (C *centre de gravité*).





2° *Un cône droit dont l'angle est* 2β *est chargé d'un poids* M *appliqué en un point de sa surface. Déterminer le mouvement de ce point quand on écarte le cône de sa position d'équilibre. On suppose le cône sans masse et assujetti à rouler sur un plan horizontal.*

1er Problème. — Calculer les moments principaux d'inertie du cylindre relatifs à son centre de gravité. En déduire, d'après les formules connues, son moment d'inertie par rapport à une parallèle à OB menée par le point C, et enfin son moment d'inertie par rapport à OB. Le mouvement sera donné par le théorème des aires. Il a lieu sous l'action de la composante de la pesanteur dans un plan perpendiculaire à OB.

2^e Problème. — Soient θ l'angle que fait, dans le cône droit, le plan méridien du point M avec le plan méridien vertical, v la vitesse du point M. On peut prendre la masse de ce point et la longueur OM égales à 1. On a

$$v^2 = \sin^2\beta\cos^2\beta(1-\cos\theta)(1+\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos\theta)\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

En appliquant le principe des forces vives

$$dt = \sin\beta\cos\beta\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1+\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos\theta}{h-g\sin\beta\cos\beta(1-\cos\theta)}},$$

intégrale elliptique. Dans un cas particulier remarquable le radical se réduit à une constante.

Épreuve pratique. — *En un lieu de latitude,*

$$\varphi = 47^\circ 54' 19'',$$

on a observé l'azimut $a = +54^\circ 46' 31''$ *et la hauteur* $h = 39^\circ 18' 27''$ *d'une étoile, à l'heure sidérale locale* $\theta = 8^h 13^m 52^s,3$, *la température étant* $T = 23^\circ,7$, *la pression atmosphérique* $p = 742^{mm},65$.

On demande :

1° *De corriger* h *de la réfraction ;*

2° *De calculer l'ascension droite et la distance polaire* $\mathfrak{P}$ *de l'étoile.*

Bordeaux.

Mathématiques. — *Calculer l'intégrale indéfinie*

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2\sqrt{x^2-1}},$$

a étant un nombre positif supérieur à l'unité.

L'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{L}\frac{dy}{dx} + \mathrm{M}y = 0,$$

est telle que si $y = y_1$ *est solution de l'équation,* $y = y_1^2$ *est également une solution.*

Déterminer la fonction y_1.

Établir la condition qui doit être remplie par les fonctions L *et* M *pour que l'équation admette des solutions de la nature indiquée précédemment.*

Mécanique. — 1. *Un système de forces est constitué par n forces fixes et une force dirigée suivant une droite fixe, mais dont l'intensité est variable. On demande le lieu de l'axe central du système.*

Cas particuliers : 1° *la direction de la force variable rencontre l'axe central du système des n forces fixes;* 2° *elle est parallèle à cet axe central.*

2. *Une plaque invariable de forme quelconque est mobile dans son plan autour d'un point* O, *avec frottement; le frottement se traduisant par un couple qui agit en sens inverse de la rotation instantanée, et dont le moment est proportionnel à la pression de la plaque avec le point* O.

Aucune force extérieure ne sollicitant le système, on assujettit le point O *à prendre un certain mouvevement rectiligne.*

Déterminer ce mouvement rectiligne et les conditions initiales du mouvement de la plaque, de manière que le mouvement angulaire de celle-ci soit (au moins pendant un certain intervalle de temps) uniforme.

Calcul. — *Calculer pour Bordeaux, et pour le* 18 *novembre* 1895, *l'heure et l'azimut du coucher du*

Soleil :

Latitude de Bordeaux...................	$44°.50'.\ 7'',2$
Déclinaison du Soleil à midi vrai (18 nov.).	$-19.14.48,8$
» (19 nov.).	$-19.28.57,4$

Les formules à employer sont :

$$\cos t_0 = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta,$$

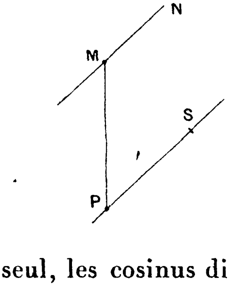
$$\operatorname{tang} A = \frac{\cos\delta \sin t_0}{-\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t_0}.$$

Clermont.

Analyse. — *Par le pied* P *de chaque ordonnée,* PM $= z$, *d'une surface, on mène une parallèle à la normale en* M *à cette surface. Montrer que pour que les droites ainsi obtenues soient normales à une surface, il faut que* $p^2 + q^2$ *soit une fonction de* z, p *et* q, *dérivées partielles de* z. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue.*

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale; les coordonnées de S sont

$$x + \rho\alpha, \qquad y + \rho\beta, \qquad \rho\gamma;$$



quand x varie seul, les cosinus directeurs du déplacement sont

$$1 + \alpha\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \quad \beta\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial\beta}{\partial x}, \quad \gamma\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial\gamma}{\partial x}.$$

Écrivons que ce déplacement est normal à $p\varrho$; on trouve

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x} = -\alpha;$$

on aurait de même $\frac{\partial\rho}{\partial y} = -\beta$. La condition cherchée est

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\partial\beta}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

ou

$$p\left(p\,\frac{\partial p}{\partial y} + q\,\frac{\partial q}{\partial y}\right) - q\left(p\,\frac{\partial p}{\partial x} + q\,\frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0.$$

Le déterminant fonctionnel de z et de p^2+q^2 est nul.

Remarque. — Le long d'une section horizontale, la normale fait un angle constant; ces sections sont des lignes de courbure. Résultat analogue pour le lieu de S.

Astronomie. — *Prendre dans la* Connaissance des Temps *les trois coordonnées écliptiques héliocentriques vraies de Vénus :*

longitude $\mathcal{L}$, latitude B, distance r au Soleil,

et les trois coordonnées écliptiques vraies du Soleil :

longitude L — 180°, latitude α, distance R à la Terre,

le 12 *septembre* 1895 *à midi moyen de Paris; en déduire les trois coordonnées écliptiques géocentriques vraies de Vénus, au même instant t :*

longitude λ, latitude β, distance D à la Terre.

Démontrer d'abord les formules de résolution

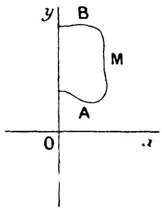
$$\begin{aligned}
D\cos\beta\cos\lambda &= r\cos B\cos\mathcal{L} - B\cos\alpha\cos L,\\
D\cos\beta\sin\lambda &= r\cos B\sin\mathcal{L} - R\cos\alpha\sin L,\\
D\sin\beta &= r\sin\beta \quad - R\sin\alpha.
\end{aligned}$$

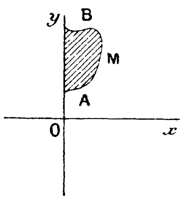
Nancy.

Analyse. — Première question. — *Les axes* Ox, Oy *étant rectangulaires, et* A *et* B *étant deux points donnés sur* Oy, *calculer l'intégrale curviligne*

$$\int [\varphi(y)e^x - my]\,dx + [\varphi'(y)e^x - m]\,dy,$$

prise le long d'un chemin quelconque AMB, *allant du point* A *au point* B, *mais limitant avec* AB *une aire* AMBA *de grandeur donnée* S; m *désigne une constante, et* $\varphi(y)$ *une fonction de* y *définie et continue, ainsi que sa dérivée* $\varphi'(y)$.





Deuxième question. — 1° *Définir, d'après Lagrange, l'intégrale complète, l'intégrale générale, l'intégrale singulière d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre entre deux variables indépendantes et une fonction* z *de ces variables.*

2° *Étant donnée la relation*

$$2m(x + ay + b) = z\sqrt{z^2 + a^2} + a^2 \log(z + \sqrt{z^2 + a^2}),$$

où a, b *et* m *sont des constantes, en déduire l'équation aux dérivées partielles du premier ordre indépendante de* a *et de* b, *à laquelle satisfait la fonction* z *des deux variables* x *et* y. *Intégrer cette équation. Revenir à la relation proposée en élimi-*

nant la fonction arbitraire de l'intégrale générale

$$\int_{\text{AMB}} = \int_{\text{AMBA}} + \int_{\text{AB}}.$$

1. On est ramené à une intégrale suivant le contour fermé AMBA, et à une intégrale le long de AB.

La première s'évalue par la formule de Green. Supposons l'aire à droite de AB,

$$\int_{\text{AMBA}} \text{P}\,dx + \text{Q}\,dy = \int\int_{\text{aire AMBA}} \left(\frac{\partial \text{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \text{P}}{\partial y}\right) dx\,dy$$
$$= \int\int_{\text{aire}} m\,dx\,dy = m\,\text{S}.$$

Si l'aire est à gauche, on a $-m\text{S}$.

De plus

$$\int_{\text{AB}} = \int_a^b dy[\varphi'(y)e^x - m] = e^x[\varphi(b) - \varphi(a)] - m(b-a).$$

Donc

$$\int_{\text{AMB}} = \pm\, m\text{S} + e^x[\varphi(b) - \varphi(a)] - m(b-a),$$

2. Étant donnée l'équation

$$2m(x+y+b) = z\sqrt{z^2+a^2} + a^2\log\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right),$$

les dérivées, par rapport à x et y, donnent, en posant $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$,

$$m = \sqrt{z^2+a^2}\,p, \qquad ma = \sqrt{z^2+a^2}\,q.$$

En éliminant a entre les dernières, on a

$$a^2 = p^2z^2 + q^2.$$

Pour intégrer, on remarque que, l'équation renfermant z, p et q, on est conduit à poser $z = f(x+ay)$, où a est une constante, ou bien $x + ay = \varphi(z)$, ce qui donne

$$p\,\varphi'(z) = 1, \qquad q\,\varphi'(z) = a$$

et

$$m^2 = \frac{z^2 + a^2}{\varphi'(z)^2}.$$

Donc

$$m\,\varphi'(z) = \sqrt{z^2 + a^2},$$

$$m[\varphi(z) + b] = \int \sqrt{z^2 + a^2}\,dz$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[z\sqrt{z^2 + a^2} + a^2 \log\left(z + \sqrt{z^2 + a^2}\right)\right];$$

d'où, enfin,

$$2m(x + ay + b) = z\sqrt{z^2 + a^2} + a^2 \log\left(z + \sqrt{z^2 + a^2}\right),$$

qui est la relation qui a servi de point de départ. On a ainsi une intégrale complète; on en déduit toutes les autres.

Mécanique. — *Un point pesant de masse égale à un gramme est lancé dans le plan vertical perpendiculaire au méridien du lieu sous un angle de 60° vers l'est ou vers l'ouest.*

L'intensité de la vitesse initiale a été déterminée au moyen d'un pendule balistique; le point matériel, lancé horizontalement avec cette vitesse, est venu se fixer au centre de gravité du pendule; la distance du centre de gravité à l'axe de suspension du pendule et le rayon de giration du pendule par rapport à son axe de suspension sont tous deux égaux à un décimètre; la masse du pendule est égale à 10^{kg}; *lorsque, par suite du choc, le pendule s'est élevé, l'angle d'écart avec la verticale a été de 60°.*

On tient compte de la rotation de la Terre, on prend $\omega = 0{,}000073$; *on néglige* ω^2; *la latitude du lieu est égale à 45°. Déterminer le point de rencontre du mobile avec le plan horizontal passant par sa position initiale.*

1° Détermination de la vitesse initiale du projectile par le pendule balistique.

Si v_0 est la vitesse du projectile avant le choc, ω_0 la vitesse commune du pendule et du projectile après, on a

$$m v_0 a = (\mathrm{MK}^2 + m a^2)\omega_0,$$

où $m =$ la masse du projectile $= 1^{\mathrm{gr}}$, M celle du pendule $= 10000^{\mathrm{gr}}$, a la distance du projectile à l'axe de suspension $= 10^{\mathrm{cm}}$ et K le rayon de giration $= a$ dans le problème.

Le pendule composé donne, pour l'angle maximum d'écart θ, l'équation

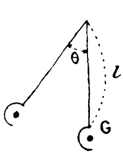
$$\omega_0 = 2\sqrt{g\frac{\mathrm{M}l + ma}{\mathrm{MK}^2 + ma^2}}\sin\frac{\theta}{2}.$$

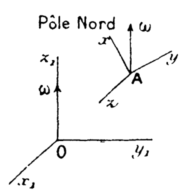
D'où ici, comme l, distance du centre de gravité à l'axe de suspension, est égale à a, comme K,

$$\omega_0 = 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}, \qquad v_0 = \frac{m+\mathrm{M}}{m}\,2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{ga}.$$

Le cas actuel, où $al = \mathrm{K}^2$ est celui où il n'y a pas de percussion sur l'axe de suspension. Avec les données ($\theta = 60°$),

$$v_0 = 10001\sqrt{9809^{\mathrm{cm}}}.$$





2° Étudions le mouvement d'un projectile à la surface de la Terre, lancé avec la vitesse v_0 dans un plan vertical. Nous prenons comme axes fixes des axes passant par le centre de la Terre, Oz, vers le pôle nord, de façon que la rotation $o\omega$ soit positive ; au point A, nous prenons un trièdre de même sens, dont Ax est tangent au méridien vers le nord, Ay au parallèle vers l'est ; Az est la verticale vers le centre de la Terre. Les équations du mouvement relatif sont ici

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2m\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = 2m\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} + 2m\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -2m\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt} + mg,$$

et il faut les intégrer ; les conditions initiales sont, en supposant le mobile lancé vers l'est dans le plan zAy, sous l'angle α avec la verticale vers le haut,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = v_0\cos\alpha, \qquad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = -v_0\sin\alpha.$$

En négligeant ω, on aurait la première approximation

$$x = 0, \qquad y = v_0 t\cos\alpha, \qquad z = -v_0\sin\alpha\, t + \frac{1}{2}gt^2 ;$$

en appelant ξ, η, ζ les accroissements développés suivant les puissances de ω, limités à la première puissance, on a

$$\xi = -\omega v_0\cos\alpha\sin\lambda\, t^2,$$

$$\eta = +\omega\cos\lambda\left(-v_0\sin\alpha\, t^2 + \frac{gt^3}{3}\right),$$

$$\zeta = -\omega\cos\lambda\, v_0\cos\alpha\, t^2.$$

Pour que le point atteigne le plan horizontal, il faut poser $z = 0$, ce qui donne

$$t\left(-v_0\sin\alpha + g\frac{t}{2} - \omega\cos\lambda\, v_0\cos\alpha\, t\right) = 0,$$

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g - 2\omega\cos\lambda\, v_0\cos\alpha}.$$

En remplaçant et se limitant aux termes en ω, on a

$$x = -\frac{4v_0^3}{g^2}\sin^2\alpha\cos\alpha\,\omega\sin\lambda,$$

$$y = \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} + \frac{4}{3}\omega\cos\lambda\frac{v_0^3\sin\alpha}{g^2}(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Pour $\alpha = 60°$, le terme complémentaire de y est nul ; donc l'y du point d'arrivée est le même que si ω est nul, et il y a toujours une petite déviation vers le sud.

Pour $\alpha = 60°$, $\lambda = 45°$, on a

$$x = -\frac{3}{4}\omega\sqrt{2}\frac{v_0^3}{g^2}, \qquad y = \frac{2v_0^2\sqrt{3}}{4g}.$$

Calcul d'Astronomie. — *Déterminer l'azimut et la distance zénithale d'un astre dont les coordonnées, ascension droite et distance polaire, sont*

$$Æ = 18^h\,15^m\,53^s,7, \qquad \delta = 25°\,37'\,26'',4.$$

La latitude du lieu est $\lambda = 48°\,41'\,31''$, *et l'heure de l'observation est* $14^h\,28^m\,35^s,4$.

Poitiers.

Analyse. — I. *Dans un plan, on donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy; *de l'origine* O, *on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à la courbe enveloppe des droites représentées par l'équation*

$$x\cos\omega + y\sin\omega = f(\omega).$$

[$f(\omega)$ *est une fonction connue du paramètre* ω].

Trouver l'aire de la courbe, lieu des pieds de ces perpendiculaires. Application à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

II. *On donne trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz : *que représente l'équation*

$$(x + my)^2 = a^2(1 + m^2)(x^2 + y^2 + z^2)?$$

(*a et m sont deux constantes réelles*)?

Soit $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, *éliminer la fonction* F(ρ) *de l'équation*

$$[x + y\mathrm{F}(\rho)]^2 = a^2[1 + \mathrm{F}^2(\rho)](x^2 + y^2 + z^2).$$

Chercher si l'équation aux dérivées partielles (*linéaire*) *ainsi obtenue admet des solutions vérifiant aussi l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution autour de l'axe* Oz.

Mécanique. — *Un point matériel est assujetti à se mouvoir sur une courbe fixe, plane. On propose de déterminer la nature de cette courbe, sachant que la force motrice donnée* F, *dérivant d'un potentiel, agit dans le plan de la courbe, et que la réaction normale* N *est aussi une fonction connue des coordonnées du point. Applications :*

1°	$\mathrm{F} = \mu y$,	$\mathrm{N} = 0$,	$v_0 = y_0\sqrt{\mu}$,
2°	$\mathrm{F} = -\mu y$,	$\mathrm{N} = \mu y_0 \cos\varphi$,	$v_0 = 0$.

φ *est l'angle de la tangente à la courbe avec l'axe des* x.

Astronomie. — *On a observé dans un même vertical au même instant deux étoiles dont les coordonnées sont connues. Trouver l'heure sidérale de l'observation.*

Étoiles.	Ascension droite.	Déclinaison.
α Grande Ourse	$10^h 57^m 15^s$	$+62°19'\ 3'',5$
ζ Grande Ourse	$13^h 19^m 42^s$	$+55°28'25''$

Latitude du lieu : 46°35′5″ boréale.

Toulouse.

Analyse. — I. *On considère la surface algébrique du troisième ordre définie par les formules*

$$x = \frac{u^2 + v^2}{2(u^2 - 1)},$$

$$y = v,$$

$$z = \frac{u(v^2 + 1)}{u^2 - 1},$$

qui déterminent les coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z *d'un de ses points en fonction de deux paramètres* u *et* v :

1° *Montrer que cette surface passe par la parabole* P *définie par les équations*

$$z = 0, \qquad y^2 + 2x = 0,$$

et calculer ses rayons de courbure principaux en un point pris sur cette parabole P;

2° *Déterminer ses ombilics et ses lignes asymptotiques.*

II. *Déterminer les constantes* α, β, γ *de façon que, parmi les solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre*

$$x(1 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

se trouve un polynome entier en x. *Comme application, trouver l'intégrale générale de cette équation dans le cas particulier où l'on a*

$$\gamma = \alpha, \qquad \beta = -2.$$

I. — Un calcul facile donne pour les six quantités E, F, G, D, D′, D″ (Notations des *Leçons* de M. Darboux,

t. III, p. 242 et suivantes) relatives à la surface qui figure dans la première question d'Analyse :

$$E = \frac{(1+v^2)^2[u^2+(1+u^2)^2]}{(u^2-1)^4}, \qquad D = \frac{(1+v^2)^2}{(u^2-1)^3}.$$

$$F = -\frac{uv(1+v^2)[1+2(1+u^2)]}{(u^2-1)^3}, \qquad D' = 0,$$

$$G = \frac{v^2+(u^2-1)^2+4u^2v^2}{(u^2-1)^2}, \qquad D'' = -\frac{1+v^2}{(u^2-1)^2}.$$

De ces expressions résulte immédiatement la solution de la question. La parabole P est définie dans le système (u, v) par l'équation $u = 0$; tous ses points sont des ombilics. L'équation différentielle des asymptotiques, savoir

$$\frac{du^2}{u^2-1} = \frac{dv^2}{v^2+1},$$

s'intègre immédiatement.

La surface précédente n'est autre que celle considérée par M. de Saint-Germain dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, t. XII, 1re Partie, p. 177-180; 1888).

II. — L'équation différentielle dont il s'agit est celle de la série hypergéométrique; elle admet comme solution un polynome entier si l'un des nombres α, β est un entier négatif; les candidats n'avaient pour l'établir qu'à substituer un polynome entier de degré n dans le premier membre de l'équation et à chercher si le polynome de degré n, résultat de la substitution, pouvait être nul identiquement; on trouve d'abord, en égalant à zéro le coefficient de x^n,

$$(n+\alpha)(n+\beta) = 0,$$

ce qui prouve que l'un des nombres α, β doit être un entier négatif, et cette condition, comme on le reconnaît immédiatement en poursuivant l'identification, est suffisante pour l'existence d'un polynome satisfaisant à l'équation, et dont le degré est égal à celui des deux nombres $-\alpha$, $-\beta$ qui est entier.

Dans le cas où $\gamma = \alpha$, $\beta = -2$, on obtient par ce qui précède la solution particulière

$$(1-x)^2,$$

et par l'application du procédé classique de réduction, on parvient à l'intégrale générale au moyen de quadratures.

Mécanique. — *Trouver la figure d'équilibre d'un fil flexible, inextensible, homogène, de longueur donnée, attaché par ses deux extrémités à deux points fixes et sollicité par une force émanant d'un point fixe et proportionnelle à une fonction donnée de la distance de chacun de ses points au point fixe.*

Calculer la tension du fil en chaque point; former l'équation différentielle de la courbe d'équilibre.

Examiner les cas particuliers suivants : 1° la force qui sollicite chaque point du fil est attractive et proportionnelle à une puissance donnée du rayon vecteur issu du point fixe; 2° la force est proportionnelle au rayon vecteur.

Le commencement de la question de Mécanique n'est autre que la question de Cours traitée, par exemple, dans le *Traité de Mécanique* de M. Appell (t. I, p. 193 et suiv.); les deux cas particuliers à traiter en sont une application immédiate.

Épreuve pratique. — *Le* 13 *janvier* 1895, *à midi moyen de Paris, la déclinaison du Soleil a été*

$$-21°48'17'',5;$$

le 20 *mars, à la même heure* $-0°8'52'',3$.

La différence des ascensions droites du Soleil à ces deux dates a été $4^h 27^m 33^s,72$.

Calculer l'obliquité de l'écliptique.

Si l'on désigne par α, α' les ascensions droites du Soleil aux époques considérées et par δ, δ' les déclinaisons correspondantes, on a, d'après la formule

$$\text{tang}\, b = \sin c \,\text{tang}\, B$$

relative aux triangles rectangles, les relations

$$\text{tang}\, \delta = \sin \alpha \,\text{tang}\, \omega,$$
$$\text{tang}\, \delta' = \sin \alpha' \,\text{tang}\, \omega,$$

ω étant l'obliquité de l'écliptique. On en déduit

$$\text{tang}\, \frac{\alpha + \alpha'}{2} = \frac{\sin(\delta + \delta')}{\sin(\delta - \delta')} \,\text{tang}\, \frac{\alpha - \alpha'}{2},$$

d'où $\alpha + \alpha'$, puisque δ, δ', $\alpha - \alpha'$ sont connus. On a ensuite ω.