NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. HURWITZ

Sur les conditions sous lesquelles une équation n'admet que des racines à partie réelle négative

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 108-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__108_0>

[A3e]

SUR LES CONDITIONS SOUS LESQUELLES UNE ÉQUATION N'ADMET QUE DES RACINES A PARTIE RÉELLE NÉGATIVE;

PAR M. A. HURWITZ (de Zurich) (1).

(Traduit par M. L. LAUGEL.)

I.

A l'instigation de mon honoré collègue, M. A. Stodola, je me suis occupé il y a quelque temps de la question de reconnaître quand une équation de degré n à coefficients réels

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

n'admet que des racines dont la partie réelle est négative.

Bien que la résolution de cette question, d'après les méthodes de Sturm, Liouville, Cauchy et Hermite, ne présente aucune difficulté de principe, néanmoins, je prends ici la liberté d'exposer le résultat auquel je suis arrivé, parce que, sous sa forme simple et commode dans les applications, il offre peut-être un certain intérêt (2).

(1) *Mathematische Annalen*, t. XLVI.

(2) M. Stodola se sert de mon résultat dans son Mémoire *Sur le règlement des turbines* (*Schweizer Bau-Zeitung*, t. XXIII, nos 17, 18), Mémoire dont les résultats ont trouvé une application couronnée du plus remarquable succès à l'Établissement des turbines à Davos (Engadine). La question, comme me l'a fait remarquer M. Stodola, avait été proposée dans la *Natural Philosophy* de Thomson (Lord Kelvin) et Tait (1886, Partie I, p. 390) et sa solution y est indiquée comme étant très désirable. 2e édit., Partie I, p. 390; 1890. Refait et augmenté par les auteurs.

L'exposition du résultat me donne en même temps l'occasion de présenter la méthode d'Hermite-Jacobi sous une forme qui peut être généralisée à divers points de vue.

On peut évidemment, ce que nous ferons ici, s'en tenir au cas où le coefficient a_0 est positif. En effet, s'il en était autrement, on pourrait multiplier tout le premier membre de l'équation par le facteur — 1.

Formons maintenant le déterminant

$$(1) \qquad \Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_{2\lambda-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2\lambda-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & a_{2\lambda-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_\lambda \end{vmatrix}$$

d'après la méthode qui consiste à augmenter successivement les indices de deux unités dans la première ligne horizontale et à les faire diminuer toujours successivement d'une unité dans chaque colonne verticale. On devra aussi poser en général

$$a_k = 0,$$

lorsque l'indice k est négatif ou plus grand que n.

Ceci posé, on a le théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$(2) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

où le coefficient a_0 est supposé positif, n'admette que des racines à partie réelle négative est que les valeurs des déterminants

$$(3) \qquad \Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2, \ \Delta_3, \ \ldots, \ \Delta_n$$

soient toutes positives.

A ce théorème ajoutons la remarque suivante. Le déterminant Δ_n, comme c'est facile à reconnaître en le développant suivant les éléments de la dernière colonne verticale, est égal à

$$a_n \Delta_{n-1}.$$

Ainsi la condition que Δ_{n-1} et Δ_n doivent être positifs est équivalente à cette autre que Δ_{n-1} et a_n doivent être positifs.

Le théorème reste donc valable lorsque l'on remplace Δ_n par a_n.

Voici encore une autre remarque :

Si l'on considère la suite de déterminants

$$(4) \qquad \Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \Delta_4, \quad \ldots,$$

les termes de cette suite s'évanouissent identiquement à partir du $(n+1)^{\text{ième}}$ inclus, c'est-à-dire pour des valeurs indéterminées de a_0, a_1, ..., a_n. En effet, les éléments de la dernière colonne verticale de Δ_λ sont tous nuls pour $\lambda > n$. Par conséquent, la condition du théorème peut encore s'exprimer en disant que les termes de la suite (4) qui ne s'évanouissent pas identiquement doivent être tous positifs. Ces termes, écrits tout au long, sont les suivants :

$$a_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

et, sans insister davantage, on en conclura aisément les conditions relatives à toute valeur particulière de n.

Par exemple, les conditions relatives à l'équation du quatrième degré ($n = 4$), sont :

$$a_1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$a_4 > 0.$$

M. Stodola a remarqué qu'une condition *nécessaire* pour que l'équation (2) n'admette que des racines à partie réelle négative est que tous les coefficients a_0, a_1, ..., a_n soient positifs. En effet, lorsque la partie réelle de toutes les racines de l'équation (2) est négative, chaque facteur linéaire réel du premier membre de l'équation a la forme $x + p$ et chaque facteur réel quadratique la forme

$$(x + p_1)^2 + p_2^2 = x^2 + p'x + p'',$$

où p, p_1, p_2, p', p'' désignent des grandeurs positives. Mais comme le produit de fonctions entières à coefficients positifs a lui-même également tous ses coefficients positifs, le premier membre de l'équation (2) n'admettra donc que des coefficients positifs.

II.

Supposons que la fonction entière rationnelle $f(x)$, dont les coefficients peuvent tout d'abord admettre des valeurs complexes, ne s'évanouisse pour aucune valeur de x purement imaginaire. Désignons alors respectivement par N et P le nombre des zéros de $f(x)$ qui ont des parties réelles négatives et positives; on a

$$(5) \qquad N + P = n,$$

n désignant alors le degré de $f(x)$. Soit maintenant c une constante (complexe) quelconque et

$$(6) \qquad cf(x) = \rho e^{i\pi\varphi},$$

ρ désignant alors le module (*den absoluten Betrag*, la valeur absolue) et $\pi\varphi$ l'argument de $cf(x)$. L'angle φ varie d'une manière continue avec la valeur de x et diminue en particulier de

$$N - P = \Delta \tag{7}$$

unités, lorsque x parcourt la succession de valeurs numériques imaginaires pures de $+i\infty$ à $-i\infty$. Ce fait se reconnaît de suite lorsqu'en faisant usage de la représentation géométrique habituelle des nombres complexes, on étudie la variation de l'argument de chaque facteur linéaire de $f(x)$. Maintenant, en vertu de (5) et (7), on a

$$N = \frac{n+\Delta}{2}, \qquad P = \frac{n-\Delta}{2}. \tag{8}$$

La détermination de Δ sera alors ramenée de la manière que l'on sait, à celle d'un *indice de Cauchy* [1]. Par indice d'une grandeur R qui possède, en chaque point d'une ligne L parcourue dans un sens déterminé, une valeur réelle déterminée, l'on entendra le nombre formé comme il suit. On attribuera à chaque point de L où R devient infinie un des nombres 0, ou $+1$, ou -1, selon que R, en passant par le point en question, ne change pas de signe, ou bien passe d'une valeur négative à une valeur positive, ou bien d'une valeur positive à une valeur négative. L'indice de R relatif à la ligne L est alors la somme de tous les nombres ainsi attribués aux infinis de R. On admet ici tacitement que R ne change

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XV^e Cahier; 1837. L'indice de Cauchy est renfermé comme cas particulier dans la notion introduite par Kronecker sous le nom de *caractéristique d'un système de fonctions* (*Monatsberichte der K. preuss. Acad. d. W.*; 1869).

son signe qu'en un nombre fini de points où elle devient infinie, et que $\frac{r}{R}$ est continue dans le domaine de ces points.

Ayant ainsi rappelé cette notion, soit z une variable réelle et

$$cf(-iz) = U + iV, \tag{9}$$

U et V désignant des fonctions entières de z à coefficients réels. Si l'on pose maintenant

$$\frac{V}{U} = R(z), \tag{10}$$

on a

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tang} R(z), \tag{11}$$

et il résulte de cette équation que Δ est identique à l'indice de $R(z)$ relatif à l'axe des z réels parcouru dans le sens des z croissants (axe que l'on doit regarder comme une ligne ou contour qui se ferme à l'infini).

Dans ce qui suit, je supposerai que $R(z)$ ne devient pas infinie pour $z = \infty$, ce qui est évidemment permis, puisque l'on peut disposer arbitrairement de la constante c.

III.

Prenons maintenant pour $R(z)$ une fonction rationnelle quelconque de z à coefficients réels et qui reste finie pour $z = \infty$.

L'indice de $R(z)$ (relatif à l'axe des nombres réels parcouru dans le sens des z croissants) peut, comme l'on sait, être déterminé par le *procédé de division* de *Sturm,* ou bien par la *méthode d'Hermite* au moyen de la représentation par une forme quadratique dont la *signature* est un nombre identique à l'indice cherché.

Par « signature » d'une forme quadratique à coefficients réels, j'entends, avec M. *Frobenius* (1), la différence entre le nombre des carrés positifs et des carrés négatifs qui se présentent dans la représentation de la forme par une somme de carrés de fonctions linéaires réelles, le nombre desdits carrés étant le plus petit possible.

On est conduit à cette méthode d'Hermite pour la détermination de l'indice de $R(z)$ de la manière suivante :

Si l'on désigne par

$$\Theta(z) = y_0 + y_1 z + y_2 z^2 + \ldots + y_{m-1} z^{m-1}$$

une fonction rationnelle entière de z dont les coefficients sont regardés comme des paramètres arbitraires, alors l'intégrale

$$(12) \qquad F_m = \frac{1}{2\pi i}\int R(z)[\Theta(z)]^2\,dz,$$

prise le long d'un contour curviligne renfermant tous les pôles de $R(z)$, représente une forme quadratique des paramètres $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$, qui, étant le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de $R(z)[\Theta(z)]^2$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{z}$, est facile à former(2). D'autre part, l'intégrale est égale à la somme

(1) *Sur la loi d'inertie des formes quadratiques* (*Sitzungberichte der Kgl. preuss. Acad. d. W.*; 1894).

(2) Au lieu de l'intégrale (12), on peut également arriver au même résultat en considérant l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int R(z)\,\frac{[\Theta(z)]^2}{(z-\alpha)^{2m}}\,dz$, prise autour du point $z=\alpha$, α désignant une valeur réelle pour laquelle $R(z)$ demeure fini. Relativement à la dernière intégrale, $z=\alpha$ joue le même rôle que $z=\infty$ par rapport à (12). En corrélation avec cette circonstance, nous remarquons ce fait évident que l'indice de

des résidus de $R(z)[\Theta(z)]^2$ correspondant aux pôles de $R(z)$.

Soit $z = a$ un pôle simple de $R(z)$ et

$$(13) \qquad R(a+t) = \frac{c}{t} + c_1 + c_2 t + \ldots;$$

alors le résidu relatif à $z = a$ est

$$c[\Theta(a)]^2.$$

Lorsque a est réel, alors le pôle $z = a$ fournit à l'indice de $R(z)$ la contribution $+1$, ou -1 selon que c est respectivement positif ou négatif.

Lorsque a est imaginaire, si l'on désigne par $\bar{a}$ le pôle imaginaire conjugué de a, la somme des résidus relatifs à a et $\bar{a}$ est

$$c[\Theta(a)]^2 + \bar{c}[\Theta(\bar{a})]^2 = (P + iQ)^2 + (P - iQ)^2 = 2P^2 - 2Q^2,$$

où P et Q sont des fonctions linéaires réelles. De ceci résulte [d'abord sous l'hypothèse que $R(z)$ n'admet que des pôles simples] le théorème suivant :

Si l'on désigne par n le nombre des pôles de $R(z)$, *la forme quadratique* F_m *est représentable par une somme de n carrés, où, en outre, la différence entre le nombre des carrés positifs et celui des carrés négatifs est égale à l'indice de* $R(z)$.

Ce théorème est encore valable au cas où $R(z)$ admet des pôles d'ordre de multiplicité quelconque, et l'on doit alors entendre par n le nombre des pôles,

---

$R\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$ est égal à l'indice de $R(z)$, lorsque a, b, c, d désignent des constantes réelles dont le déterminant $ad - bc$ est positif.

chacun d'eux comptant pour son ordre de multiplicité (¹).

Pour démontrer ceci, soit $z = a$ un pôle de $R(z)$, d'ordre λ et soient

$$R(a+t) = \frac{c}{t^\lambda} + \frac{c_1}{t^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{c_{\lambda-1}}{t} + \ldots,$$
$$\theta(a+t) = \theta_0(a) + \theta_1(a)\,t + \theta_2(a)t^2 + \ldots,$$

$\Theta_0(a)$, $\Theta_1(a)$, ... désignant des formes linéaires des paramètres $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$. Le résidu relatif à $z = a$ sera

$$c_{\lambda-1}\theta_0^2 + 2c_{\lambda-2}\theta_0\theta_1 + \ldots + c(2\theta_0\theta_{\lambda-1} + 2\theta_1\theta_{\lambda-2} + \ldots).$$

Maintenant, selon que λ est pair ou impair, ce résidu peut s'écrire respectivement sous la forme

$$\theta_0\Psi_0 + \theta_1\Psi_1 + \ldots + \theta_{\mu-1}\Psi_{\mu-1} \qquad [\lambda = 2\mu],$$

ou sous la forme

$$\theta_0\Psi_0 + \theta_1\Psi_1 + \ldots + \theta_{\mu-1}\Psi_{\mu-1} + c\theta_\mu^2 \qquad [\lambda = 2\mu + 1],$$

Ψ_0, Ψ_1, ... désignant des fonctions linéaires des paramètres.

Si a est réel, les coefficients de Θ_0, Θ_1, ..., Ψ_0, Ψ_1, ... sont également réels et le résidu peut être amené à prendre la forme

$$\left[\tfrac{1}{2}(\theta_0 + \Psi_0)\right]^2 - \left[\tfrac{1}{2}(\theta_0 - \Psi_0)\right]^2 + \ldots + \left[\tfrac{1}{2}(\theta_{\mu-1} + \Psi_{\mu-1})\right]^2$$
$$- \left[\tfrac{1}{2}(\theta_{\mu-1} - \Psi_{\mu-1})\right]^2$$
$$(\lambda = 2\mu),$$

(¹) Kronecker, dans son Mémoire *Sur la Theorie de l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques* (*Monatsberichte der Kgl. preuss. Acad. d. W.*, 1881) a remarqué que les déductions relatives aux suites de Sturm restent encore légitimes, avec les modifications appropriées, lorsque les fonctions entières en question admettent des facteurs linéaires multiples.

ou

$$[\tfrac{1}{2}(\Theta_0+\Psi_0)]^2-[\tfrac{1}{2}(\Theta_0-\Psi_0)]^2+\ldots+[\tfrac{1}{2}(\Theta_{\mu-1}+\Psi_{\mu-1})]^2$$
$$-[\tfrac{1}{2}(\Theta_{\mu-1}-\Psi_{\mu-1})]^2+c\Theta_\mu^2$$
$$(\lambda=2\mu+1),$$

expressions où il se présente une somme de λ carrés de formes linéaires réelles.

Lorsque λ est pair, il se présente exactement autant de carrés positifs que de carrés négatifs; au contraire, lorsque λ est impair, il se présente un carré positif ou bien un carré négatif en plus, selon les cas respectifs où c est positif ou bien négatif. La discussion du cas où $z=a$ est complexe, a lieu d'une façon tout analogue, et l'on reconnaît ainsi que le théorème précédent est valable d'une manière générale.

IV.

Quand $m>n$, alors la forme quadratique F_m possède un déterminant qui s'évanouit, puisqu'elle est représentable par une somme de n carrés, et, par suite, qu'elle se réduit à une forme dépendant d'un nombre de combinaisons linéaires de $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ inférieur à m. Au contraire, le déterminant de la forme F_n est différent de zéro. On peut le démontrer, soit en prouvant l'identité de ce déterminant avec la résultante du numérateur et du dénominateur de la fonction rationnelle $R(z)$ écrite sous forme réduite (comparez § VI), soit en procédant comme il suit :

Si le déterminant de F_n s'évanouissait, l'on pourrait trouver des valeurs de $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ ne s'évanouissant pas toutes, et telles que

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_0},\quad \frac{\partial F_n}{\partial y_1},\quad \ldots,\quad \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}},$$

et que, par conséquent aussi les intégrales

$$(14) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int R(z)\,\Theta(z) z^{\lambda}\,dz \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n-1)$$

fussent toutes nulles.

Maintenant lorsque

$$(15) \qquad R(z)\,\Theta(z) = G(z) + R_1(z),$$

$G(z)$ désignant une fonction entière de z et

$$(16) \qquad R_1(z) = R(z)\,\Theta(z) - G(z) = \frac{k'}{z} + \frac{k''}{z^2} + \ldots$$

une fonction rationnelle s'évanouissant pour $z = \infty$, il est nécessaire, pour que ces intégrales s'annulent, que l'on ait

$$k' = k'' = \ldots = k^{(n)} = 0,$$

et, par conséquent, que $R_1(z)$ soit infiniment petit de l'ordre $n+1$ au moins pour $z = \infty$. Mais comme $R_1(z)$ ne peut devenir infini qu'en les pôles de $R(z)$, c'est-à-dire au plus n fois, il faudrait donc que $R_1(z)$ s'évanouisse identiquement; mais l'équation suivante, que l'on aurait alors

$$R(z)\,\Theta(z) = G(z),$$

est impossible, puisque $\Theta(z)$ est au plus de degré $(n-1)$ et que $R(z)$ possède n pôles.

V.

De ce qui précède, nous tirons alors le procédé suivant pour la détermination de l'indice de $R(z)$.

Soit

$$(17) \qquad R(z) = c + \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots$$

le développement de $R(z)$ dans le domaine de $z = \infty$.

Le facteur de $\frac{1}{z}$ dans le développement du produit de $R(z)$ par

$$(18) \qquad [\Theta(z)]^2 = \sum_{i,k} y_i y_k z^{i+k} \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

est alors

$$(19) \qquad F_m = \sum_{i,k} c_{i+k} y_i y_k \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

et le déterminant de la forme F_m se présente sous la forme

$$(20) \qquad D_m = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{m-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m-1} & c_m & \ldots & c_{2m-2} \end{vmatrix}.$$

Maintenant, dans la suite de déterminants

$$(21) \qquad D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad \ldots,$$

tous les termes sont, à partir de l'un d'entre eux D_{n+1} par exemple, égaux à zéro, tandis que D_n est différent de zéro. Alors n est le nombre des pôles de $R(z)$, et l'indice de $R(z)$ est égal à la *signature* de la forme F_n.

La signature de la forme F_n nous sera donnée dans chaque cas par l'examen des signes des déterminants non évanouissants de la suite $D_1, D_2, \ldots, D_n$ [1].

Au cas où aucun de ces déterminants ne s'annule, F_n, comme l'on sait et ainsi qu'il est facile de le démontrer, peut être représenté sous la forme

$$F_n = D_1 u_0^2 + \frac{D_2}{D_1} u_1^2 + \ldots + \frac{D_n}{D_{n-1}} u_{n-1}^2.$$

---

(1) FROBENIUS, *loc. cit.*, p. 410.

où u_i désigne une forme réelle linéaire de y_i, y_{i+1}, ..., y_{n-1}.

L'indice de R(z) est donc alors égal à la différence entre le nombre des termes positifs et le nombre des termes négatifs de la suite

$$D_1, \quad \frac{D_2}{D_1}, \quad \frac{D_3}{D_2}, \quad \ldots, \quad \frac{D_n}{D_{n-1}}.$$

Ce cas se présente, en particulier, lorsque l'indice de R(z) prend sa valeur maxima n. En effet, alors F_n est une forme définie positive et il en est de même de F_{n-1}, F_{n-2}, ..., F_1, car ces dernières formes prennent naissance lorsque l'on égale à zéro certains des paramètres y_0, y_1, ..., y_{n-1} de F_n. Mais le déterminant d'une forme positive est toujours positif.

L'on en conclut le théorème :

L'indice de R *prend toujours, et c'est le seul cas où ce fait a lieu, sa valeur maxima* n, *lorsque les déterminants* D_1, D_2, ..., D_n *sont positifs.*

VI.

Soit maintenant R(z) donné sous la forme

$$R(z) = \frac{b_0 z^\nu + b_1 z^{\nu-1} + \ldots + b_\nu}{a_0 z^\nu + a_1 z^{\nu-1} + \ldots + a_\nu}, \tag{22}$$

le coefficient a_0 étant, par hypothèse, différent de zéro. Le degré ν du dénominateur de R(z) est supérieur ou égal à n, selon que le numérateur et le dénominateur de R(z) ont respectivement un diviseur commun ou non. L'on peut maintenant transformer le déterminant D_m (20), en un déterminant dont les éléments sont formés par les coefficients a_0, ..., a_ν, b_0, ..., b_ν. Cette transformation est praticable à l'aide du théorème suivant que l'on déduit aisément du théorème relatif à la multiplication des déterminants :

Soient

$$(23) \qquad P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_m$$

des séries de puissances de z qui, par l'effet d'une multiplication par

$$(24) \qquad P = k + k_1 z + k_2 z^2 + \ldots$$

peuvent être transformées en de nouvelles séries de puissances

$$(25) \qquad P'_1, \quad P'_2, \quad \ldots, \quad P'_m,$$

et telles, par conséquent, que l'on ait en général

$$P'_m = PP_m.$$

Si l'on met à part alors dans chacune des séries respectives

$$\begin{array}{llll} P_1, & P_2, & \ldots, & P_m, \\ P'_1, & P'_2, & \ldots, & P'_m, \end{array}$$

les m premiers termes, et si l'on désigne respectivement par Δ_m, Δ'_m les déterminants des m fonctions entières de z de degré $(m-1)$ ainsi obtenues, l'on a

$$(26) \qquad \Delta'_m = k^m \Delta_m,$$

J'appliquerai maintenant ce théorème au cas suivant :

Soit

$$\frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots} = c + c_0 z + c_1 z^2 + \ldots;$$

les séries (23) peuvent être prises comme il suit

$$P_1 = 1, \qquad P_2 = c + c_0 z + c_1 z^2 + \ldots,$$
$$P_{2\lambda+1} = z^\lambda P_1, \qquad P_{2\lambda+2} = z^\lambda P_2$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots),$$

tandis que la série (24) sera identifiée avec

$$P = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots$$

Les séries (25) seront alors

$$P'_1 = P, \qquad P'_2 = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$
$$P'_{2\lambda+1} = z^\lambda P'_1,$$
$$P'_{2\lambda+2} = z^\lambda P'_2,$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Si l'on remplace alors dans l'équation (26) l'indice m par $2m$, cette équation donnera la transformation désirée du déterminant D_m, et l'on a notamment

$$(27) \qquad a_0^{2m} D_m = R_m,$$

où R_m désigne le déterminant

$$(28) \qquad R_m = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{2m-1} \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_{2m-1} \\ 0 & a_0 & \ldots & a_{2m-2} \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{2m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_m \\ 0 & 0 & \ldots & b_m \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant s'évanouit certainement pourvu que $m > n$, puisqu'alors les éléments de la dernière colonne verticale sont tous nuls. Maintenant, pour arriver à la détermination de l'indice (et en même temps du nombre n des pôles) de la fonction rationnelle (22), on procédera comme il suit :

On formera la suite des déterminants

$$R_1, R_2, \ldots, R_\nu.$$

Lorsque R_n est le dernier terme de cette suite qui ne s'annule pas, n sera le nombre des pôles, ou, ce qui revient au même, le degré du dénominateur de $R(z)$, lorsque $R(z)$ est écrit sous forme réduite. L'indice de $R(z)$ sera alors fourni par l'examen des signes des termes non évanouissants dans la suite $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

VII.

En particulier, l'on obtient maintenant facilement le théorème énoncé au § I. Soit

$$(29)\qquad f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

une équation à coefficients réels. On aura alors

$$(30)\quad i^n f(-iz) = (a_0 z^n - a_2 z^{n-2} + \ldots) + i(a_1 z^{n-1} - a_3 z^{n-3} + \ldots),$$

et le nombre désigné par Δ au § II est l'indice de

$$(31)\qquad R(z) = \frac{a_1 z^{n-1} - a_3 z^{n-3} + \ldots}{a_0 z^n - a_2 z^{n-2} + \ldots}.$$

L'équation (29) a maintenant toujours, ainsi qu'il résulte de (8) au § II, des racines à parties réelles négatives au seul et unique cas où $\Delta = n$. Il s'ensuit que le numérateur et le dénominateur de $R(z)$ doivent être sans diviseur commun. En effet, s'il en était autrement, $R(z)$ devrait être représentable comme un quotient dont le dénominateur serait de degré $n' < n$ et l'indice de $R(z)$ serait au plus égal à n'.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (29) n'admette que des racines à partie réelle négative est par conséquent celle-ci : la forme

$$(32)\qquad F_n = \frac{1}{2\pi i}\int R(z)\,[\theta(z)]^2\,dz$$

doit être une forme définie positive de $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$. Par suite de ce fait que $R(z)$ est une fonction impaire de z, F_n est décomposable en deux formes dont l'une ne renferme que les paramètres $y_0, y_2, y_4, \ldots,$ et l'autre que les paramètres $y_1, y_3, y_5, \ldots$ Soit, en effet,

$$(33) \qquad H(z) = \frac{a_1 z^{\lambda-1} - a_3 z^{\lambda-2} + \ldots}{a_0 z^{\lambda} - a_2 z^{\lambda-1} + \ldots}$$

$\left(\lambda = \frac{n}{2}\right.$ ou $\frac{n+1}{2}$ selon que n est respectivement pair ou impair$\left.\right)$; on a évidemment

$$R(z) = z H(z^2).$$

Réunissons ensuite dans $\Theta(z)$ les termes à puissances paires et les termes à puissances impaires en posant par conséquent

$$\Theta(z) = \Theta_0(z^2) + z\Theta_1(z^2).$$

Si l'on introduit alors dans l'intégrale (32), $z^2 = \zeta$ comme nouvelle variable d'intégration et si ensuite on remplace de nouveau ζ par z, on trouvera la décomposition en question

$$(34) \quad F_n = \frac{1}{2\pi i}\int H(z)[\Theta_0(z)]^2 dz + \frac{1}{2\pi i}\int z H(z)[\Theta_1(z)]^2 dz.$$

Le fait énoncé par cette formule, que l'indice de $R(z)$ est égal à la somme des indices de $H(z)$ et $zH(z)$, peut se déduire, ceci soit dit en passant, de la définition même de l'indice. Si l'on pose, en vertu de § V et § VI, la condition pour que F_n, ou, ce qui revient au même, pour que chacune des deux intégrales (34) représente une forme définie positive, on sera, après une transformation facile du déterminant que l'on doit former, conduit au théorème du § I.

VIII.

A l'aide de l'équation (8) du § II et de la méthode développée au § VI pour la détermination de l'indice d'une fonction rationnelle, on a résolu en général le problème qui consiste à déterminer le nombre de ces racines d'une équation $f(x) = 0$, qui ont une partie réelle négative, sous l'hypothèse que l'équation n'admet comme racine aucune valeur imaginaire pure de x. (On peut d'ailleurs s'affranchir de cette restriction si l'on convient de compter chaque racine imaginaire pure avec l'ordre de multiplicité $\frac{1}{2}$ comme une racine à partie négative aussi bien que positive). Ce problème, comme le fait voir la substitution de $-ix$ aux lieu et place de x, n'est pas essentiellement différent de cet autre problème, qui consiste à déterminer le nombre des racines d'une équation de degré n

$$f_1(x) + if_2(x) = 0 \tag{35}$$

qui ont une partie imaginaire positive, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ désignant des fonctions entières à coefficients réels. Ce nombre sera donné également par la première formule (8), et par conséquent par $\frac{n+\Delta}{2}$, Δ désignant alors l'indice de $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

Ce dernier problème a fait l'objet des recherches de M. Hermite dans deux Mémoires [1] auxquels je renverrai le lecteur. Pour conclure, je remarque encore ceci : de la définition de l'indice, résulte évidemment qu'une fonction rationnelle $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ possède toujours l'indice $\pm n$ au seul et unique cas où le dénominateur $f_1(x)$ s'évanouit en n points de l'axe des quantités réelles [$x = \infty$ devant être regardé comme un zéro de $f_1(x)$ lorsque $f_1(x)$ atteint seulement le degré $(n-1)$], et lorsqu'en même

---

[1] *Journal de Crelle,* t. 52, p. 39, et *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. VII, p. 128.

temps $f_2(x)$ prend des valeurs de signe contraire pour deux racines consécutives quelconques de $f_1(x) = 0$. L'on conclut encore de ceci que la valeur maxima $\pm n$ de l'indice de $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ se présente toujours au seul et unique cas où chacune des équations $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ admet n racines réelles distinctes entre elles et où en même temps les racines de l'une des équations sont séparées par celles de l'autre. En particulier, les n racines de l'équation (35) ont toujours leurs parties imaginaires toutes positives ou bien toutes négatives, au seul et unique cas où les racines des équations $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$, jouissent de la propriété précédemment énoncée ([1]).