

P. APPELL

**Quelques exemples de séries doublement
périodiques**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 15
(1896), p. 126-129

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__126_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[F2]

QUELQUES EXEMPLES DE SÉRIES DOUBLEMENT PÉRIODIQUES;

PAR M. P. APPELL.

1. On sait qu'on nomme *fonction doublement périodique* une fonction uniforme $f(x)$ vérifiant deux relations de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} f(x + 2K) = f(x) \\ f(x + 2iK') = f(x). \end{cases}$$

Les constantes $2K$ et $2iK'$ sont les deux périodes.

Lorsque la fonction doublement périodique n'admet, à distance finie, d'autres singularités que des *pôles*, on dit qu'elle est une *fonction elliptique*.

(¹) Comparer BIEHLER, *Journal de Crelle*, t. 87, p. 350, et LAGUERRE, *Journal de Crelle*, t. 89, p. 339.

Nous nous proposons ici d'indiquer quelques séries représentant des fonctions doublement périodiques. Pour cela, considérons la fonction $\Theta(x)$ de Jacobi, définie comme il suit :

Posons

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}},$$

où le module de q est supposé moindre que l'unité : la fonction Θ est définie par la série

$$(2) \quad \Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{n\pi x i}{K}},$$

ou encore,

$$\Theta(x) = 1 - 2q \cos \frac{\pi x}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi x}{K} - \dots$$

Cette fonction satisfait aux deux relations suivantes, faciles à vérifier à l'aide du développement (2)

$$(3) \quad \begin{cases} \Theta(x + 2K) = \Theta(x) \\ \Theta(x + 2iK') = -\frac{1}{q} e^{-\frac{\pi x i}{K}} \Theta(x). \end{cases}$$

On conclut de la seconde relation n fois répétée

$$(4) \quad \Theta(x + 2niK') = \frac{(-1)^n}{q^{n^2}} e^{-\frac{n\pi x i}{K}} \Theta(x),$$

où n peut aussi être pris négatif.

2. Ceci posé, soit p un entier positif fixe; considérons la fonction définie par la série

$$(5) \quad \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\Theta^p(x + 2niK')},$$

où la fonction Θ du dénominateur est élevée à la puissance p . Si cette série est convergente, il est évident

qu'elle définit une fonction doublement périodique admettant les deux périodes $2K$ et $2iK'$. En effet, chaque terme de la série admet la période $2K$, et, quand on change x en $x + 2iK'$, chaque terme ne fait que reculer d'un rang, et la somme de la série ne change pas. Or la convergence résulte immédiatement de la formule (4) : car, d'après cette formule, dont on élève les deux membres à la puissance p , on peut écrire

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Theta^p(x)} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^{np} q^{pn^2} e^{\frac{rn\pi x i}{k}}.$$

Dans cette nouvelle série, la convergence est évidente, car le module de q est moindre que l'unité. Cette série définit une fonction holomorphe de x , $G(x)$, de sorte que la fonction doublement périodique $\varphi(x)$ se présente maintenant sous la forme

$$\varphi(x) = \frac{G(x)}{\Theta^p(x)}.$$

C'est une fonction elliptique, car elle n'a que des pôles à distance finie, à savoir les zéros de Θ . On sait que la fonction Θ n'a qu'un zéro simple dans chaque parallélogramme des périodes $2K$ et $2iK'$. La fonction φ a donc un seul pôle d'ordre p dans chaque parallélogramme.

Si $p = 1$, il semble que la fonction φ n'ait qu'un pôle simple dans un parallélogramme : mais alors elle doit se réduire à une constante, ce qu'il est aisé de vérifier, car, si $p = 1$, on a

$$G(x) = \Theta(x), \quad \varphi(x) = 1.$$

3. Soit maintenant a une constante différente de zéro. La série

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{a + \Theta^p(x + 2niK')}$$

est encore convergente et définit encore une fonction aux deux périodes $2K$ et $2iK'$. Mais cette fonction admet dans chaque parallélogramme des périodes une *infinité* de pôles qui sont les zéros des fonctions

$$a + \theta^n(x + 2niK').$$

Elle a donc des points singuliers essentiels à distance finie et ce n'est pas une fonction elliptique.

4. On étendra sans peine ces considérations de la façon suivante. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ des constantes et $R(x)$ une fonction rationnelle à coefficients constants de $\Theta(x - \alpha_1), \Theta(x - \alpha_2), \dots, \Theta(x - \alpha_\nu)$. Si la série

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} R(x + 2niK')$$

est convergente, elle définit une fonction doublement périodique qui est elliptique quand la fonction $R(x)$ est homogène par rapport aux fonctions Θ qui la composent, de façon à se reproduire multipliée par une exponentielle linéaire en x , quand x augmente de $2iK'$.

En prenant les séries

$$F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a^n R(x + 2niK')$$

ou

$$F_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a^n q^{mn^2} e^{\frac{nm\pi x i}{k}} R(x + 2niK')$$

(m entier constant), on obtient des fonctions à multiplicateurs constants ou exponentiels.

Enfin, on peut former des séries analogues à celles que nous venons de considérer, en les composant avec des fonctions Θ de deux ou plusieurs variables.