NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1896.

ΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. C.-A. LAISANT,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR A SAINTE-BARBE,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. X. ANTOMARI,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CARNOT.

**Publication fondée en 1842 par Gerono et Terquem,
et continuée par Gerono, Prouhet, Bourget, et MM. Brisse et Rouché.**

TROISIÈME SÉRIE.

TOME QUINZIÈME.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1896

AUX ABONNÉS DES « NOUVELLES ANNALES ».

Par suite d'un changement intervenu dans l'état de la propriété des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, nous nous trouvons appelés à prendre la direction de ce journal.

Notre premier acte doit être un hommage public au fondateur de ce Recueil, nous avons nommé GERONO, et aux deux hommes de grand mérite auxquels nous succédons. C'est un vif regret pour nous de ne plus voir, à la rédaction des *Nouvelles Annales*, M. ROUCHÉ et M. BRISSE dont nous eussions été fiers de pouvoir nous dire les modestes collaborateurs. Si, malgré nos instances, ils en ont décidé autrement, nous espérons néanmoins que le public mathématique voudra bien accorder à la Rédaction nouvelle un peu de la faveur et de la sympathie que rencontrèrent nos devanciers.

Lorsque les *Nouvelles Annales* furent fondées, en 1842, aucun autre Recueil périodique ne se trouvait à la disposition des candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale supérieure. Depuis lors, plusieurs publications importantes ont paru, et toutes rendent d'incontestables services. Mais les candidats à la Licence et à l'Agrégation se trouvent, à l'heure actuelle, à peu près dans la même situation que celle des Élèves de Mathématiques spéciales avant 1842. Il faut dire aussi que l'élargissement des programmes a rendu peut-être moins nette la ligne de démarcation qui séparait jadis ces différentes branches de l'Enseignement.

Pour combler la lacune que nous venons de signaler, et désireux de créer un lien étroit entre l'Enseignement supérieur des Mathématiques et les *Nouvelles Annales*, nous nous sommes adressés à un certain nombre de professeurs dans les diverses Facultés des Sciences. On en trouvera la liste d'autre part; tous ont bien voulu consentir à devenir les Correspondants de ce journal, à nous envoyer les énoncés des compositions données aux examens, des indications sur les solutions, et à nous aider de leur précieuse collaboration. Nous leur en exprimons ici toute notre reconnaissance.

En nous attachant surtout à la préparation aux examens de Licence et aux concours d'Agrégation, notre but essentiel est donc d'être utile aux candidats et aux professeurs.

Pour y parvenir, nous comptons accorder une préférence particulière aux questions qui concernent cette préparation, plutôt qu'à des Mémoires, d'un intérêt parfois considérable, mais qui peuvent, plus utilement, être insérés dans d'autres Recueils.

Les Mathématiques spéciales occupent toujours une large place dans les concours. Dans ce Recueil, nous comptons leur en laisser une en rapport avec leur importance, en nous efforçant toutefois de nous maintenir dans un ordre d'idées un peu élevé, pouvant intéresser à la fois les professeurs et l'élite des candidats à nos deux grandes Écoles scientifiques : l'École Polytechnique et l'École Normale.

D'autre part, nous sommes persuadés, comme l'était

Gerono, qu'à tous les degrés de l'Enseignement mathématique, un cours n'est véritablement bien assimilé et ne devient profitable que par de très nombreuses applications et grâce à de continuels exercices. Ceci nous engage à restituer aux *questions* des *Nouvelles Annales* l'importance qu'elles avaient jadis; ces questions, comme autrefois, figureront dorénavant dans le corps même du journal. Il va sans dire que les solutions seront publiées le plus rapidement et le plus régulièrement possible.

Tous les énoncés des compositions de Mathématiques des concours d'Agrégation et des examens de Licence seront reproduits à l'avenir par les *Nouvelles Annales*, le plus souvent avec l'indication sommaire des solutions; et, chaque fois que l'intérêt de la question s'y prêtera, nous n'hésiterons même pas à publier une solution complète, avec tous les développements désirables.

La Bibliographie et l'Histoire des Mathématiques conserveront dans ce Recueil la place qu'elles y ont occupée depuis l'origine.

Enfin, nous nous réservons d'étudier et de proposer à nos abonnés et à nos lecteurs toutes les améliorations qui nous paraîtront utiles et réalisables. Sur quelques-unes d'entre elles, nous avons déjà des idées qui demandent à être mûries pour trouver leur formule définitive. Pour d'autres, nous comptons sur la collaboration empressée de nos lecteurs.

Cette collaboration, à aucun moment, n'a fait défaut à la rédaction des *Nouvelles Annales;* c'est une tradition qui ne sera pas abandonnée. Au public un peu restreint qui s'occupait autrefois des choses mathématiques sont venus s'ajouter aujourd'hui bien des éléments nouveaux;

les candidats aux Écoles spéciales, à la Licence et à l'Agrégation deviennent de plus en plus nombreux; comme conséquence, il en est de même pour les professeurs.

C'est à tous ceux-là que nous adressons notre appel; et nous avons le ferme espoir qu'entre eux et nous s'établira de plus en plus un courant de mutuelle sympathie et d'aide réciproque qui ne pourra que profiter au développement et au progrès de la Science mathématique.

C.-A. Laisant, X. Antomari.

LISTE DES CORRESPONDANTS DES « NOUVELLES ANNALES »

DANS LES VILLES OU SIÈGENT LES FACULTÉS DES SCIENCES.

BESANÇON..............	MM. X. Stouff.
BORDEAUX.............	Brunel.
CAEN....................	A. de Saint-Germain.
CLERMONT-FERRAND...	C. Guichard.
DIJON..................	Duport.
GRENOBLE.............	J. Collet.
LILLE....................	E. Borel et A. Petot.
LYON....................	L. Autonne.
MARSEILLE.............	Sauvage.
MONTPELLIER..........	E. Fabry.
NANCY.................	H. Vogt.
PARIS..................	Raffy.
POITIERS...............	Maillard.
RENNES................	Andrade.
TOULOUSE.............	Cosserat.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[V9] L'ŒUVRE GÉOMÉTRIQUE DE SOPHUS LIE (1);

PAR M. FÉLIX KLEIN.

(Traduit de l'anglais par M. L. LAUGEL.)

Pour bien comprendre tout le génie mathématique de *Sophus Lie*, nous ne devons pas nous en tenir aux Volumes qu'il vient de publier récemment en collaboration avec le Dr *Engel*, mais il faut encore étudier les premiers Mémoires qu'il fit paraître pendant les premières années de sa carrière scientifique. C'est là que se révèle le grand *géomètre* qui a nom *Sophus Lie;* dans ses dernières publications, voyant qu'il était imparfaitement compris des mathématiciens, accoutumés plutôt au point de vue analytique, il a adopté un traitement très général basé sur l'Analyse seule et qu'il n'est pas, du reste, toujours aisé de suivre.

Heureusement pour moi, j'eus l'avantage d'être initié de très près aux idées de *Lie* à une époque très

(1) Extrait de l'Ouvrage : *The Evanston Colloquium;* Conférences sur les Mathématiques faites du 28 août au 9 septembre 1893 devant le Congrès des mathématiciens réunis à Chicago lors de l'Exposition, par M. FÉLIX KLEIN, Professeur à Göttingue; recueillies par M. ALEX. ZIWET; Londres et New-York, Mac Millan et Cie, 1894.

primitive, lorsqu'elles étaient encore, comme disent les chimistes, « à l'état naissant », et par conséquent des plus capables de produire une énergique « réaction ».

Aussi ai-je aujourd'hui en vue de vous entretenir surtout du Mémoire *Sur les complexes et en particulier les complexes de droites et de sphères et de leur application à la théorie des équations aux dérivées partielles* (*Math. Annalen,* t. V, 1872, p. 145-256).

Avant de définir la place qu'occupe ce Mémoire dans le développement historique de la Géométrie, il faut dire quelques mots de deux grands géomètres d'une époque antérieure : *Plücker* (1801-1868) et *Monge* (1746-1818). Le nom de *Plücker* est familier à toute personne qui connaît un peu de Mathématiques, par ses formules relatives aux courbes algébriques. Mais ce qui aujourd'hui, pour nous, est de plus d'importance, c'est son idée généralisée de l'élément d'espace. La Géométrie ordinaire, où le point se présente comme élément, traite de l'espace comme ayant trois dimensions, conformément aux trois constantes qui déterminent la position d'un point. Une transformation dualistique donne le plan comme élément. L'espace, en ce cas, a encore trois dimensions, car il se présente trois constantes indépendantes entre elles dans l'équation d'un plan. Mais si l'on choisit la droite comme élément d'espace, ce dernier doit être regardé comme quadri-dimensionnel, puisque quatre constantes indépendantes déterminent une ligne droite. Et encore, si l'on prend comme élément d'espace une surface quadrique F_2, l'espace aura neuf dimensions, car chaque élément de ce type exige neuf constantes pour sa détermination, les neuf constantes indépendantes entre elles de la surface du second ordre F_2. En d'autres termes, l'espace contient ∞^9 quadriques. Cette conception des hyperespaces doit être soigneusement distinguée de celle de *Grassmann* et autres. En effet, *Plücker* rejetait toute autre conception d'espaces à plus de trois dimensions comme étant trop abstraite. Le travail de *Monge*, qui est ici d'importance capitale, est son *Application de l'Analyse à la Géométrie* (1809, *nouvelle édition*, 1850). On sait qu'il y traite des équations différentielles aux dérivées partielles et totales des premier et second ordre et en fait l'application à des questions géométriques telles que : courbure des surfaces, lignes de courbure, lignes géodésiques, etc. Le traitement des problèmes de la Géométrie au moyen de l'Analyse infinitésimale est un caractère de cet Ouvrage; mais un autre trait, peut-être encore plus important, qui le caractérise, c'est la réciproque, c'est-à-dire l'application de l'intuition géométrique à l'Analyse.

Or c'est là le caractère prédominant de l'œuvre de *Lie*; et il en augmente la puissance et la fécondité en adoptant l'idée plückérienne d'un élément d'espace généralisé et en étendant encore cette conception fondamentale.

Quelques exemples serviront mieux que tout à donner une idée de la portée de l'œuvre. Je choisis, comme je l'ai déjà fait autre part, la *Géométrie des sphères* de *Lie* (*Kugel-Geometrie*).

Prenant l'équation de la sphère sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Bx - 2Cy - 2Dz + E = 0,$$

les coefficients B, C, D, E peuvent être regardés comme les coordonnées de la sphère, et l'espace ordinaire se présente alors comme une variété [1] à quatre dimen-

---

[1] [*Mannigfaltigkeit*]. Variété. C'est la traduction adoptée en général. M. Poincaré emploie aussi ce mot. Voir *Analysis Situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, Cahier I).

Note du Traducteur.

sions. Quant au rayon R de la sphère, nous avons

$$R^2 = B^2 + C^2 + D^2 - E,$$

relation qui lie la cinquième grandeur R aux quatre coordonnées B, C, D, E.

Pour introduire des coordonnées homogènes, posons

$$B = \frac{b}{a}, \qquad C = \frac{c}{a}, \qquad D = \frac{d}{a}, \qquad E = \frac{e}{a}, \qquad R = \frac{r}{a};$$

alors $a : b : c : d : e$ sont les cinq coordonnées homogènes de la sphère, et la sixième grandeur r leur est liée par l'entremise de l'équation quadratique homogène

$$r^2 = b^2 + c^2 + d^2 - ae. \tag{1}$$

Maintenant, la Géométrie des sphères a été traitée d'après deux méthodes qui doivent être soigneusement distinguées l'une de l'autre. Dans la première, que nous pouvons désigner par *Géométrie élémentaire des sphères,* on emploie seulement les cinq quantités a, b, c, d, e, tandis que dans l'autre, que je nommerai *Géométrie supérieure des sphères* ou *de Lie,* on introduit encore la grandeur r. Et, dans ce dernier système, une sphère a six coordonnées homogènes a, b, c, d, e, r qui sont liées entre elles par l'équation (1).

A un point de vue plus élevé, la distinction entre ces deux géométries, ainsi que leur caractère individuel, est mise en pleine lumière si l'on considère *le groupe* qui correspond à chacune d'elles.

En effet, tout système de géométrie est caractérisé par son groupe, au sens que j'ai exposé dans mon *Programme d'Erlangen* (*Études comparatives sur les nouvelles recherches géométriques.* Programme présenté à la Faculté philosophique et au Sénat de l'Université du roi Frédéric-Alexandre à Erlangen. Deichert-

Erlangen; 1872. Traduit en anglais par Haskell. *Bulletin de la Société mathématique de New-York*, t. II, 1893, p. 215-249). Ainsi, chaque système de géométrie ne s'occupe que de ces relations de l'espace qui restent inaltérées par toutes les transformations de son groupe.

Par exemple, dans la géométrie ordinaire des sphères, le groupe est formé par toutes les substitutions linéaires des cinq quantités a, b, c, d, e qui laissent inaltérée l'équation quadratique homogène

$$b^2 + c^2 + d^2 - ae = 0. \tag{2}$$

Ceci fournit $\infty^{25-15} = \infty^{10}$ substitutions. En adoptant cette définition, nous obtenons des transformations ponctuelles d'un caractère simple. L'interprétation de l'équation (2) se traduit géométriquement en disant que le rayon est nul. Toute sphère de rayon zéro, c'est-à-dire tout point, se transforme ainsi en un point. De plus la polaire

$$2bb' + 2cc' + 2dd' - ae' - a'e = 0$$

reste inaltérée par l'effet de la transformation, et l'on a cette conséquence que les sphères orthogonales se transforment en sphères orthogonales. Ainsi le groupe de la géométrie élémentaire des sphères est caractérisé comme *groupe conforme*, groupe que l'on sait être celui qui correspond à la transformation par inversion, c'est-à-dire par rayons vecteurs réciproques, et qui est bien connu par ses applications en Physique mathématique.

M. *Darboux* a grandement développé cette géométrie élémentaire des sphères. Toute équation du second degré

$$F(a, b, c, d, e) = 0,$$

adjointe à la relation (2), représente une Punckt-fläche (*surface ponctuelle*) désignée par M. *Darboux* sous le nom de *cyclide*. Au point de vue de la Géométrie ordinaire projective, la cyclide est une surface du quatrième ordre, admettant une conique double spéciale, le cercle de l'infini. On trouvera une étude détaillée de ces cyclides dans le célèbre Ouvrage de M. *Darboux : Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal,* et en d'autres Mémoires de cet illustre auteur (¹).

Comme les quadriques peuvent être regardées comme des cas particuliers de cyclides, il se présente aussi une méthode de généralisation des propriétés connues des quadriques en les étendant aux cyclides. Ainsi, M. *Bôcher,* de l'Université de *Harvard* (*États-Unis*), dans sa dissertation (*Sur les développements en série de la théorie du potentiel;* Mémoire couronné; *Göttingue, Dietrich;* 1891), a traité de l'extension d'un problème de la théorie du potentiel, relatif à un corps ayant pour limites des surfaces du second degré, cas bien connu, en considérant un corps limité par des cyclides. M. *Bôcher* doit publier dans quelques mois un Ouvrage étendu sur le même sujet (¹).

Dans la *Géométrie supérieure* des sphères *de Lie,* les six coordonnées homogènes $a:b:c:d:e:r$ sont liées, comme nous l'avons déjà dit, par l'équation qua-

---

(¹) En particulier, *Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires,* 2ᵉ édition, 1896. Hermann, Paris. Présenté à l'Académie des Sciences en 1869. Un Avant-propos de M. *Darboux,* dont il est superflu de signaler l'intérêt, est reproduit dans le Catalogue n° 48 (décembre 1895) de la librairie Hermann, 8, rue de la Sorbonne, Paris.

Note du Traducteur.

(¹) MAXIME BÔCHER, *Sur les développements en série dans la Théorie du potentiel,* avec préface de *Félix Klein.* Leipzig, Teubner; 1894. *Note du Traducteur.*

dratique homogène

$$b^2 + c^2 + d^2 - r^2 - ae = 0.$$

Le groupe correspondant est le groupe de substitutions linéaires transformant cette équation en elle-même. Nous avons ainsi un groupe de $\infty^{36-21} = \infty^{15}$ substitutions. Mais ceci n'est pas un groupe de transformations ponctuelles. En effet, une sphère de rayon zéro devient une sphère dont, en général, le rayon est différent de zéro. Car, si l'on pose, par exemple,

$$B' = B, \qquad C' = C, \qquad D' = D, \qquad E' = E,$$
$$R' = R + \text{const.},$$

on voit que la transformation consiste en une simple dilatation, si l'on peut s'exprimer ainsi, de chaque sphère, un point devenant une sphère de rayon donné.

La signification de ce fait que l'équation polaire

$$2bb' + 2cc' + 2dd' - 2rr' - ae' - a'e = 0$$

demeure invariante pour toute transformation du groupe se traduit tout simplement par cette importante circonstance que les sphères primitivement en contact demeurent encore en contact. Le groupe appartient donc à cette classe importante de *transformations* dites *de contact* que nous allons considérer plus loin avec quelque détail.

Lorsque l'on étudie une géométrie spéciale, comme, par exemple, la géométrie des sphères de *Lie*, deux méthodes se présentent :

1° Nous pouvons envisager des équations de divers degrés et étudier ce qu'elles représentent. En se livrant à ces recherches, lorsque *Lie* dut créer une terminologie relative aux diverses configurations ainsi obtenues, il fit usage des désignations introduites par *Plücker* dans sa géométrie de la droite. Ainsi une seule équation

$$F(a, b, c, d, e, r) = 0$$

est dite représenter *un complexe* du premier, second, etc. ordre, suivant le degré de l'équation. Un complexe renferme donc ∞^3 sphères. Deux équations telles que

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0$$

représentent *une congruence* renfermant ∞^2 sphères. Trois équations

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0$$

représentent un *système de sphères,* leur nombre étant ∞^1. Il faut, du reste, ne pas oublier que, dans chaque cas, l'équation du second degré

$$b^2 + c^2 + d^2 + r^2 - ae = 0$$

est sous-entendue combinée avec l'équation $F = 0$.

Il est bon aussi d'observer que ces mots sont employés par d'autres auteurs dans ce que j'ai nommé *Géométrie élémentaire des sphères,* où leur sens est alors naturellement différent.

2° Une autre méthode qui se présente lorsque l'on étudie une nouvelle géométrie est la suivante : On se demandera comment les configurations ordinaires de la géométrie ponctuelle pourront être traitées à l'aide du nouveau système. Cette ligne de recherches a conduit *Sophus Lie* à des résultats du plus haut intérêt.

Dans la Géométrie ordinaire, l'on conçoit une surface comme un lieu de points; dans la Géométrie de *Lie*, la surface apparaît comme l'ensemble de toutes les sphères qui ont un contact avec la surface. Ceci donne une triple infinité de sphères, ou complexe de sphères

$$F(a, b, c, d, e, r) = 0.$$

Ceci naturellement n'est pas un complexe *général,* car tout complexe n'est pas tel qu'il doive nécessairement avoir un contact avec une surface, et l'on a démontré que la condition à remplir pour un complexe de sphères, lorsque toutes ses sphères doivent être tangentes à une surface, est la suivante :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial d}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 - \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial F}{\partial e} = 0.$$

Pour donner au moins un exemple relatif au développement de cette belle théorie, je mentionnerai ici que, parmi le nombre infini de sphères tangentes à la surface en un point quelconque, il en est deux qui ont avec elle un contact *stationnaire*. Elles sont dites *les sphères principales*. Les lignes de courbure de la surface peuvent être alors définies comme les courbes le long desquelles les sphères principales sont tangentes à la surface en deux points consécutifs.

La Géométrie de la droite de *Plücker* peut être étudiée d'après les deux méthodes que nous venons d'indiquer. Dans cette géométrie, désignons alors par p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23} les six coordonnées habituelles homogènes avec $p_{ik} = -p_{ki}$. Nous avons alors l'identité

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

et nous choisirons pour groupe les ∞^{15} substitutions linéaires qui transforment cette équation en elle-même. Ce groupe correspond à l'ensemble total des collinéations (¹) et des *inversions* (ou transformations par rayons vecteurs réciproques); autrement dit, c'est le groupe projectif. La raison de ceci tient à ce fait que l'équa-

---

(¹) C'est le mot employé, en général, en Allemagne pour désigner les transformations homographiques. *Note du traducteur.*

tion polaire

$$p_{12}p'_{34}+p_{13}p'_{42}+p_{14}p'_{23}+p_{34}p'_{12}+p_{42}p'_{13}+p_{23}p'_{14}=0$$

représente simplement l'intersection des deux droites p et p'.

Maintenant, *Lie* a institué une comparaison du plus haut intérêt entre la géométrie plückérienne de la droite et sa propre géométrie des sphères. Dans chacune de ces géométries, il se présente six coordonnées homogènes qui sont respectivement liées entre elles par une équation quadratique homogène. Le discriminant de chaque équation est différent de zéro. Il s'ensuit que nous pouvons passer de l'une à l'autre de ces deux géométries au moyen de substitutions linéaires.

Ainsi, pour transformer

$$p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0$$

en

$$b^2+c^2+d^2-r^2-ae=0,$$

il suffit de poser

$$p_{12}=b+ic,\qquad p_{13}=d+r,\qquad p_{14}=-a,$$
$$p_{34}=b-ic,\qquad p_{42}=d-r,\qquad p_{23}=e.$$

Il résulte du caractère linéaire des substitutions que les équations polaires sont transformées de même l'une en l'autre; d'où ce merveilleux résultat : *Deux sphères en contact correspondent à deux droites qui se coupent.*

Il n'est pas inutile de remarquer que les équations de transformation renferment l'unité imaginaire i ; et la loi, dite *loi d'inertie des formes quadratiques,* nous indique immédiatement que cette introduction de l'imaginaire est non seulement inévitable, mais essentielle.

Pour donner une idée de la portée de cette transformation de la géométrie de la droite en géométrie des sphères et *vice versa,* considérons trois équations linéaires

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0,$$

les variables étant, soit des coordonnées de droites, soit des coordonnées de sphères. Dans le premier de ces deux cas, les trois équations représentent un *système de droites,* c'est-à-dire l'un des deux systèmes de droites, génératrices d'un hyperboloïde à une nappe. On sait bien que chaque droite de l'un ou l'autre système coupe toutes les droites de l'autre système. Transformons en géométrie des sphères; nous obtenons *un système de sphères* correspondant à chaque système de droites, et chaque sphère de l'un ou l'autre système est nécessairement tangente à toute sphère de l'autre système. Nous sommes en présence d'une configuration bien connue en Géométrie par d'autres études; en effet, toutes ces sphères sont l'enveloppe d'une surface célèbre sous le nom de *cyclide de Dupin.* Nous avons ainsi trouvé une corrélation bien remarquable entre la cyclide de Dupin et l'hyperboloïde à une nappe.

L'exemple peut-être le plus frappant de la fécondité de ces recherches de *Lie* est celui de sa belle découverte qu'à l'aide de cette transformation les lignes de courbure d'une surface sont transformées en lignes asymptotiques de la surface transformée, et réciproquement. Ceci se reconnaît immédiatement lorsque l'on prend la définition donnée ci-dessus pour les lignes de courbure, et que l'on traduit alors cette définition mot à mot dans le langage de la géométrie de la droite. Ainsi se trouve démontré que deux problèmes de Géométrie infinitésimale, longtemps regardés comme complètement distincts, sont au fond identiques. C'est là certainement une des plus élégantes contributions qui aient été faites de notre temps à la Géométrie différentielle.

La distinction entre les fonctions analytiques et les fonctions algébriques, si importante en pure Analyse, se présente encore dans le traitement géométrique.

Les fonctions *analytiques* sont celles que l'on peut représenter par des séries de puissances qui convergent dans une certaine région ayant pour contour la circonférence du cercle dit *de convergence*. En dehors de cette région, la fonction analytique n'est pas regardée comme donnée *a priori*; son prolongement dans des régions plus étendues est un sujet de recherches spéciales et peut conduire à des résultats tout différents, selon le cas particulier envisagé.

D'autre part, une fonction *algébrique* ($w =$ alg. (z)) est supposée connue dans tout le plan de la variable complexe et possède un nombre fini de valeurs pour chaque valeur de z.

De même en Géométrie, nous pouvons réserver toute notre attention à une portion limitée de courbe analytique ou de surface, par exemple en nous occupant de la construction de la tangente, de l'évaluation de la courbure, etc.; ou bien nous pouvons envisager l'ensemble total des courbes algébriques et des surfaces dans l'espace.

Presque toutes les applications du Calcul différentiel et intégral à la Géométrie appartiennent à la première branche ci-dessus de la Géométrie, et comme c'est principalement là ce qui m'occupera aujourd'hui, il n'est pas besoin de nous limiter strictement aux fonctions algébriques, mais nous pourrons employer des fonctions analytiques plus générales; toujours, bien entendu, en nous limitant à des portions finies de l'espace. J'ai cru bon de dire ceci une fois pour toutes, car il me semble qu'aux *États-Unis* l'unique considération des courbes algébriques est peut-être trop prédominante.

Dans la dernière Conférence, nous avons examiné la possibilité d'introduire de nouveaux éléments d'espace. Aujourd'hui encore, nous emploierons un nouvel élément; cet élément consiste en une portion infinitésimale de surface (ou mieux de son plan tangent). C'est ce que l'on nomme, et la désignation n'est pas très juste, *un élément de surface* (Flächen-element) et l'on peut le comparer par exemple à une écaille de poisson infiniment petite. A un point de vue plus abstrait, on peut le définir tout simplement comme la combinaison d'un plan et d'un point situé sur ce plan.

Comme l'équation d'un plan passant par un point (x, y, z) peut s'écrire sous la forme

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

x', y', z' désignant les coordonnées courantes, nous aurons x, y, z, p, q comme coordonnées de notre élément de surface, en sorte que l'espace se présente comme une variété à cinq dimensions. Si l'on emploie les coordonnées homogènes, le point (x_1, x_2, x_3, x_4) et le plan (u_1, u_2, u_3, u_4) passant par ce point sont liés par la relation

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0,$$

qui exprime leur position corrélative, et le nombre de constantes indépendantes entre elles est $3 + 3 - 1 = 5$.

Examinons alors comment la Géométrie ordinaire se présente dans cette représentation. Un point étant le lieu de tous les éléments de surface qui passent par ledit point est représenté comme une variété à deux dimensions; disons, pour abréger le langage, une M_2. Une courbe est représentée par la totalité de ces éléments de surface, qui ont leur point sur la courbe et dont le plan contient la tangente. Ces éléments forment encore une M_2. Enfin, une surface est donnée par ces éléments de surface, qui ont leurs points sur la surface et dont le plan coïncide avec le plan tangent à la surface. Ceux-ci forment encore une M_2.

Bien plus, toutes ces M_2 ont une bien importante propriété en commun. Deux éléments de surface consécutifs, qui appartiennent aux mêmes point, courbe ou surface respectivement, satisfont toujours à la condition

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

cas simple d'une relation dite de *Pfaff*; et réciproquement, si deux éléments de surface satisfont à cette condition, ils appartiennent aux mêmes point, courbe ou surface, selon les cas.

Nous avons ainsi ce résultat du plus haut intérêt que, dans la géométrie des éléments de surface, les points, aussi bien que les courbes et les surfaces, sont tous comme réunis en un tout ensemble, tous étant représentés par les variétés à deux dimensions qui jouissent de la propriété susdite. Cette définition est d'autant plus importante, qu'il n'existe pas d'autre M_2 jouissant de cette propriété.

Passons maintenant à ce type très général de transformations, auquel *Lie* a donné le nom de *transformations de contact*. Ce sont les transformations qui changent notre élément (x, y, z, p, q) en (x', y', z', p', q') par l'effet de substitutions :

$$\begin{aligned} x' &= \Phi(x, y, z, p, q), \\ y' &= \Psi(x, y, z, p, q), \\ z' &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p' &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q' &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

qui transforment en elle-même l'équation différentielle linéaire de *Pfaff*

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

La traduction géométrique de ceci, c'est que, par l'effet de la transformation, toute M_2 ayant la propriété donnée est transformée en une M_2 qui en jouit également. Ainsi, par exemple, une surface se transforme, en général, en une surface et, dans des cas spéciaux, en un point ou en une courbe. De plus, considérons deux variétés M_2 ayant entre elles un contact, autrement dit ayant un élément de surface en commun; ces M_2 sont changées par la transformation en deux autres M_2, qui ont aussi entre elles un contact. On comprend bien, par cet exemple, pourquoi *Lie* a choisi la désignation, classique aujourd'hui, de transformation de contact.

Lesdites transformations sont d'une telle importance et se présentent si fréquemment, que des cas particuliers avaient déjà, il y a bien longtemps, attiré l'attention des géomètres, mais ce n'était pas sous cette désignation naturellement, ni même à ce point de vue relatif au contact, en sorte que leur véritable et profonde portée restait ignorée.

J'ai donné de nombreux exemples de transformations de contact dans mon *Cours lithographié de Géométrie supérieure,* professé à *Göttingue*, pendant le semestre d'hiver de 1892-1893.

Ainsi, l'on en rencontre encore un intéressant exemple dans le domaine à deux dimensions, relativement au problème des engrenages de roues dentées. Le profil de la dent d'une roue est donné, on demande de trouver le profil de l'autre. J'ai exposé ceci dans une conférence faite à l'Exposition de *Chicago,* en employant des modèles, envoyés à l'Exposition par les Universités allemandes.

Je citerai encore un autre exemple, que l'on rencontre dans la théorie des perturbations en Astronomie. La méthode de la variation des paramètres, exposée par

Lagrange dans le Problème des trois corps, est équivalente à une transformation de contact dans un espace à dimensions supérieures.

Le groupe de ∞^{15} substitutions, traité dans la première partie de cette conférence, est aussi un groupe de transformations de contact, les collinéations et les inversions (transformation par rayons vecteurs réciproques) ayant toutes deux ce caractère. Les inversions donnent le premier exemple bien connu de la transformation d'un point en un plan (c'est-à-dire une surface) et d'une courbe en une développable (aussi une surface). Ces transformations de courbes doivent être considérées ici comme transformant *les éléments* des points ou courbes en *les éléments* de la surface.

Finalement nous avons des exemples de transformations de contact non seulement dans les transformations des sphères discutées dans la première Partie de cette conférence, mais encore dans la transition générale qui nous conduit de la géométrie plückérienne des droites à la géométrie des sphères de *Lie*.

Considérons ce dernier cas avec quelque détail.

En premier lieu, deux lignes droites qui se coupent ont évidemment un élément de surface en commun, et, comme les deux sphères correspondantes doivent aussi avoir un élément de surface en commun, elles auront un contact, ce qui est effectivement le cas dans notre transformation. Il sera maintenant intéressant de considérer de plus près la corrélation entre les éléments de surface d'une droite et ceux d'une sphère, bien qu'elle soit donnée par des formules où entre l'imaginaire. Prenons, par exemple, la totalité des éléments de surface appartenant à une circonférence sur l'une des sphères; nous pouvons la désigner sous le nom de *système circulaire d'éléments*. Dans la géométrie de la droite, à ceci correspond le système d'éléments de surface situés le long d'une génératrice d'une surface gauche, et ainsi de suite. Le théorème relatif à la transformation des lignes de courbure en lignes asymptotiques devient maintenant pour ainsi dire évident par lui-même. Au lieu de la ligne de courbure d'une surface nous devons ici considérer les éléments correspondants de la surface que nous pourrons nommer *système de courbure*. D'une façon similaire, une ligne asymptotique est remplacée par les éléments de la surface situés le long de cette ligne; nous pourrons les nommer *système osculateur*.

La correspondance entre les deux systèmes saute aux yeux si l'on réfléchit à ce fait que deux éléments consécutifs d'un système de courbure appartiennent à une même sphère tandis que deux éléments consécutifs d'un système osculateur appartiennent à une même droite.

Une des plus merveilleuses applications des transformations de contact se trouve dans la *Théorie des équations aux dérivées partielles*. Je m'en tiendrai ici à celles du premier ordre. A ces nouveaux points de vue cette théorie prend un degré de profondeur inconnue auparavant et la véritable signification des mots *solution*, solutions *générale, complète, singulière*, introduits par *Lagrange* et *Monge*, devient extrêmement claire.

Considérons l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Dans l'ancienne théorie classique on fait une distinction suivant la manière dont p et q se présentent dans l'équation. Ainsi, lorsque p et q y entrent au premier degré, l'équation est dite *linéaire*; si p et q tous deux étaient absents, l'on ne regarderait pas l'équation comme étant une équation *différentielle*. Au point de vue de la nouvelle géométrie de Lie, ces distinctions disparaissent complètement, comme nous allons le voir.

Le nombre de tous les éléments de surface, dans tout l'espace, est évidemment ∞^5.

Écrire notre équation différentielle, c'est mettre à part, prendre, parmi ces éléments, une variété à 4 dimensions M_4 de ∞^4 éléments.

Or, trouver une *solution* de l'équation au sens de *Lie*, c'est prendre encore dans cette M_4 et mettre à part une variété M_2 jouissant de la propriété caractéristique; que cette M_2 soit point, courbe ou surface, c'est là chose indifférente.

Ce que *Lagrange* nomme trouver une *solution complète* consiste à partager l'M_4 en ∞^2 variétés M_2. Ceci naturellement peut être pratiqué d'un nombre infini de manières. Enfin, si dans ces ∞^2 variétés M_2 nous prenons un système simplement infini, l'enveloppe de ce système représente ce que Lagrange nomme *solution générale*. Ces définitions sont valables d'une manière toute générale pour *toutes* les équations aux dérivées partielles du premier ordre, sous leurs formes même les plus particulières.

Nous allons faire voir par un exemple en quel sens une équation $f(x, y, z) = 0$ peut être regardée comme une telle équation et ce que l'on entend par les solutions diverses. Prenons le cas tout spécial $z = 0$. Tandis que, dans le système habituel de coordonnées, cette expression représente tous *les points* du plan des x, y; dans le système de *Lie*, elle représente naturellement tous *les éléments* (de surface) dont les points font partie du plan. Rien de plus simple que d'assigner une *solu-*

tion complète dans ce cas. Nous n'avons qu'à prendre les ∞^2 points du plan eux-mêmes, chaque point étant une M_2 relative à l'équation.

Pour déduire de ceci la *solution générale,* nous devons prendre tous les systèmes en nombre simplement infini de points du plan, autrement dit une courbe quelconque, et former alors l'enveloppe des éléments de surface appartenant aux points; en d'autres termes encore, nous devons prendre les éléments qui ont un contact avec la courbe. En dernier lieu, c'est évidemment le plan lui-même qui représente une *solution singulière.*

Or, l'immense importance et l'intérêt capital de ce simple exemple tiennent à cette circonstance qu'à l'aide d'une transformation de contact, toute équation aux dérivées partielles du premier ordre peut être mise sous cette forme particulière si simple, $z = 0$. Ainsi, toute la disposition des solutions que nous venons d'esquisser à grands traits reste valable et légitime d'une manière toute générale.

A l'aide de la grande théorie de *Lie* on a donc obtenu une vue nouvelle, claire et pénétrante, de la signification de problèmes regardés depuis bien longtemps comme classiques, et en même temps une immense multitude de problèmes nouveaux ont pris naissance et y trouvent leur solution.

Je ne puis ici que mentionner que *Lie* a fait encore beaucoup en appliquant des principes similaires aux équations aux dérivées partielles du second ordre.

Au moment actuel, *Lie* est surtout célèbre par sa *Théorie des groupes continus* de transformations et, à première vue, il pourrait sembler qu'il n'y a que peu de rapports entre cette théorie et les considérations géométriques qui ont fait l'objet de ces deux conférences.

Je crois désirable d'attirer votre attention cependant sur ce fait qu'il y a corrélation entre ces études.

Dès ses débuts, le but final qu'a poursuivi avec tant de succès Sophus Lie a été le progrès dans la théorie des équations différentielles (¹); et nous pouvons regarder aussi bien à ce point de vue les développements géométriques que nous avons indiqués que la théorie des groupes continus.

Pour plus de détails sur les sujets de ces conférences, je renverrai à mon Cours déjà cité : *Géométrie supérieure* (*Göttingue*, 1892-93). Quant à la théorie des éléments de surface, elle est développée d'une manière complète dans le second Volume de la *Théorie des groupes de transformation* de *Lie* et *Engel* (*Leipzig, Teubner*; 1890).

[M'5h] SUR LE THÉORÈME DE SALMON;

PAR M. E. GOURSAT,
Maître de Conférences à l'École Normale supérieure

---

1. Je rappellerai d'abord quelques propriétés bien connues des courbes du troisième ordre.

I. *Toutes les courbes du troisième ordre qui passent par huit points fixes vont passer par un neuvième point fixe* (SALMON, *Courbes planes*, p. 24).

De ce théorème on déduit, comme cas particulier, que, si A, B, C sont les points d'intersection d'une

---

(¹) *Voir* M. GOURSAT, *Équations aux dérivées partielles du premier ordre*, où sont exposées ces théories. Paris, Hermann.

cubique avec une droite Δ, A', B', C' les points d'intersection de la même cubique avec une seconde droite Δ', les trois droites AA', BB', CC' rencontrent respectivement la cubique en trois points A'', B'', C'', qui sont aussi en ligne droite. En effet, parmi les cubiques passant par les huit points A, B, C, A', B', C', A'', B'', on a, d'une part, le système des trois droites Δ, Δ', $A''B''$, d'autre part le système des trois droites $AA'A''$, $BB'B''$, CC'. Ces deux cubiques ont un neuvième point commun, qui est le point d'intersection des deux droites CC', $A''B''$; il coïncide donc avec le point C''.

Si la droite Δ' vient se confondre avec la droite Δ, les points A', B', C' viennent respectivement aux points A, B, C et les points A'', B'', C'' deviennent les tangentiels des points A, B, C (on appelle *tangentiel* d'un point A de la cubique le second point de rencontre de la tangente en A avec cette courbe). On a donc la proposition suivante :

II. *Les tangentiels de trois points en ligne droite sont eux-mêmes en ligne droite.*

2. Cela posé, soient A et A' deux points quelconques d'une courbe du troisième ordre, n'ayant pas de point double; par chacun de ces points on peut mener quatre tangentes à la cubique, non compris celle qui a son point de contact au point lui-même. Soient P, Q, R, S les points de contact des tangentes issues du point A, P', Q', R', S' les points de contact des tangentes issues du point A'; nous voulons démontrer que *le rapport anharmonique des quatre droites* AP, AQ, AR, AS *est le même que celui des quatre droites* $A'P'$, $A'Q'$, $A'R'$, $A'S'$, *prises dans un certain ordre.*

La droite AA' rencontre la cubique en un troisième point A''; soit B le point de contact d'une tangente issue du point A''. La droite PB rencontre la cubique en un point P_1 et, d'après la proposition II, les tangentiels des trois points P, B, P_1 doivent être en ligne droite; le point P_1 est donc un des quatre points P', Q', R', S'. On peut évidemment supposer que c'est le point P', puisque cela revient à un changement de notation; nous appellerons de même R', S', T' les points de rencontre avec la cubique des droites BQ, BR, BS respectivement.

Considérons maintenant une sécante quelconque AMN, issue du point A, qui rencontre la cubique en deux autres points M et N; la droite BM rencontre la cubique en un troisième point M' et la droite BN en un troisième point N'. Il résulte de la proposition générale rappelée plus haut que les trois points A', M', N' sont en ligne droite. Il suffit de supposer que la droite Δ est la droite AMN, et que la droite Δ' est la droite $A''B$, qui a deux de ses points de rencontre avec la cubique confondus au point B. A toute sécante issue du point A il correspond donc une sécante, et une seule, issue du point A', et réciproquement; par suite, il y a une relation homographique entre les coefficients angulaires de ces deux droites. Or, lorsque la sécante issue du point A devient tangente, il en est de même de la sécante issue du point A'. Le rapport anharmonique des quatre tangentes issues du point A' est donc égal au rapport anharmonique des quatre tangentes issues du point A.

ERRATA AUX TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page 25, log. 19934, *au lieu de* 4,2995 945, *lisez* 4,2995 94$\underline{5}$.

[B3d] SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. H. LAURENT,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

Dans la quatrième Partie de mon Algèbre, j'ai fait connaître une classe intéressante de polynomes et j'ai montré leur importance dans la théorie de l'élimination. Je vais montrer qu'ils peuvent servir à calculer les solutions communes à plusieurs équations algébriques.

Désignons par $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des polynomes entiers de degré m en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; soient

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_{1\mu}, & \alpha_{2\mu}, & \ldots, & \alpha_{n\mu}, \end{array}$$

les $\mu = m^n$ solutions, supposées finies et distinctes, des équations

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n = 0;$$

désignons, une fois pour toutes, par G_j ou par H_{ij} ce que devient G ou H_i quand on remplace $x_1, x_2, \ldots,$ par $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots$ dans G ou dans H_i.

Les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ peuvent se mettre sous les formes

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_1 - \alpha_{1i})\,P_1^{(i)} + (x_2 - \alpha_{2i})\,P_2^{(i)} \ldots, \\ f_2 &= (x_1 - \alpha_{1i})\,Q_1^{(i)} + (x_2 - \alpha_{2i})\,Q_2^{(i)} \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et cela d'une infinité de manières, les P, Q, ... désignant des polynomes entiers; j'ai posé

$$\xi_i = \frac{1}{D_i} \begin{vmatrix} P_1^i & P_2^i & \ldots & P_n^i \\ Q_1^i & Q_2^i & \ldots & Q_n^i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

D désignant le déterminant $\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, et l'on peut supposer que $D_i \xi_i$ ne change pas quand on permute x_1 et α_{1i}, x_2 et α_{2i}, ...

J'ai montré *que :* 1°

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\mu = 1;$$

2° *Que si* F *était de degré inférieur à* m, *on avait*

$$F = F_1 \xi_1 + F_2 \xi_2 + \ldots + F_\mu \xi_\mu;$$

3° *Que* ξ_i *était nul avec les* f, *excepté pour* $x_1 = \alpha_i$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ... *et qu'alors il était égal à* 1.

Les fonctions ξ sont susceptibles de prendre une forme remarquable et qui les rend particulièrement utiles.

Désignons par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des polynomes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de degré m; on pourra poser

$$\begin{aligned}\varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) &- \varphi_p(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}) \\ &= (x_1 - \alpha_{1i})\varphi_p^1 + (x_2 - \alpha_{2i})\varphi_p^2 \ldots,\end{aligned}$$

et cela de bien des manières, les φ_p^1 désignant des polynomes entiers. Je poserai

$$\varpi_i = \begin{vmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_1^2 & \ldots & \varphi_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^1 & \varphi_n^2 & \ldots & \varphi_n^n \end{vmatrix}.$$

et je supposerai, ce qui est permis, les φ_p^h choisis de telle sorte que ϖ_i ne change pas quand on permute, à la fois, x_1 et α_{1i}, x_2 et α_{2i}, ...

Je considère alors le déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} \varpi_{11} & \varpi_{12} & \ldots & \varpi_{1\mu} \\ \varpi_{21} & \varpi_{22} & \ldots & \varpi_{2\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \Pi,$$

Π est une fonction symétrique des solutions de (1); c'est une fonction entière des coefficients des f qui s'annule en même temps que $D_1 D_2 \ldots D_\mu$, qui est une fonction entière des coefficients des f. Donc Π est divisible par $D_1 D_2 \ldots D_\mu$, mais Π et $D_1 D_2 \ldots D_\mu$ étant de mêmes degrés, on a

$$\Pi = D_1 D_2 \ldots D_\mu . C,$$

C désignant une quantité indépendante des α_{ij}. On peut donc, si l'on veut, pour déterminer C, prendre pour les α_{ij}, les solutions de

$$(2) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = 0.$$

Mais alors, en posant

$$\Delta = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

$\frac{\varpi_i}{\Delta_i}$ devient égal à la fonction ξ_i relative aux fonctions φ et l'on a $\frac{\varpi_{ij}}{\Delta_i} = 0$ ou 1, suivant que $i = j$ ou que $i \gtrless j$, en sorte que

$$\Pi = \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\mu,$$

et l'on a

$$C = \frac{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\mu}{D_1, D_2, \ldots, D_\mu},$$

et comme D ne diffère de Δ que par une constante, C est lui-même constant et indépendant des φ.

Les fonctions $\frac{\varpi_i}{D_i}$ jouissent des propriétés suivantes : elles sont, comme les ξ_i, linéairement indépendantes, au moins en général, car elles se réduisent aux ξ dans le cas particulier où $\varphi_1 = f_1$, $\varphi_2 = f_2$, ... Si l'on désigne par G un polynome entier et par G_i sa valeur pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$, ...,

$$\frac{G_1}{D_1}\varpi_1 + \frac{G_2}{D_2}\varpi_2 + \ldots + \frac{G_\mu}{D_\mu}\varpi_\mu = F$$

sera un polynome de degré égal au degré de G, pourvu que le degré de G ne dépasse pas $m-1$, et à chaque forme de G correspondra une forme différente de F, puisque les $\frac{\varpi_i}{D_i}$ sont linéairement indépendants. Or, si l'on pose

$$\xi_1 = \frac{P}{P_i}, \qquad P_i = \varpi_1 \frac{\partial P}{\partial \varpi_{i1}} + \varpi_2 \frac{\partial P}{\partial \varpi_{i2}} + \ldots,$$

on aura

$$\varpi_\mu = \xi_1 \varpi_{\mu 1} + \xi_2 \varpi_{\mu 2} + \ldots + \xi_\mu \varpi_{\mu\mu};$$

multiplions ces formules par $\frac{G_1}{D_1}, \frac{G_2}{D^2}, \ldots$, et ajoutons-les ; nous aurons

$$F = F_1 \xi_1 + F_2 \xi_2 + \ldots + F_\mu \xi_\mu,$$

F_i désignant la valeur de F pour $x_1 = \alpha_{1i}, x_2 = \alpha_{2i}, \ldots$; les ξ sont donc indépendants des coefficients des φ; supposons φ_0 de degré m. Posons

$$\theta_i = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi^i_{01} & \varphi^i_{02} & \ldots & \varphi^i_{0n} \\ \varphi_1 & \varphi^i_{11} & \varphi^i_{12} & \ldots & \varphi^i_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n & \varphi^i_{n1} & \varphi^i_{n2} & \ldots & \varphi^i_{nn} \end{vmatrix},$$

φ^i_{0j} étant défini comme φ^i_{kj}. On aura

$$\theta_i = \varpi_i \varphi_0 + \varpi_i^{(1)} \varphi_1 + \ldots + \varpi_i^{(n)} \varphi_n,$$

les $\varpi_i^{(k)}$ étant des fonctions analogues aux ϖ_i. On aura évidemment

$$\theta_i = \varphi_0(\varpi_{i1}\xi_1 + \varpi_{i2}\xi_2 + \ldots) + \varphi_1(\varpi_{i1}^{(1)}\xi_1 + \ldots) + \ldots,$$

c'est-à-dire, en appelant θ_{ij} la valeur de θ_i pour $x_1 = z_{1j}$, $x_2 = z_{2j}, \ldots$,

$$(3) \qquad \begin{cases} \theta_1 = \xi_1 \theta_{11} + \xi_2 \theta_{12} + \ldots + \xi_\mu \theta_{1\mu}, \\ \theta_2 = \xi_1 \theta_{21} + \xi_2 \theta_{22} + \ldots + \xi_\mu \theta_{2\mu}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il est facile de conclure de là que

$$\Theta = \Sigma \pm \theta_{11}, \theta_{22}, \ldots, \theta_{\mu\mu}$$

est le premier membre de la résultante de

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = \varphi_\nu = 0.$$

En effet, si dans (7) on remplace les x par les solutions de $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ... $\varphi_n = 0$ et si l'on désigne par θ_i^j la valeur de θ_i quand $x_1, x_2, \ldots$ sont l'une des solutions des équations en question, les équations (3) montrent que

$$(4) \qquad \Sigma \pm \theta_1^1, \theta_2^2, \ldots, \theta_\mu^\mu = \Theta X,$$

X désignant le déterminant $\Sigma \pm \xi_1^1, \xi_2^2, \ldots, \xi_\mu^\mu$, où ξ_i^j désigne la valeur que prend ξ_i pour une solution de $\varphi_1 = 0, \ldots \varphi_n = 0$; mais $\Sigma \pm \theta_1^1, \theta_2^2, \ldots$ est égal à $\varphi_{01}, \varphi_{02}, \ldots, \varphi_{0\mu}$, H, H désignant un certain facteur indépendant de φ_0. Si dans (4) on suppose $\varphi_0 = 1$, elle devient

$$(5) \qquad H = \Pi X;$$

de (4) et de (5) on tire

$$\varphi_{01}, \varphi_{02}, \ldots, \varphi_{0\mu} = \frac{\Theta}{\Pi},$$

et comme Π est indépendant de φ, $\Theta = 0$ est la résultante des équations (5), ce que l'on savait.

Les équations (3) ou $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = 0$ se réduisent à $\mu - 1$ distinctes quand $\Theta = 0$; en leur adjoignant

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\mu,$$

elles déterminent $\xi_1, \xi_2, \ldots$ pour la solution commune et une fonction de degré $m - 1$ au plus $G(x_1, x_2, \ldots)$

de cette solution sera donnée par la formule

$$G = G_1 \xi_1 + G_2 \xi_2 + \ldots + G_\mu \xi_\mu.$$

Discussion. — Si Θ est nul ainsi que ses mineurs d'ordre p, les équations (3) se réduisent à $\mu - p - 1$ distinctes seulement; les ξ d'une solution ne sont plus déterminés; cela tient à ce que les équations $\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = 0$ ont $p + 1$ solutions communes; on trouvera, par exemple, les x_1 de ces solutions en posant

$$\begin{aligned}
x_1^{p+1} &= \alpha_{11}^{p+1} \xi_1 + \ldots + \alpha_{1\mu}^{p+1} \xi_\mu, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x_1 &= \alpha_{11} \xi_1 + \ldots + \alpha_{1\mu} \xi_\mu, \\
1 &= \xi_1 + \ldots + \xi_\mu;
\end{aligned}$$

on éliminera les ξ entre les équations auxquelles se réduisent (3) (où l'on fera $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = 0$) et les équations précédentes, et l'on aura une équation du degré $p + 1$ pour déterminer les diverses valeurs de x_1.

En particulier, si tous les θ_{ij} étaient nuls, les équations $\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = 0$ auraient μ solutions communes.

En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que les équations en question aient $p + 1$ solutions communes est que les

$$\frac{\partial^p \Theta}{\partial \theta_{ij}\, \partial \theta_{kl} \ldots}$$

soient tous nuls. Ces conditions, bien entendu, ne sont pas toutes distinctes.

J'ai déjà montré (*loc. cit.*) que l'on pouvait lire, sur l'équation $\Theta = 0$, les principales propriétés de la résultante; je ne reviendrai donc pas ici sur ce point.

Les raisonnements qui précèdent manquent peut être de rigueur, mais les résultats sont très probablement exacts.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE JUILLET 1895. — COMPOSITIONS.

Paris.

ANALYSE. — I. *Les points d'un plan étant rapportés à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on donne les relations*

$$(1)\quad \begin{cases} x = (u + V)\cos v - V' \sin v, \\ y = (u + V)\sin v + V' \cos v, \end{cases}$$

où u *et* v *désignent deux paramètres variables,* V *une fonction de* v, *et* V' *sa dérivée.*

Vérifier que les droites $v =$ const. *sont normales aux courbes* $u =$ const.

Démontrer que, pour obtenir toutes les surfaces dont les lignes de courbure se projettent orthogonalement sur le plan xOy *suivant les droites* $v =$ const. *et suivant les courbes* $u =$ const., *il suffit d'associer aux formules* (1) *une relation de la forme* $z =$ U, *où* U *est une fonction arbitraire du seul paramètre* u.

Pour vérifier que les droites $v =$ const. sont normales aux courbes $u =$ const., il suffit de vérifier qu'on a la relation

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

ce qui n'offre aucune difficulté.

Pour obtenir toutes les surfaces dont les projections orthogonales des lignes de courbure sur le plan xOy sont les droites $v =$ const. et les courbes $u =$ const., on observe que les lignes de courbure d'une famille ont leurs tangentes parallèles au plan xOy, et sont, dès lors, dans des plans parallèles au plan xOy. Il en résulte qu'elles se projettent suivant les courbes $u =$ const., et que, le long de chacune de ces courbes, z conserve une valeur constante. On achève alors facilement la solution.

Les surfaces cherchées sont d'ailleurs des *surfaces moulures*.

II. — *Trouver la valeur de l'intégrale*

$$\int z^2 \log \frac{z+1}{z+1}\, dz,$$

prise dans le sens direct le long d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon supérieur à l'unité.

On part des identités

$$\mathrm{D}\left[\frac{z^3}{3}\mathrm{L}(z+1)\right] = z^2\mathrm{L}(z+1) + \frac{z^3}{3(z+1)},$$
$$\mathrm{D}\left[\frac{z^3}{3}\mathrm{L}(z-1)\right] = z^2\mathrm{L}(z-1) + \frac{z^3}{3(z-1)}.$$

On intègre, on retranche membre à membre, et l'on fait décrire au point z le cercle indiqué dans l'énoncé. On trouve ainsi que la valeur de l'intégrale considérée est $\frac{4i\pi}{3}$.

III. — (Élèves de l'École Normale). — *Étudier la surface*

$$\mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^y + \mathrm{C}e^z = \mathrm{D}.$$

1° *Former l'équation des courbes* C *le long desquelles cette surface touche un cylindre circonscrit.*

Montrer que ces courbes se répartissent en une infi-

nité de familles, de telle façon que l'une de ces familles se compose d'une infinité de courbes toutes égales entre elles et semblablement orientées.

2° *Déduire de là que l'on peut, d'une infinité de manières, exprimer les coordonnées d'un point de la surface en fonction de deux paramètres t et u sous la forme suivante :*

$$x = f_1(t) + f_1(u),$$
$$y = f_2(t) + f_2(u),$$
$$z = f_3(t) + f_3(u).$$

3° *Montrer que par chaque point de la surface passent deux courbes C de chaque famille et que les tangentes à ces deux courbes sont des diamètres conjugués de l'indicatrice.*

4° *Démontrer que les lignes asymptotiques ne sont autre chose que les enveloppes des courbes C d'une même famille.*

5° *Montrer que le lieu des milieux des cordes d'une des lignes asymptotiques est la surface elle-même.*

La première partie seule présente quelque difficulté. Pour la résoudre, on observe d'abord qu'en déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes, on peut ramener l'équation de la surface à la forme

$$(1) \qquad e^x + e^y + e^z = 1.$$

Si l'on appelle alors α, β, γ les paramètres directeurs de la direction des génératrices d'un premier cylindre circonscrit, la courbe de contact de ce cylindre est définie par l'équation (1) et par l'équation

$$(2) \qquad \alpha e^x + \beta e^y + \gamma e^z = 0.$$

De même, la courbe de contact d'un second cylindre dont les paramètres directeurs des génératrices sont α', β', γ' est définie par l'équation (1) et par l'équation

$$(3)\qquad \alpha' e^x + \beta' e^y + \gamma' e^z = 0.$$

Pour que les deux courbes soient égales et semblablement orientées, il faut qu'on puisse les faire coïncider en déplaçant l'une d'elles parallèlement à elle-même. Si donc ξ, η, ζ sont trois constantes convenablement choisies, il faut que les deux systèmes

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} e^x + e^y + e^z = 1, \\ \alpha e^x + \beta e^y + \gamma e^z = 0; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} e^{x+\xi} + e^{y+\eta} + e^{z+\zeta} = 1, \\ \alpha' e^{x+\xi} + \beta' e^{y+\eta} + \gamma' e^{z+\zeta} = 0 \end{cases}$$

soient équivalents.

Ces deux systèmes sont linéaires par rapport à e^x, e^y, e^z et, si l'on exprime qu'ils sont équivalents, on obtient, après l'élimination de ξ, η, ζ,

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'};$$

de sorte que si l'on appelle u la valeur commune des trois différences qui figurent dans ces égalités, u_1, u_2, u_3 trois constantes, on a

$$\alpha = \frac{1}{u + u_1}, \qquad \beta = \frac{1}{u + u_2}, \qquad \gamma = \frac{1}{u + u_3}.$$

Il en résulte que les directions qui correspondent à des courbes égales et semblablement orientées sont les génératrices d'un cône du second degré représenté par l'équation

$$(u_2 - u_3) yz + (u_3 - u_1) zx + (u_1 - u_2) xy = 0.$$

Comme ce cône dépend de deux constantes arbitraires, on voit qu'il existe deux familles de courbes égales et semblablement orientées.

MÉCANIQUE. — I. *Une barre pesante homogène* AA′ *a ses deux extrémités assujetties à glisser sans frottement sur une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit fixe dont l'axe est vertical. On propose :*

1° *De trouver le mouvement de la barre sur l'hélice et les réactions de la courbe sur les deux extrémités de la barre ;*

2° *En considérant le point* C, *situé sur l'axe du cylindre à égale distance de* A *et de* A′, *comme invariablement lié à la barre, de déterminer pour une époque quelconque, dans le plan* ACA′, *le point dont la vitesse est perpendiculaire à ce plan.*

Chaque point de la barre décrit une hélice d'un mouvement uniformément varié, comme on peut le constater aisément par l'application du théorème des forces vives.

Le calcul des réactions se fait en appliquant le théorème du centre de gravité et le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à Oz.

Quant à la détermination du point dont la vitesse est perpendiculaire au plan ACA′, elle est identique à la détermination du *foyer* de ce plan. On trouve qu'il est situé à l'intersection du plan ACA′ et du plan perpendiculaire à AA′ en son milieu, plan qui passe par le point C. Sa distance au point C est $h \cot \alpha$, en appelant h le pas de l'hélice et α l'angle de la barre avec Oz.

II. — (ÉLÈVES DE L'ÉCOLE NORMALE). — *Un corps solide pesant, non homogène, ayant la forme d'un cylindre de révolution, est couché sur un plan hori-*

zontal fixe P, *sur lequel il peut glisser sans frottement. On suppose que le centre de gravité* G *du corps est sur l'axe de révolution* Gz *du cylindre et que cet axe est un axe principal d'inertie relatif au point* G.

Trouver le mouvement du solide supposé lancé sur le plan. On appellera A, B, C *les moments d'inertie du corps par rapport aux axes principaux* Gx, Gy, Gz *relatifs au centre de gravité.*

En vertu des hypothèses, le cylindre est déterminé en position par les coordonnées du centre de gravité et par la direction de l'axe de révolution Gz. En appliquant d'abord le théorème du centre de gravité, on trouve que le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme; en appliquant ensuite le théorème des forces vives, on trouve que le cylindre tourne uniformément autour de la verticale du point G.

III. — (Élèves de l'École Normale). — *Une figure* F *de forme invariable se meut dans l'espace dans les conditions suivantes :*

Un cercle C, *lié invariablement à la figure, roule uniformément sans glisser sur la droite fixe* AB, *tandis que son plan tourne uniformément autour de cette même droite.*

1° *Prouver que tout déplacement infiniment petit de la figure consiste en une rotation* Ω *autour d'un axe* Δ.

2° *Trouver le lieu de cet axe dans le corps.*

3° *Trouver une définition géométrique de la surface décrite dans l'espace fixe par ce même axe.*

4° *Rappeler la démonstration de ce fait que les surfaces ainsi trouvées sont applicables l'une sur l'autre.*

Le lieu de l'axe de rotation dans le corps est un hyperboloïde de révolution dont le cercle de gorge est le cercle C. Dans l'espace fixe le lieu de ce même axe est un *hélicoïde réglé*. L'hyperboloïde roule sans glisser sur l'hélicoïde.

ÉPREUVES PRATIQUES. — I. *Le* 24 *juillet* 1895, *à midi moyen de Paris, les coordonnées écliptiques de Vénus sont :*

Longitude	166° 5′6″,0
Latitude	0° 45′7″,7

Calculer les coordonnées équatoriales de la planète, l'obliquité de l'écliptique étant 23° 27′ 18″,73.

On devra vérifier l'exactitude des résultats en calculant une relation dans laquelle entrent simultanément toutes les données et les inconnues du problème.

II. — (ÉLÈVES DE L'ÉCOLE NORMALE). — *Le* 2 *juillet* 1895, *à midi moyen de Paris, la planète Mars a pour coordonnées héliocentriques :*

Longitude	152° 56′ 24″,0
Latitude	+ 1° 47′ 37″,7
Log. du rayon vecteur	0,221 6426

Au même moment, les coordonnées du Soleil par rapport au centre de la Terre sont :

Longitude	100° 17′ 42″,25
Latitude	0° 0′ 0
Log distance du Soleil à la Terre	0,007 1905

Calculer les coordonnées géocentriques de la planète.

Besançon.

ANALYSE. — *On donne dans un plan* P *un cercle* O. *On considère un point* M *sur la circonférence de ce cercle, et par* M *une normale* MN *à ce cercle non con-*

tenue dans le plan P. *Soit* φ *l'angle du rayon* OM *avec un rayon fixe et* θ *l'angle de* MN *avec le prolongement de* OM.

Quelle relation doit avoir lieu entre φ *et* θ, *pour que, le point* M *se déplaçant sur la circonférence,* MN *soit normale principale à une courbe gauche? On démontrera d'abord que la longueur interceptée sur* MN *entre la circonférence et la courbe gauche est nécessairement constante. Montrer que le problème se ramène à une quadrature; discuter, et effectuer l'intégration quand elle est possible.*

On exprime que MN est dans le plan osculateur à la courbe gauche en égalant à zéro un certain déterminant. Ce déterminant se simplifie en combinant les colonnes, et l'on obtient une équation de Bernoulli par rapport à $\frac{d\varphi}{d\theta}$ pris comme fonction inconnue.

Après l'intégration de cette équation, φ s'exprime par une intégrale elliptique, dont la discussion est aisée.

Mécanique. — I. *Exposer le théorème des forces vives pour un point matériel et pour un système de points matériels.*

II. *Un mobile de poids* P *est assujetti à se mouvoir sur un cercle vertical fixe. A ce mobile sont fixés deux fils inextensibles passant sur deux poulies infiniment petites situées aux extrémités* A *et* B *du diamètre horizontal, et supportant deux poids* p *et* q. *Déterminer le mouvement du système.*

On met ce problème en équation à l'aide du théorème des forces vives. Il y a deux cas particuliers remarquables : 1° le poids p est nul et les poids p et q sont égaux. Dans ce cas le point le plus bas du cercle constitue, pour le mobile, une position d'équilibre stable; 2° le poids P est très grand par rapport à p et à q. Dans le voisinage du point le plus bas on a alors une position d'équilibre stable.

III. *Dans un plan vertical une parabole constante tourne autour de son foyer* F. *Un fil enroulé sur la parabole porte un poids* M. *Déterminer la trajectoire du point* M *et sa vitesse quand la parabole tourne d'un mouvement uniforme.*

La trajectoire du point M est une chaînette.

Épreuve pratique. — *Calculer les coordonnées équatoriales* $\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'$, R' *du centre de la Lune vue d'un lieu de latitude* $\varphi = 45^\circ 28' 10''$ *au moment où l'heure sidérale locale est* $5^h 43^m 56^s$ *et où les coordonnées géocentriques de la Lune sont :*

$$\mathcal{A} = 2^h 15^m 49^s, \qquad \mathcal{D} = +10^\circ 3' 17'',$$

$$R = \frac{1}{\sin \varpi}, \qquad \varpi = 58' 17''.$$

Caen.

Analyse et Géométrie. — I. *Étant donnés deux axes rectangulaires* OX, OY, *on considère toutes les ellipses qui ont pour axe* OX, *qui passent par un point* B *donné sur* OY *et qui sont semblables à l'ellipse* $3x^2 + y^2 = 1$: *trouver les trajectoires orthogonales de ces ellipses.*

Équation des ellipses :

$$3x^2 + y^2 + 2\alpha x - h^2 = 0 \qquad (\alpha \text{ variable}, h = \text{OB}).$$

Équation des trajectoires :

$$x^2 = \frac{y^3}{C} + y^2 - \frac{h^2}{3}.$$

II. *En désignant par $z = x + iy$ une variable imaginaire, calculer l'intégrale*

$$\int \frac{\sin z \, dz}{z^3(\pi - z)},$$

prise le long du contour représenté par l'équation $x^2 + 2y^2 - 2x - 1 = 0$.

Le contour, elliptique, contient le seul pôle $z = 0$: or

$$\frac{\sin z}{z^3(\pi - z)} = \frac{1}{\pi z^3}\left(z - \frac{z^3}{6} + \ldots\right)\left(1 + \frac{z}{\pi} + \frac{z^2}{\pi^2} + \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{\pi z^2} + \frac{1}{\pi^2 z} + \ldots,$$

l'intégrale est $\frac{2i}{\pi}$, le contour étant parcouru en sens direct.

MÉCANIQUE. — I. *Un plan* P *se meut en glissant sur un plan fixe* Q, *de telle sorte que le centre instantané de rotation* C *se déplace avec une vitesse constante* m *sur une droite fixe* OX *du plan* Q *et que le centre des accélérations du plan mobile,* A, *reste à une distance invariable* h *de* OX, *l'angle* ACX *étant droit à l'instant initial. Chercher comment varient avec le temps la vitesse* ω *de rotation du plan* P *et l'angle* ACX. *Déterminer et construire la roulante lieu du centre instantané* C *dans le plan* P.

Des formules qui donnent à un instant les accélérations des points d'un plan mobile, on tire, pour les coordonnées du centre A relatives à la tangente et à la normale communes à la base et à la roulante S,

$$y = -\frac{\omega^3}{\omega^4 + \omega'^2}\frac{ds}{dt}, \qquad \frac{x}{y} = -\frac{\omega'}{\omega^2} = \cot \mathrm{ACX},$$

s étant l'arc parcouru par C sur la base et la roulante S, si $y = h$, $\frac{ds}{dt} = m$, on trouve, après intégration,

$$(1) \quad \frac{1}{\omega} = -\frac{h}{m}\left[1 + m^2 \frac{(t-\tau)^2}{4h^2}\right], \qquad \cot \mathrm{ACX} = m\frac{t-\tau}{2h};$$

la constante τ est nulle. Soient ξ, η les coordonnées de C par rapport à des axes $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ du plan P, α l'angle de la tangente à S avec $\Omega\xi$; $d\alpha = -\omega\, dt$; remplaçant ω par sa valeur (1) et s par $\frac{t}{m}$, on a

$$d\alpha = \frac{4h\, ds}{4h^2 + s^2}, \qquad s = 2h \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha, \qquad ds = \frac{h\, d\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha},$$

$$d\xi = ds \cos\alpha, \qquad d\eta = ds \sin\alpha,$$

l'intégration donne ξ, η en fonction de α.

II. *Chaque élément d'un fil flexible et inextensible est attiré vers un point fixe* O *avec une force proportionnelle à la masse de l'élément et à l'inverse de sa distance au point* O; *on suppose que, lorsque le fil est en équilibre, sa tension en chaque point y est proportionnelle à la densité. Déterminer la figure d'équilibre et la loi suivant laquelle la densité varie le long du fil.*

Courbe funiculaire plane. — Soient T la tension, ε la densité :

$$\mathrm{T} = \lambda\varepsilon, \qquad d\mathrm{T} = k\lambda\varepsilon\frac{dr}{r} = k\mathrm{T}\frac{dr}{r}, \qquad \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^k,$$

p étant la distance du pôle O à la tangente, $\mathrm{T}p = \mathrm{T}_0 p_0$

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^k p = \left(\frac{r}{r_0}\right)^k \frac{r^2\, d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2}} = p_0; \qquad r^{k+1} = \frac{p_0 r_0^k}{\cos(k+1)\theta}.$$

Épreuve pratique. — *Calcul de la longitude et de la latitude d'une étoile, étant données Æ, D et l'obliquité de l'écliptique.*

Dijon.

ANALYSE. — I. *Prouver que la somme d'une série entière est une fonction continue de ses variables dans des cercles concentriques à des cercles de convergence, mais de rayons plus petits.*

II. *Formation et intégration de l'équation aux dérivées partielles des surfaces développables.*

III. *Trouver les trajectoires orthogonales des surfaces ayant pour équation générale en coordonnées rectilignes rectangulaires*

$$Px^\lambda + Qy^\mu + aRz^\nu = 0,$$

où a représente un paramètre variable; examiner les divers cas qui peuvent se présenter suivant les valeurs particulières attribuées aux quantités constantes P, Q, R, λ, μ, ν.

Les équations

$$(1) \qquad X = \varphi(a), \qquad Y = \chi(a), \qquad Z = \psi(a),$$

où a joue maintenant le rôle d'une variable auxiliaire, représenteront une ligne trajectoire des surfaces proposées, si l'on a, quelle que soit a, l'équation finie

$$(2) \qquad PX^\lambda + QY^\mu + aRZ^\nu = 0,$$

et cette trajectoire sera orthogonale, si l'on a les deux équations différentielles

$$(3) \qquad \frac{dX}{da} : \lambda PX^{\lambda-1} = \frac{dY}{da} : \mu QY^{\mu-1} = \frac{dZ}{da} : \nu aRZ^{\nu-1},$$

exprimant l'identité, en direction, de la tangente menée à la ligne (1), au point correspondant à la valeur actuelle de a et de la normale construite en ce même point à celle des surfaces proposées qui y passe.

L'addition terme à terme des rapports égaux (3), multipliés, en haut et en bas, par $\frac{X}{\lambda}$, $\frac{Y}{\mu}$, $\frac{Z}{\nu}$ respectivement, donne, à cause de l'équation (2),

$$\frac{X}{\lambda}\frac{dX}{da}+\frac{Y}{\mu}\frac{dY}{da}+\frac{Z}{\nu}\frac{dZ}{da}=0,$$

d'où l'équation intégrale première

$$\frac{X^2}{\lambda}+\frac{Y^2}{\mu}+\frac{Z^2}{\nu}=C.$$

Une seconde, à adjoindre à celle-ci et à l'équation (2) pour achever la solution du problème, est fournie par l'intégration de la première équation différentielle du groupe (3), intégration s'exécutant immédiatement d'une manière variable avec les valeurs des exposants λ, μ et des coefficients P, Q. Si, par exemple, on a $\lambda=\mu=2$, $P=Q$; cette seconde intégrale est

$$Y=DX,$$

montrant que les trajectoires sont alors des lignes planes dont les plans passent par l'axe des z, etc.

Mécanique. — I. *Équations d'équilibre du fil flexible; cas où l'on peut former des intégrales premières; cas où l'on prend pour variable indépendante l'une des coordonnées d'un point du fil.*

II. *Un point pesant est lancé verticalement au-dessus du sol avec une vitesse v_0. On demande en quel point il traverse le plan horizontal passant par la position initiale, lorsqu'on tient compte de la rotation de la terre.*

Les axes étant : l'axe des z la verticale dirigée vers le haut, l'axe des x la tangente au méridien dirigée vers le nord; l'axe des y la perpendiculaire au méridien dirigée vers l'est, les équations à appliquer sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\left(\cos\lambda\frac{dx}{dt} - \sin\lambda\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt},$$

où ω est la vitesse de rotation de la Terre, λ la colatitude du lieu, l'origine des axes est la position initiale.

On intègre ces équations avec les données initiales

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = v_0,$$

on développe les intégrales suivant les puissances de ω, en se bornant à la première puissance.

Épreuve pratique. — *Connaissant la longitude d'un astre, $45^\circ 12' 13'',5$, sa latitude $0^\circ 23' 58'',1$ et l'obliquité de l'écliptique $23^\circ 27' 10'',4$, calculer son ascension droite et sa déclinaison.*

On trouve

$$Æ = 42^\circ 36' 13'',65,$$

$$\delta = 16^\circ 47' \ 7'',7.$$

Nancy.

Analyse. — I. *Étant donnée l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où x désigne une variable réelle et f une fonction réelle, démontrer que, sous certaines conditions que l'on indiquera, il existe une fonction réelle y de x, définie et continue dans le domaine de x_0, satisfaisant *à l'équation différentielle et qui, pour $x = x_0$, prend la valeur y_0. Montrer, en outre, qu'il n'existe qu'une seule fonction possédant ces propriétés.*

II. *On donne une courbe* C *tracée sur une sphère de centre* O *et de rayon égal à l'unité. Les coordonnées rectangulaires d'un point* M *de cette courbe ont pour expressions*

$$x = \alpha(\nu), \qquad y = \beta(\nu), \qquad z = \gamma(\nu),$$

ν *désignant l'arc de la courbe terminé en* M. *A chaque point* M, *on fait correspondre une droite* D, *passant par* M, *la correspondance étant définie par les équations*

$$a = f(\nu), \qquad b = g(\nu), \qquad c = h(\nu),$$

où a, b, c sont les cosinus directeurs de D; *soit* S *la surface réglée engendrée par* D.

1° *Démontrer que la condition nécessaire et suffisante, pour que* C *soit la ligne de striction de* S, *est*

$$da\,d\alpha + db\,d\beta + dc\,d\gamma = 0.$$

2° *On suppose que la droite* D *est située dans le plan tangent mené par* M *au cône de sommet* O *ayant pour directrice* C; *calculer l'angle ω ayant, pour côté origine, la direction* OM *et, pour autre côté, la direction de* D.

3° *On applique la surface du cône et ses plans tangents sur un même plan; expliquer comment se développent les droites* D; *déduire de là un mode de génération simple des surfaces* S *dans le cas particulier considéré.*

Menons à chaque génératrice MG de S une parallèle Og par le point O; on forme un cône directeur s, dont la trace sur la sphère est une courbe c; soit m le point de cette courbe situé sur Og.

1° La perpendiculaire commune à une génératrice G et à la génératrice infiniment voisine est perpendiculaire au plan tangent au cône s suivant g, par suite à la tangente en m à la courbe c; pour que C soit la ligne de striction de la surface S, il faut que la perpendiculaire commune considérée soit la tangente en M à C; par suite, les deux tangentes à C et c en des points correspondants doivent être rectangulaires, d'où la condition

$$da\,d\alpha + db\,d\beta + dc\,d\gamma = 0.$$

2° Si, de plus, G se trouve dans le plan tangent au cône de directrice C, c'est que g se trouve aussi dans ce plan, et que m se trouve sur l'arc de grand cercle tan-

Fig. 1.

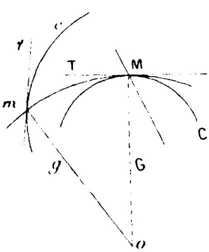
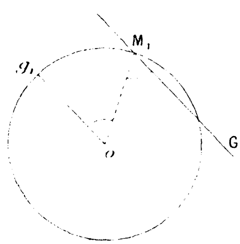


Fig. 2.



gent à C en M; d'après la condition précédente, la tangente mt doit être perpendiculaire à MT, et l'arc du grand cercle Mm doit être normal en m à la courbe c; dès lors la courbe c est une développante de C, et l'arc Mm est égal à l'arc ν de C, compté dans un sens convenable; c'est la valeur de l'angle MOg.

3° Lorsqu'on applique le cône de directrice C sur un plan, la courbe C devient un grand cercle, et les génératrices G se développent suivant des droites parallèles à une droite fixe Og, puisque l'angle OM_1G_1 est égal à l'arc g_1M_1 compté à partir d'un point fixe.

On aura la surface en traçant, dans un plan tangent au cône des droites, M_1G_1 parallèles à une droite fixe, et enroulant le plan considéré sur la surface du cône de directrice C, de façon que les génératrices restent dans les plans tangents successifs.

Les formules ordinaires conduisent au résultat. Si l'on prend

$$\begin{aligned} x &= \alpha + a\rho,\\ y &= \beta + b\rho,\\ z &= \gamma + c\rho, \end{aligned}$$

comme coordonnées d'un point de S, la ligne de striction est définie par

$$\rho = \frac{-\begin{vmatrix} bdc - cdb & a & d\alpha \\ cda - adc & b & d\beta \\ adb - bda & c & d\gamma \end{vmatrix}}{(bdc - cdb)^2 + (cda - adc)^2 + (adb - bda)^2};$$

en annulant le numérateur, on a

$$\begin{aligned} o &= \begin{vmatrix} bdc - cdb & a & d\alpha \\ cda - adc & b & d\beta \\ adb - bda & c & d\gamma \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{c}\begin{vmatrix} bdc - cdb & a & d\alpha \\ cda - adc & b & d\beta \\ o & o & da\,d\alpha + db\,d\beta + dc\,d\gamma \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

d'après $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, d'où la condition.

Pour la deuxième partie, on a d'abord la condition

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{d\alpha}{d\nu} & \frac{d\beta}{d\nu} & \frac{d\gamma}{d\nu} \end{vmatrix} = o.$$

puis

$$\begin{aligned} a\,da + b\,db + c\,dc &= 0, \\ \alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma &= 0, \\ da\,d\alpha + db\,d\beta + dc\,d\gamma &= 0. \end{aligned}$$

$$\frac{da}{\begin{vmatrix} b & c \\ d\beta & d\gamma \end{vmatrix}} = \frac{db}{\begin{vmatrix} c & a \\ d\gamma & d\alpha \end{vmatrix}} = \frac{dc}{\begin{vmatrix} a & b \\ d\alpha & d\beta \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\Sigma\,\alpha\,da}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma\,\alpha\,da}{0}.$$

D'où

$$\Sigma\,\alpha\,da = 0.$$

De plus

$$\cos\omega = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

$$\frac{d\cos\omega}{d\nu} = \Sigma\,a\,\frac{d\alpha}{d\nu} + \Sigma\,\alpha\,\frac{da}{d\nu} = \Sigma\,a\,\frac{d\alpha}{d\nu}\cdot$$

Alors, en formant Δ^2,

$$0 = \Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \dfrac{d\cos\omega}{d\nu} \\ \cos\omega & 1 & 0 \\ \dfrac{d\cos\omega}{d\nu} & 0 & \dfrac{d\nu^2}{d\nu^2} = 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\omega - \left(\frac{d\cos\omega}{d\nu}\right)^2.$$

D'où

$$\frac{d\omega}{d\nu} = \pm 1, \qquad \omega = \gamma \pm \omega_0.$$

Le reste s'en déduit.

MÉCANIQUE. — 1° *Un gyroscope est composé: 1° d'un tore homogène* (τ) *pouvant se mouvoir librement autour de son axe; 2° d'un cercle homogène* (c) *situé dans le plan de l'équateur du tore, tangent intérieurement et invariablement lié au tore; 3° d'une tige homogène* AB *formant l'axe du tore, invariablement liée au cercle* (c) *et dont le milieu* O *coïncide avec le centre de gravité commun du tore* (τ) *et du cercle* (c), *et* 4° *d'une circonférence de cercle* (γ) *homogène, de centre* O, *dont un diamètre coïncide toujours avec l'axe* AB *du tore et qui peut se mouvoir librement autour de son diamètre* A′B′ *perpendiculaire* à AB.

Le gyroscope est fixé par son centre de gravité O. *Le diamètre* A′B′ *de la circonférence* (γ) *étant horizontal, on le fait tourner avec une vitesse angulaire constante donnée* ω *autour de la nadirale* Oz *passant par* O. *On incline l'axe* AB *du tore sur la nadirale d'un angle donné* α *et l'on imprime au tore une vitesse initiale* n *autour de cet axe* AB, *puis on l'abandonne à lui-même.*

En quel point de l'axe AB *du tore faut-il appliquer à l'instant initial une masse pesante additionnelle* m *pour que cet axe* AB *tende indéfiniment vers la nadirale* Oz *sans jamais l'atteindre.*

2° *Si le rayon du cercle générateur du tore est égal à un centimètre, le rayon du cercle* (c) *à trois centimètres et le rayon de la circonférence* (γ) *à six centimètres, on demande de calculer les moments d'inertie des quatre pièces du gyroscope par rapport à* AB, *par rapport à* A′B′ *et par rapport à la perpendiculaire menée par* O *au plan* AB A′B′.

Épreuve pratique. — *A San Francisco, dont les coordonnées géographiques sont*

Longitude	124°45′15″ Ouest,
Latitude	37°49′27″ Nord,

on observe l'étoile Wéga, dont les coordonnées sont

Ascension droite	$18^h 33^m 6^s,84$
Déclinaison	38°41′,0″2

après son passage au plan méridien ; on trouve pour sa distance zénithale

72°28′36″,4.

Déterminer l'heure sidérale de San Francisco et celle de Paris au moment de l'observation.

Lyon.

ANALYSE. — *Intégrer*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+a^2x^2y=x^4\sin^2 ax.$$

Après avoir intégré l'équation sans second membre, on vérifiera que l'équation complète possède l'intégrale particulière

$$y=\mathrm{A}+\mathrm{B}\left(-2a^2x^2+\frac{4-6a^2x^2}{9}\cos 2ax+\frac{8}{9}ax\sin 2ax\right),$$

où A *et* B *sont des constantes à déterminer, a une constante donnée.*

Tout se réduit à intégrer

$$(0)\qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+k^2x^2y=0.$$

Quelques explications préalables sont nécessaires sur certaines équations traitées par M. Lafon dans son Cours.

Soit l'équation de Riccati

$$\mathrm{H}=\mathrm{P}(y,a,b,c,n)=x\frac{dy}{dx}-ay+by^2-cx^n=0,$$

$$a,\ b,\ c,\ n=\text{const.}$$

Lorsque $n=2a$, la substitution

$$(1)\qquad y=zx^a$$

sépare les variables, et il vient

$$x^{a-1}dx=\frac{dz}{c-bz^2}.$$

Posons maintenant

$$y = \frac{a}{b} + \frac{x^n}{y_1};$$

il viendra

$$H_1 = P(y_1, a+n, c, b, n) = 0.$$

Si ensuite

$$y_1 = \frac{a+n}{c} + \frac{x^n}{y^2},$$

$$H_2 = P(y_2, a+2n, b, c, n) = 0 \quad \text{et enfin}$$

. . . .

$$\left\{\begin{array}{ll} H_i = P(y_i, a+in, c, b, n) = 0 & \text{si } i \text{ impair} \\ H_i = P(y_i, a+in, b, c, n) = 0 & \text{si } i \text{ pair} \end{array}\right\}.$$

Posons maintenant $y = \frac{x^n}{u}$; on aura

$$G = P(u, n-a, c, b, n)$$

et par le même procédé

$$\left\{\begin{array}{ll} G_i = P(u_i, n-a+in, b, c, n) & \text{si } i \text{ impair} \\ G_i = P(u_i, n-a+in, c, b, n) & \text{si } i \text{ pair} \end{array}\right\}.$$

La séparation des variables se fera par la formule (1) sur

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{ll} H_i & \text{si} \quad 2(a+in) = n \\ G_i & \text{si} \quad 2(n-a+in) = n \end{array}\right\}.$$

Pour un candidat élève de M. Lafon et prévenu des habitudes de ce professeur, il était naturel de se demander si (o) n'était pas une équation H déguisée. C'est effectivement le cas.

Posons $y t = \frac{dy}{dx}$, puis $z = tx$; il viendra

$$H = P(z, 3, 1, -k^2, 2).$$

La seconde des relations (2) est satisfaite pour $i = 1$, puisque $a = 3$ et $n = 2$. La séparation des variables se fait sur G_1.

On trouve

$$G = P(u, -1, -k^2, 1, 2),$$
$$G_1 = P(u_1, 1, 1, -k^2, 2),$$

c'est-à-dire

$$x\frac{du_1}{dx} - u_1 + u_1^2 = -k^2x^2.$$

Posons, conformément à (1), $u_1 = xv$; on aura finalement

$$x + \int \frac{dv}{k^2 + v^2} = \text{const}.$$

Le lecteur achèvera sans peine l'intégration de (o).

MÉCANIQUE. — I. *Attraction d'un ellipsoïde homogène de révolution aplati sur un point de sa surface.*

II. *A chaque sommet d'un triangle équilatéral, de grandeur invariable, dont la hauteur h est donnée, on fixe un point matériel, non pesant, de même masse m. L'un des côtés se meut dans un plan fixe; le sommet opposé se meut dans un second plan fixe, parallèle au premier; la distance des deux plans est $\frac{h}{2}$.*

Étudier le mouvement des trois masses, en tenant compte des forces résultant des équations des liaisons. On négligera les frottements.

SESSION DE NOVEMBRE 1895. — COMPOSITIONS.

Montpellier.

ANALYSE. — I. *Calculer la valeur de l'intégrale triple*

$$\iiint [5(x-y)^2 + 3az - 4a^2]\, dx\, dy\, dz,$$

x, y, z prenant tous les systèmes de valeurs qui vérifient les relations

$$x^2+y^2-az<0, \qquad x^2+y^2+z^2-2a^2<0.$$

En posant $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, et remarquant que $\int\int\int xy\,dx\,dy\,dz=0$, on a

$$\int\int\int(5\rho^2+3az-4a^2)\rho\,d\rho\,dz\,d\theta,$$

où

$$0<\theta<2\pi \quad \text{et} \quad \rho^2<az, \qquad \rho^2<2a^2-z^2,$$

ou encore

$$2\pi\left[\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{az}}(5\rho^2+3az-4a^2)\rho\,d\rho\right.$$
$$\left.+\int_a^{a\sqrt{2}} dz\int_0^{\sqrt{2a^2-z^2}}(5\rho^2+3az-4a^2)\rho\,d\rho\right]$$
$$=2\pi\left[-\frac{a^5}{12}+\frac{a^5}{8}\right]=\frac{\pi a^5}{12}.$$

II. *Intégrer l'équation*

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3(1-a)x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+(3a^2-3a+1)x\frac{dy}{dx}-a^3y=bx^m.$$

Examiner en particulier le cas où $m=a$.

En posant $x=e^t$, l'équation devient

$$\frac{d^3y}{dt^3}-3a\frac{d^2y}{dt^2}+3a^2\frac{dy}{dt}-a^3y=be^{mt}$$

dont l'intégrale générale est

$$y=\frac{b}{(m-a)^3}e^{mt}+e^{at}(c_1+c_2t+c_3t^2)$$
$$=\frac{b}{(m-a)^3}x^m+x^a[c_1+c_2\log x+c_3\log^2 x].$$

Si $m=a$, en posant $m=a+\varepsilon$, et faisant tendre ε

vers 0, on trouve

$$y = \frac{b}{6} x^a \log^3 x + x^a [c'_1 + c'_2 \log x + c'_3 \log^2 x].$$

MÉCANIQUE. — I. *Dans le tétraèdre* OABC, *l'angle trièdre* O *est trirectangle, et les arêtes issues de* O *ont pour longueur commune l'unité. Ce tétraèdre est en mouvement et, à l'époque t, les vitesses des points* A, B, C *ont pour projections respectives sur les droites* OA, OB, OC *les valeurs suivantes :*

$$\begin{array}{llll} A: & \frac{2}{3}, & \frac{2+\sqrt{3}}{3}, & \frac{2-\sqrt{3}}{3}, \\ B: & \frac{2-\sqrt{3}}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{2+\sqrt{3}}{3}, \\ C: & \frac{2+\sqrt{3}}{3}, & \frac{2-\sqrt{3}}{3}, & \frac{2}{3}; \end{array}$$

on demande de déterminer, pour l'époque t, les éléments du mouvement hélicoïdal du tétraèdre.

Les parallèles aux trois vitesses menées par O ont leurs extrémités dans le plan $X + Y + Z = 2$. L'axe instantané est perpendiculaire à ce plan, et la vitesse de translation parallèle à cet axe a ses trois composantes égales à $\frac{2}{3}$.

On a les composantes des vitesses de rotation en retranchant $\frac{2}{3}$ de chacune des composantes données. Les trois plans menés par A, B, C, perpendiculairement à ces vitesses, se coupent suivant une même droite, $X = Y = Z$, qui est l'axe instantané. La vitesse angulaire $\omega = 1$ se déduit de la vitesse de l'un des points A.

II. *Un point matériel non pesant, de masse* 1, *est* *sollicité par la force centrale*

$$F = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\omega^2}\right), \qquad \text{où} \qquad \rho = \sqrt{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega},$$

a, b étant des constantes; r, ω les coordonnées polaires du point par rapport au centre. A $t = 0$, on a $r = a$, la vitesse étant perpendiculaire au rayon vecteur et égale à $\frac{1}{a}$.

Déterminer la trajectoire, étudier la variation de la vitesse, trouver le temps mis par le mobile pour revenir à sa position initiale.

Le principe des aires et le théorème des forces vives donnent les deux équations

$$r^2\frac{d\omega}{dt} = 1,$$

$$2F\,dr = d\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\right] = d\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right],$$

d'où

$$-Fr^2 = \frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\omega^2} = \frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\omega^2},$$

équation dont l'intégrale générale est

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} + c_1\cos\omega + c_2\sin\omega;$$

les conditions initiales donnent $c_1 = c_2 = 0$ et

$$r^2 = a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega;$$

la trajectoire est la podaire d'une ellipse. On a

$$v^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 = \frac{a^4\cos^2\omega + b^4\sin^2\omega}{r^6},$$

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{2(a^2-b^2)}{r^{10}}\left[a^2(2a^2-b^2)\cos^2\omega \right.$$
$$\left. + b^2(2b^2-a^2)\sin^2\omega\right]\sin\omega\cos\omega.$$

Si $1 < \frac{a}{b} < \sqrt{2}$, la vitesse est maxima pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, et minima pour $\omega = 0$ et π.

Si $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$, la vitesse est maxima pour

$$\operatorname{tang}\omega = \pm \frac{a}{b}\sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}},$$

et minima pour $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \ldots$.

Si $\frac{a}{b} < 1$, on a des résultats analogues.

Le temps employé pour revenir au point de départ est

$$T = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega)\, d\omega = \pi(a^2 + b^2).$$

Épreuves pratiques. — *Calculer, pour un instant déterminé, la longitude et la latitude géocentriques d'une planète, connaissant, en cet instant, les coordonnées héliocentriques de cette planète :*

Longitude............	$253^\circ\ 8'\ 47'',2$
Latitude..............	$-\ 5^\circ 32'\ 6'',4$
Log. du rayon vecteur.	$\overline{1},7836251$

et les coordonnées géocentriques du Soleil :

Longitude................	$53^\circ 13'\ 14'',7$
Log. du rayon vecteur...	$0,0187234$

L, B, R, $\mathcal{L}$ et d représentant les données; λ, β les inconnues, on a

$$\rho \cos\beta \cos\lambda = d\cos\mathcal{L} + R\cos B \cos L,$$
$$\rho \cos\beta \sin\lambda = d\sin\mathcal{L} + R\cos B \sin L,$$
$$\rho \sin\beta \quad\quad = R\sin B,$$

et en posant

$$\frac{R\cos B \sin L}{d\sin\mathcal{L}} = -\operatorname{tang}^2\varphi, \qquad \frac{R\cos B\cos L}{d\cos\mathcal{L}} = -\operatorname{tang}^2\psi,$$

on a

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\operatorname{tang}\mathcal{L}\cos 2\varphi\cos^2\psi}{\cos^2\varphi\cos 2\psi}, \qquad \operatorname{tang}\beta = \frac{\mathrm{R}\sin\mathrm{B}\sin\lambda\cos^2\varphi}{d\sin\mathcal{L}\cos 2\varphi};$$

on trouve

$$\begin{aligned} \varphi &= 39^\circ.45'.32'',4, \\ \psi &= 27.54.23,5, \\ \beta &= -\ 6.27.\ 7,6, \\ \lambda &= 29.47.\ 7,3. \end{aligned}$$

QUESTIONS.

1706. Par chaque point M d'une ellipse on mène deux droites qui rencontrent le grand axe sous l'angle d'anomalie excentrique relatif à M.

Chacune de ces droites enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. (E.-N. BARISIEN.)

1707. Les courbes (M) et (M′) sont caustiques réciproques par rapport à la courbe (A), c'est-à-dire que les tangentes MA et M′A aux courbes (M) et (M′) font des angles égaux avec la normale $A\alpha$ en A à la courbe (A), α étant le centre de courbure correspondant. La perpendiculaire abaissée de M sur $A\alpha$ coupe AM_1 en M′. Démontrer que la perpendiculaire élevée en M à MM′ et la perpendiculaire élevée en M′ à AM′ se coupent sur la droite αM_1, ce qui permet de construire le point M_1 lorsque M et α sont connus.

Corollaire. — Si la courbe (A) est une conique de foyers M et M′, ce théorème fait connaître le centre de courbure α répondant au point A de la conique. (M. D'OCAGNE).

1708. Soit M le pied de la perpendiculaire abaissée du point fixe O sur la tangente en A à la courbe (A). Le point M décrit la podaire (M) de la courbe (A) pour le point O. La perpendiculaire élevée en O à OM coupe la normale en A à la courbe (A) au point m. On sait que Mm est la normale à la podaire (M).

Soient, en outre, α et μ les centres de courbure des courbes (A) et (M) répondant aux points A et M.

On a les théorèmes suivants :

I. Si la perpendiculaire élevée à OA au point O coupe $A\alpha$ au point B, et si MB coupe $O\alpha$ au point D, la droite AD passe par μ.

II. Si la perpendiculaire élevée à Mm en m coupe OM au point H, la droite qui joint le point H au milieu I de $O\alpha$ passe par μ.

III. Si J est le pied de la perpendiculaire abaissée de α sur OM, K le pied de la perpendiculaire abaissée de J sur Mm, L le pied de la perpendiculaire abaissée de K sur $A\alpha$, la droite OL passe par μ.

Le théorème I a été démontré par M. Husquin de Rhéville dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. IX, p. 142). J'ai obtenu les théorèmes II et III par des voies absolument différentes. Je propose ici de déduire ces deux théorèmes du précédent. (M. D'OCAGNE.)

1709. On donne sur un plan les circonférences de cercles C_1, C_2, C_3. On trace une circonférence O tangente à C_1 et C_2.

On demande :

1° Quelle est l'enveloppe de l'axe radical de C_3 et de O, lorsque cette dernière courbe varie en restant tangente à C_1 et C_2?

2° Quel est le lieu du point de rencontre de cet axe radical et de la droite qui joint les points de contact de O avec C_1 et C_2? (MANNHEIM).

1710. Une série de bougies, de compositions et de hauteurs différentes, sont posées verticalement sur une table et allumées au même instant. Démontrer : 1° que généralement le centre de gravité du système formé par les bougies décrit une série d'arcs d'hyperboles successives; 2° qu'à un instant quelconque l'hyperbole correspondante a une asymptote verticale qui passe par le centre de gravité primitif des parties consumées des bougies qui brûlent encore à l'instant considéré.

(WALTON).

LES CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES ».

Désireux d'établir une émulation bienfaisante parmi les personnes qui s'occupent des questions de Mathématiques relevant de l'Enseignement supérieur, les rédacteurs et les éditeurs des *Nouvelles Annales* ont résolu d'ouvrir, *aux abonnés* de ce Journal, deux fois chaque année, un Concours sur des sujets rentrant en général dans les programmes de la Licence et de l'Agrégation.

Pour le choix des questions ainsi mises au concours, et aussi pour le jugement à intervenir, la Rédaction ne manquera pas de faire appel à ses Correspondants des Facultés; leur haute compétence sera une garantie complète d'impartialité, bien que les Rédacteurs assument sans réserve la responsabilité scientifique des décisions.

Les Concours dont il s'agit donneront droit :

1° A un crédit de 100fr d'Ouvrages à choisir dans le Catalogue de MM. Gauthier-Villars et fils;

2° A l'insertion du Mémoire primé;

3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires de ce Mémoire.

Pour l'année 1896, le temps matériel faisant défaut, il y aura un seul Concours. Dans un prochain numéro, nous publierons le texte de la question choisie et nous ferons connaître les mesures de détail qui devront être prises par les auteurs de Mémoires.

Dès à présent, nous pouvons annoncer que la date extrême à laquelle les manuscrits devront être parvenus à la Rédaction sera celle du **15 Octobre**.

Du reste, un délai d'au moins six mois sera toujours laissé aux concurrents, entre l'annonce de chacun des Concours et la date extrême de remise des manuscrits.

LES RÉDACTEURS.

[Dzbα] UN PROBLÈME SUR LES SÉRIES;

PAR M. MICHEL PETROVITCH,
Docteur ès Sciences mathématiques, à Belgrade (Serbie).

1. Proposons-nous, connaissant la somme $F(x)$ d'une série

$$F(x) = \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \ldots + \varphi(n)x^n + \ldots,$$

d'en déduire la somme de la série

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(1)x}{1} + \frac{\varphi(2)x^2}{1.2} + \frac{\varphi(3)x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\varphi(n)x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

à l'aide des intégrales définies.

Soit ρ une quantité positive telle que, pour $|u| < \rho$, on ait

$$\sum_1^\infty \varphi(n)u^n = F(u).$$

Soit, de plus, a une constante à partie réelle positive et c une constante positive.

Posons

$$u = \frac{x}{a + zi},$$

et envisageons l'intégrale définie

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{czi}\,dz,$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$J = \sum_{1}^{\infty} \varphi(n) \int_{-\infty}^{\infty} u^n e^{czi}\, dz.$$

On sait (d'après Cauchy) qu'en général si $\mu - 1$, c et la partie réelle de a sont des quantités positives, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ciz}\, dz}{(a+zi)^{\mu}} = \frac{2\pi}{\Gamma(\mu)} c^{\mu-1} e^{-ac},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ciz}\, dz}{a+zi} = 0;$$

donc

$$J = \frac{2\pi}{ce^{ac}} \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi(n) c^n x^n}{1.2\ldots n} = \frac{2\pi}{ce^{ac}} \Phi(cx),$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \Phi(cx) = \frac{ce^{ac}}{2\pi} J,$$

ou encore

$$(2) \qquad \Phi(x) = \frac{e^a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{zi}\, dz.$$

D'ailleurs, quelle que soit la valeur de x, on peut toujours donner à a une valeur telle que sa partie réelle soit positive et que

$$\left| \frac{x}{a+zi} \right| < \rho$$

pour toutes les valeurs de z entre $-\infty$ et $+\infty$. Les formules (1) et (2) sont donc, grâce à l'indétermination de a, valables pour x quelconque.

Soit maintenant $F(u)$ une fonction holomorphe quelconque de u. Si elle ne s'annule pas pour $u = 0$, l'intégrale J est indéterminée, car on a alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{czi} F(0)\, dz = \left[F(0) \frac{e^{czi}}{ci} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{F(0)}{c} \lim [2 \sin c\omega x]$$

pour $\omega = \infty$, ce qui est indéterminé. Pour que J ait un sens, il faut donc que $F(o) = o$, et l'on aura

$$\varphi(n) = \frac{F^{(n)}(o)}{1.2\ldots n},$$

ce qui donne la formule intéressante

$$(3) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{F^{(n)}(o)x^n}{(1.2\ldots n)^2} = \frac{e^a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{zi}\, dz.$$

Permutons x et c dans la formule (1) et faisons ensuite $c = 1$; on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{zxi}\, dz = \frac{2\pi}{xe^{ax}} \Phi(x),$$

avec

$$w = \frac{1}{a + zi},$$

et cela pour toutes les valeurs *positives* de x pour lesquelles $\Phi(x)$ converge.

2. Soit maintenant $\psi(z)$ une fonction satisfaisant aux conditions de Dirichlet (c'est-à-dire ne présentant qu'un nombre limité de maxima et de minima dans tout intervalle fini); on sait qu'alors on peut écrire

$$\psi(z) = f_1(z) - f_2(z),$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions constamment finies et ne croissant jamais. Nous supposerons, de plus, que, quand x tend vers $\pm\infty$, f_1 et f_2 tendent vers une même limite finie et déterminée, de sorte que $\lim \psi(z) = o$. L'intégrale

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) e^{zxi}\, dz$$

(où x est positif) aura alors, comme l'on sait, un sens et sera fonction de x. Les intégrales de cette forme jouent un rôle important dans la Physique mathématique, par exemple dans le problème de l'armille, dans l'intégration de l'équation des cordes vibrantes, de l'équation des télégraphistes, etc.

Supposons que, pour $|u|$ suffisamment petit et a convenablement choisi, ayant sa partie réelle positive, la fonction

$$\psi\left[\left(a-\frac{1}{u}\right)\sqrt{-1}\right]$$

soit développable en série de Taylor

$$\psi\left[\left(a-\frac{1}{u}\right)i\right]=\sum_1^\infty \theta(n,a)u^n \quad (^1);$$

alors, en posant

$$u=\frac{1}{a+zi},$$

on aura

$$J_1=\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left[\left(a-\frac{1}{u}\right)i\right]e^{zxi}\,dz=\sum_1^\infty\theta(n,a)\int_{-\infty}^{\infty}u^n e^{zxi}\,dz,$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(z)e^{zxi}\,dz=\frac{2\pi}{xe^{ax}}\sum_1^\infty\frac{\theta(n,a)x^n}{1.2.3\ldots n},$$

et cela pour toutes les valeurs *positives* de x pour lesquelles la série converge. On a ainsi un développement taylorien de l'intégrale.

3. Remarquons que l'on peut encore résoudre le problème 1 à l'aide d'une proposition énoncée par M. Peano

---

(1) On doit avoir $\theta(0,a)=0$, d'après l'hypothèse $\lim\psi(z)=$ pour $z=\infty$.

dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, n° 1, 1894, et qui est la suivante :

Étant données les séries

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

supposées absolument convergentes, la série

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots$$

aura pour somme l'intégrale de o à π du produit des séries

$$u_0 + u_1 e^{zi} + u_2 e^{2zi} + u_3 e^{3zi} + \ldots,$$
$$v_0 + v_1 e^{-zi} + v_2 e^{-2zi} + v_3 e^{-3zi} + \ldots,$$

plus le produit des mêmes séries lorsqu'on y échange x en $-x$, le tout divisé par 2π.

Il suffit, pour résoudre le problème qui nous occupe, de prendre

$$u_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \qquad v_n = \varphi(n) x^n,$$

ou encore

$$u_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}, \qquad v_n = \varphi(n).$$

De la même manière, on peut le résoudre à l'aide d'une proposition de Parseval, qui consiste en ceci [1] :

Étant données deux séries

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$
$$\psi(z) = v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \ldots,$$

supposées convergentes à l'intérieur d'un cercle de rayon un peu plus grand que un, ayant son centre à l'origine, on aura

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{\theta i}) \psi(e^{-\theta i})\, d\theta.$$

---

[1] H. Laurent, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 410.

J'ajoute, en terminant, que l'on obtient immédiatement, à l'aide de ces diverses formules, diverses expressions des transcendantes J de Bessel. Ainsi, par exemple, en posant

$$F(u) = e^u - 1,$$

la formule (3) donnera

$$\frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \ldots = \frac{e^a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\frac{x}{a+zi}} - 1\right) e^{zi}\, dz,$$

expression qu'on peut transformer de différentes façons.

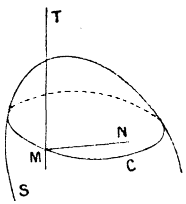
[O5p] LE THÉORÈME DE GAUSS SUR LA COURBURE;

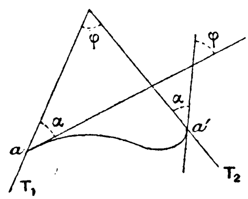
Par M. A. CALINON,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

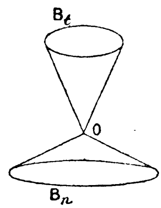
Nous supposerons d'abord démontrée la proposition suivante :

C étant une courbe située sur une surface S, et D une surface développable circonscrite à S le long de C, on développe cette surface D sur un plan, et, après ce développement, C est devenue une courbe plane C'; prenons sur C et C' deux arcs correspondants quelconques s et s'; la courbure géodésique de l'arc s sur la surface S est égale à la courbure plane de l'arc s' situé dans le plan de développement.

Cela posé, considérons en un point M de la courbe C la génératrice rectiligne T de la surface développable D et la normale N à la surface S. Développons D en coupant cette surface suivant la génératrice T, laquelle donne ainsi en développement deux génératrices T_1 et T_2 : la courbe C se développe alors suivant une courbe c qui coupe T_1 et T_2 en a et a' sous le même angle α; il en résulte qne les tangentes en a et a' à la courbe c font le même angle φ que les génératrices T_1 et T_2 : donc l'angle φ de T_1 et de T_2 est la courbure plane de la courbe c ou la courbure géodésique de la courbe C sur la surface S.







Au centre O d'une sphère de rayon unité, construisons deux cônes respectivement parallèles d'une part aux génératrices T, d'autre part aux normales N, le premier cône ayant pour base sur la sphère la courbe B_t et le second la courbe B_n.

En développant le cône de base B_t sur un plan, la courbe B_t devient un arc de cercle dont l'angle au centre est évidemment égal à l'angle de développement φ de la surface développable engendrée par T. Ainsi la longueur de la courbe B_t est la courbure géodésique de la courbe C.

Mais la normale N est évidemment normale au plan tangent suivant MT à la surface développable engendrée par T; donc les deux cônes de base B_t et C_n sont supplémentaires et, si σ est l'aire sphérique comprise dans *la courbe* B_n, *on a* $B_t + \sigma = 2\pi$ *ou* $\varphi + \sigma = 2\pi$. *Mais* l'aire σ est, par définition, la courbure totale de la portion de la *surface* S *comprise dans la courbe* C; par suite, la formule $\sigma = 2\pi - \varphi$ exprime le théorème de Gauss.

[K15b] DÉTERMINATION DES POINTS D'INFLEXION DANS LE DÉVELOPPEMENT DE LA SECTION PLANE D'UN CONE;

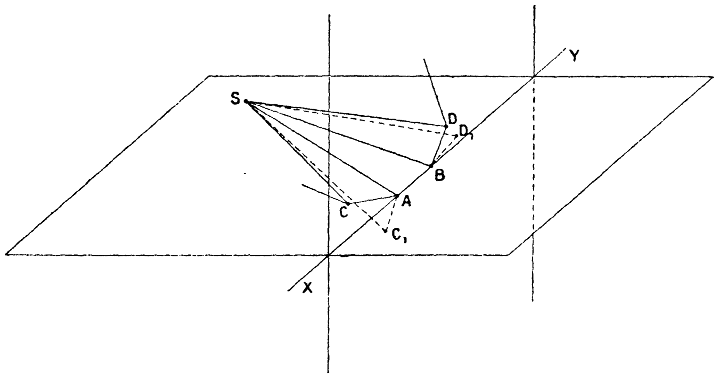
PAR M. F. BALITRAND,
Lieutenant du Génie à Montpellier.

Dans le numéro du mois de décembre 1894 des *Nouvelles Annales de Mathématiques,* M. Carvallo a critiqué, avec raison, la méthode classique employée pour déterminer les points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône. Nous allons donner deux démonstrations, à l'abri de tout reproche, croyons-nous, du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si, en un point* A *d'une section plane d'un cône, le plan sécant est normal à la surface, sans être perpendiculaire à la génératrice qui passe en ce point, le développement de la section présente un point d'inflexion au point qui correspond au point* A.

Considérons une pyramide SABCD... inscrite dans le cône, et dont les faces seront aussi petites qn'on le voudra; le développement du cône est, par définition, la limite du développement de cette pyramide quand les faces tendent vers zéro. Nous supposons que le plan sécant ABCD... est normal à la face SAB, sans être perpendiculaire à l'arête SA; et nous allons effectuer le développement sur le plan de la face SAB. L'angle $\widehat{SAX}$ sera aigu, par exemple; et l'angle $\widehat{SAY}$ obtus. D'ailleurs, d'après un théorème de Géométrie élémentaire, l'angle $\widehat{SAC}$ sera plus grand que l'angle $\widehat{SAX}$; donc, dans le développement, le point C viendra quelque part en C_1, S et C_1 étant de part et d'autre de XY.

L'angle $\widehat{SAY}$ étant obtus, il en est de même de l'angle $\widehat{SBY}$, qui en diffère infiniment peu. L'angle $\widehat{SBD}$ est



plus petit que l'angle $\widehat{SBY}$; donc, dans le développement, le point D viendra quelque part en D_1; S et D_1 étant du même côté de XY.

On voit donc que AB, qui, à la limite, coïncide avec la courbe transformée, traverse cette courbe. Le point A est donc un point d'inflexion. La démonstration est d'ailleurs en défaut, si la génératrice SA est perpendiculaire au plan sécant.

Autre démonstration. — Considérons un cône et, par trois génératrices quelconques de ce cône, faisons passer un cône de révolution. Si les trois génératrices se rapprochent indéfiniment, le cône donné et le cône de révolution seront osculateurs le long de la génératrice de contact; les sections dans ces cônes par un même plan seront également osculatrices au point qui correspond à la génératrice de contact, et il en sera de même pour les développements de ces sections.

On est donc ramené à la détermination des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône de révolution. Si l'on désigne par ρ et ω les coordonnées polaires d'un point de la projection horizontale d'une courbe tracée sur le cône de révolution, et par ρ_1 et ω_1 les coordonnées polaires du point qui lui correspond dans le développement, on a les formules

$$\omega = \frac{\omega_1}{\sin\theta}, \qquad \rho = \rho_1 \sin\theta,$$

θ désignant l'angle au sommet du cône.

D'ailleurs, la section plane du cône se projette sur le plan horizontal mené par le sommet suivant une conique qui admet pour foyer le sommet et pour directrice la trace du plan sécant sur le plan horizontal. L'équation de cette conique est

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega},$$

et la transformée a pour équation

$$\rho_1 \sin\theta = \frac{p}{1 - e\cos\left(\dfrac{\omega_1}{\sin\theta}\right)};$$

l'excentricité e est égale à $\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\theta$, θ désignant l'angle au sommet du cône et φ l'inclinaison du plan sécant sur le plan horizontal. Les points d'inflexion de cette courbe, caractérisés par la relation

$$\left(\frac{1}{\rho_1}\right)'' + \frac{1}{\rho_1} = 0,$$

sont donnés par l'équation

$$\cos\omega = -\frac{\tan^2\theta}{e} = -\frac{\tan\theta}{\tan\varphi}.$$

D'autre part, on trouve aisément pour l'équation du plan tangent au point (ρ, ω, z),

$$x\cos\omega + y\sin\omega - z\tan\theta = 0,$$

et, pour qu'il soit perpendiculaire au plan

$$z - x\tan\varphi = 0,$$

mené par le sommet du cône parallèlement au plan sécant, il faut avoir

$$\cos\omega = -\frac{\tan\theta}{\tan\varphi},$$

ce qui est bien la relation précédente. Le théorème est donc démontré.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE JUILLET 1895. — COMPOSITIONS.

Lyon.

Épreuve pratique. — *Le 9 juillet 1895, à* 10^h *temps moyen* $= 17^h 10^m 18^s,65$ *temps sidéral (méridien de Paris), la Lune aura pour coordonnées équatoriales géocentriques :*

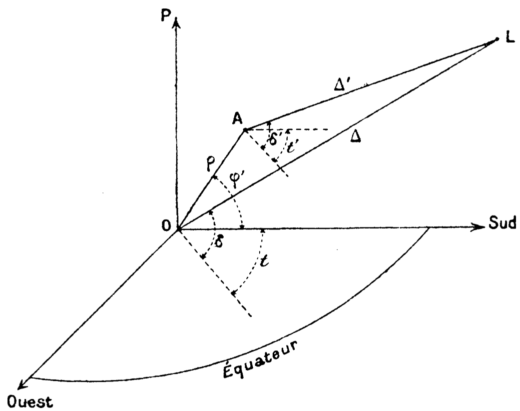
Ascension droite.....	$\alpha =$	$21^h 32^m 40^s,49$
Déclinaison.........	$\delta =$	$-26^\circ 47' \; 8'',6$
Parallaxe horizontale	$\pi =$	$54' \; 12'',6$

Calculer la position apparente de cet astre (α' *et* δ')

pour un lieu situé à la surface de la Terre et défini par les coordonnées suivantes :

Longitude E. de Paris........	$L = 9^m 47^s,58$
Latitude géocentrique.........	$\varphi' = 45°30'\ 10'',3$
Log. de la distance au centre rapportée au rayon équatorial.	$l.\rho = 9,9992590$

En introduisant l'angle horaire t et la distance Δ, et



en accentuant les symboles relatifs au lieu d'observation A, on peut écrire immédiatement :

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta'\cos\delta'\cos t' = \Delta\cos\delta\cos t - \rho\cos\varphi' \\ \Delta'\cos\delta'\sin t' = \Delta\cos\delta\sin t \\ \Delta'\sin\delta' \qquad = \Delta\sin\delta \qquad - \rho\sin\varphi'. \end{cases}$$

Divisons partout par Δ; faisons $\frac{\Delta'}{\Delta} = f$, et rappelons qu'en prenant pour unité le rayon équatorial, on a

$$\frac{1}{\Delta} = \sin\pi.$$

Les équations (1) deviennent

$$(2)\quad \begin{cases} f\cos\delta'\cos t' = \cos\delta\cos t - \rho\cos\varphi'\sin\pi \\ f\cos\delta'\sin t' = \cos\delta\sin t \\ f\sin\delta' \quad = \sin\delta \qquad - \rho\sin\varphi'\sin\pi. \end{cases}$$

Une transformation facile donne ensuite, si l'on remarque que $t' - t = \alpha - \alpha'$:

$$(3)\quad \begin{cases} f\cos\delta'\sin(\alpha-\alpha') = \rho\cos\varphi'\sin\pi\sin t & = \xi \\ f\cos\delta'\cos(\alpha-\alpha') = \cos\delta - \rho\cos\varphi'\sin\pi\cos t & = \cos\delta + \eta \\ f\sin\delta' \quad = \sin\delta - \rho\sin\varphi'\sin\pi & = \sin\delta + \zeta. \end{cases}$$

On sait que le temps sidéral local θ est égal au temps sidéral du méridien origine, plus la longitude

$$\theta = \theta_0 + L.$$

On a, d'autre part,

$$t = \theta - \alpha.$$

Nous pouvons donc résoudre les équations (3).

D'ordinaire, on demande le demi-diamètre apparent D' de la Lune vue du lieu A, étant connu le demi-diamètre apparent D rapporté au centre de la Terre. Comme les diamètres apparents sont en raison inverse des distances, on a

$$\frac{\sin D'}{\sin D} = \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{1}{f}, \qquad \text{d'où} \qquad \sin D' = \sin D\,\frac{1}{f}.$$

Il suffit de prendre $D' = \frac{D}{f}$.

Nous donnons ci-dessous le Tableau des calculs. On remarquera que nous substituons aux caractéristiques négatives leurs valeurs complémentaires, et que nous mettons seulement 6 décimales aux logarithmes des produits où figure sin π. Le signe qui précède chaque logarithme indique par convention le signe du nombre correspondant.

θ_0	17.10.18,65	$l.\cos\varphi'$	+9,845640
L	9.47,58	$l.\rho$	+9,999259
θ	17.20. 6,23	$l.\sin\pi$	+8,197788
α	21.32.40,49	$l.\sin\varphi'$	+9,853263
$\theta-\alpha=t$	19.47.26,74	$l.\sin t$	−9,950430
t	296°51′26″,51	$l.\rho\cos\varphi'\sin\pi$	+8,042687
		$l.-\cos t$	−9,6544916

$l.\cos\delta$	+9,9507046	$l.\sin\delta$	−9,6538443
$l.\eta$	−7,697603	$l.\zeta$	−8,050310
$\cos\delta$	+0,8926981	$\sin\delta$	−0,4506551
η	−0,0049843	ζ	−0,0112282
$\cos\delta+\eta$	+0,8877138	$\sin\delta+\zeta$	−0,4618833
$l.f\cos\delta'\cos(\alpha-\alpha')$	+9,9482730	$l.f\sin\delta'$	−9,6645323
$l.\cos(\alpha-\alpha')$	+9,9999733	$l.\cos\delta'$	+9,9479810
$l.\xi=l.f\cos\delta'\sin(\alpha-\alpha')$	−7,993117	$l.f\cos\delta'$	+9,9482997
$l.\tang(\alpha-\alpha')$	−8,044844	$l.\tang\delta'$	−9,7162326
T	4,685593	δ'	−27°29′12″5
$l.(\alpha-\alpha')''$	−3,359251		
$\alpha-\alpha'$	−0°38′6″,9	$l.\frac{1}{f}$	9,9996813
	− $2^m32^s,46$	$l.$ D	....
α'	21.35.12,95	$l.$ D′	....

SESSION DE NOVEMBRE 1895. — COMPOSITIONS.

Grenoble.

Analyse. — I. *Intégration de l'équation*

(1) $$p^2+q^2-2px-2qy+2xy=0.$$

Changeant de fonction en posant $z_1 = z - \frac{x^2+y^2}{2}$, avec $p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x}$, $q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y}$, l'équation proposée se simplifie et devient

$$(2) \qquad p_1^2 + q_1^2 - 2(x-y)^2 = 0.$$

Des équations de Cauchy on déduit

$$(3) \qquad dp_1 + dq_1 = 0,$$

d'où

$$(4) \qquad p_1 + q_1 = a,$$

a étant une constante arbitraire. A l'aide des équations (2), (4), l'équation $dr_1 = p_1\,dx + q_1\,dy$ devient

$$dr_1 = \frac{a}{2}(dx+dy) + \frac{1}{2}(dx-dy)\sqrt{2(x-y)^2 - a^2},$$

qui, intégrée, fournit, pour l'équation proposée, la solution complète

$$z = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{a(x+y)}{2} + \frac{x-y}{4}\sqrt{2(x-y)^2-a^2}$$
$$- \frac{a^2}{4\sqrt{2}} \log \frac{(x-y)\sqrt{2} + \sqrt{2(x-y)^2-a^2}}{b},$$

b étant une nouvelle constante arbitraire.

Remarque. — En ne changeant pas la fonction cherchée, les calculs seraient encore très simples. Au lieu de (3), on aurait $dp - dx + dq - dy = 0$, d'où $(p-x)+(q-y) = a$, qui conduirait avec (1) à l'équation

$$dr = (x\,dx + y\,dy) + \frac{a}{2}(dx+dy)$$
$$+ \frac{1}{2}(dx-dy)\sqrt{2(x-y)^2-a^2},$$

laquelle amène à la solution complète déjà obtenue.

II. *Lignes asymptotiques de la surface définie par l'équation*

$$z = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques projetées sur xOy est alors

$$(1)\qquad (x^2 - y^2)\,dx^2 - 4xy\,dx\,dy - (x^2 - y^2)\,dy^2 = 0,$$

ou

$$(x\,dx - y\,dy)^2 = (x\,dy + y\,dx)^2,$$

d'où

$$x\,dx - y\,dy = \pm(x\,dy + y\,dx).$$

En intégrant, on a

$$(2)\qquad x^2 - y^2 = \pm 2xy + a,$$

a étant une constante arbitraire.

Les lignes asymptotiques projetées sur xOy forment donc deux familles d'hyperboles équilatères, concentriques, ayant, dans chaque famille, les mêmes asymptotes. En outre, les deux familles de courbes sont symétriques par rapport à Ox et à Oy et forment deux systèmes orthogonaux.

Remarque. — L'équation (1) aurait donné

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x + y}{x - y},$$

équations homogènes en x, y, qu'on intégrerait, suivant la règle, en posant $y = tx$.

Les équations (3) sont aussi linéaires en x, y, et pourraient encore s'intégrer par différentiation. Mais cette marche est plus longue que les précédentes.

Mécanique. — *Étant donnés trois axes rectangulaires fixes* OX, OY, OZ, *dont le dernier* OZ *est vertical et dirigé en sens inverse de la pesanteur, on con-*

sidère la parabole située dans le plan vertical XZ dont l'équation est $X^2 = 2pZ$, *et l'on suppose qu'elle tourne avec une vitesse angulaire constante* ω *autour de OZ. Un point matériel pesant est assujetti à rester sur la parabole sur laquelle il peut glisser sans frottement. On demande son mouvement relatif, son mouvement absolu et la réaction de la courbe.*

On discutera d'abord les circonstances générales du mouvement, puis on examinera en particulier le cas suivant :

Au temps $t = 0$, *la parabole est dans le plan XZ; le point est placé en O avec une vitesse relative* v_0 *donnée par la formule*

$$v_0 = p\sqrt{\omega^2 - \frac{g}{p}},$$

ce qui suppose $\omega > \sqrt{\frac{g}{p}}$. *On demande, dans ce cas, la nature de la projection de la trajectoire absolue du point sur le plan horizontal (g est l'intensité de la pesanteur).*

En supposant, comme on peut le faire, la masse du point égale à l'unité et la rotation ω de sens direct; appelant x et z les coordonnées relatives du point; X, Y, Z ses coordonnées absolues, de telle sorte que l'on ait

$$X = x\cos\omega t, \qquad Y = x\sin\omega t, \qquad Z = z = \frac{x^2}{2p},$$

on peut écrire les équations du mouvement relatif sous la forme (1)

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \omega^2 x + N\alpha, \\ 0 &= -2\omega\frac{dy}{dt} + N\beta, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g + N\gamma, \end{aligned}\right.$$

et celles du mouvement absolu sous la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 X}{dt^2} = N\alpha_1, \\ \dfrac{d^2 Y}{dt^2} = N\beta_1, \\ \dfrac{d^2 Z}{dt^2} = N\gamma_1 - g, \end{cases}$$

N étant la réaction; α, β, γ ses cosinus directeurs par rapport aux axes relatifs; α_1, β_1, γ_1 ses cosinus directeurs par rapport aux axes fixes.

Des premières, on déduit immédiatement l'intégrale des forces vives dans le mouvement relatif, que l'on eût pu écrire directement puisqu'on sait que le travail de la force centrifuge composée est nul :

$$v^2 = \omega^2 x^2 - 2gr + h = \left(\omega^2 - \frac{g}{p}\right) x^2 + h.$$

Comme $v^2 = \left(1 + \dfrac{x^2}{p^2}\right)\dfrac{dx^2}{dt^2}$, on voit que le problème est ramené à une quadrature elliptique

$$(3) \qquad \left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)\frac{dx^2}{dt^2} = \left(\omega^2 - \frac{g}{p}\right) x^2 + h.$$

Si l'on se sert des équations (2), il suffit de remarquer que

$$\alpha_1 \frac{\partial X}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial Y}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\partial Z}{\partial x} = 0,$$

et par suite

$$\frac{d^2 X}{dt^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{d^2 Y}{dt^2}\frac{\partial Y}{\partial x} + \left(\frac{d^2 Z}{dt^2} + g\right)\frac{\partial Z}{\partial x} = 0.$$

Cette équation développée fournit immédiatement l'équation différentielle du second ordre, qu'on obtiendrait également en formant l'équation de Lagrange, relative à la variable x :

$$(4)\qquad \left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{x}{p^2}\,\frac{dx^2}{dt^2}+\left(\frac{g}{p}-\omega^2\right)x=0.$$

Multipliant par $\frac{2dx}{dt}$ et intégrant, on retrouve l'équation (3).

x étant déterminée en fonction du temps, les équations (1) ou (2) donneront la grandeur et la direction de la réaction à la manière ordinaire.

L'équation (3) montre immédiatement que le mouvement relatif se poursuivra indéfiniment, au moins à partir d'un certain moment, sur une même moitié de la parabole, ou sera oscillatoire, suivant que $\omega^2-\frac{g}{p}$ sera >0 ou <0. Si $\omega^2-\frac{g}{p}=0$, l'équation peut être intégrée par les fonctions élémentaires. Si en même temps la vitesse relative initiale est nulle, il y a équilibre relatif. Enfin, dans le cas particulier indiqué, on voit aisément que $\frac{dx}{dt}$ demeure constant; la projection horizontale du point décrit une spirale d'Archimède.

Quand le mouvement est oscillatoire, en appelant x_0 le maximum de x et posant

$$x=p\operatorname{tang}\varphi,\qquad x_0=p\operatorname{tang}\varphi_0,$$

puis

$$\sin\varphi=\sin\varphi_0\sin\theta,$$

on trouve aisément, avec $t=0$ pour $x=x_0$,

$$\sqrt{\frac{g}{p}-\omega^2}\,\frac{t}{\cos\varphi_0}=\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}d\theta(1-\sin^2\varphi_0\sin^2\theta)^{-\frac{3}{2}},$$

Si $x_0<p$, on peut poser $x_0=p\sin\theta_0$, $x=p\sin\theta_0\sin\theta$,

et l'on obtient

$$\sqrt{\frac{g}{p} - \omega^2}\, t = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} d\theta (1 + \sin^2\theta_0 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}.$$

La durée T d'une oscillation simple est donnée, dans le premier cas, par la formule

$$\sqrt{\frac{g}{p} - \omega^2}\, \frac{T}{\cos\varphi_0} = \pi \left\{ 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi_0 + \ldots + \left[\frac{3.5\ldots(2n-1)^2}{2.4\ldots 2n-2}\right] \frac{2n+1}{4n^2} \sin^{2n}\varphi_0 + \ldots \right\}.$$

dans le second, par la formule

$$\sqrt{\frac{g}{p} - \omega^2}\, T = \pi \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\theta_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sin^4\theta_0 + \ldots + (-1)^{n-1} \left[\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n-2}\right]^2 \frac{1}{4n^2} \sin^{2n}\theta_0 + \ldots \right\}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, pour un lieu donné, l'azimut du coucher d'une étoile de déclinaison connue et la durée de la présence de cette étoile au-dessus de l'horizon du lieu, en tenant compte de la réfraction.*

Données. — Latitude du lieu (Grenoble) :

$$\lambda = 45^\circ 11' 23'';$$

Déclinaison de l'étoile (α Lyre) :

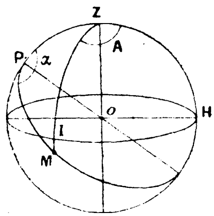
$$\mathcal{D} = 38^\circ 41' 16'';$$

Réfraction à l'horizon :

$$\theta = 33' 47'';$$

M Position de l'étoile au moment du coucher apparent,
A Azimut de M ;
α Angle horaire absolu de M ;

Dans le triangle de position PZM, on connaît les trois côtés, et l'on doit calculer deux des angles.



Posons

$$a = \mathrm{PM} = 90 - \mathcal{D},$$
$$b = \mathrm{ZM} = 90 + \theta,$$
$$c = \mathrm{PZ} = 90 - \lambda;$$

on aura

$$\cot\frac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin p \sin(p-b)}}.$$

On trouve

$$\mathrm{A} = 153^\circ 44' 58'',$$
$$\alpha = 145^\circ 29'\ 8''8;$$

enfin, le temps cherché T, correspondant à une rotation 2α de la sphère, sera

$$\mathrm{T} = 19^{\mathrm{h}} 23^{\mathrm{m}} 53^{\mathrm{s}}.$$

Caen.

Analyse et Géométrie. — I. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles qui détermine le facteur intégrant* μ *de l'équation*

$$(x^3y - 2y^4)\,dx + (y^3x - 2x^4)\,dy = 0.$$

L'intégration de cette équation, facile à former, revient à celle du système

$$(1)\qquad \frac{dx}{xy^3-2x^4}=\frac{dy}{2y^4-x^3y}=\frac{d\mu}{9\mu(x^3-y^3)};$$

l'égalité des deux premières fractions ramène à l'équation donnée, qui s'intègre soit comme équation homogène, soit en divisant par x^3y^3.

Première intégrale de (1)

$$\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}=\alpha.$$

Égalant la troisième fraction à une combinaison des deux autres, on a

$$\frac{d\mu}{9\mu(x^3-y^3)}=\frac{x^2dx+y^2dy}{2(y^6-x^6)},\qquad \mu^2(x^3+y^3)^3=\beta;$$

intégrale générale

$$\mu=(x^3-y^3)^{-\frac{3}{2}}\varphi\left(\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}\right).$$

II. *Lieu des sommets des paraboles qui ont un contact du second ordre avec une courbe plane donnée en un point donné* A.

Rapportées à la tangente et à la normale en A, a étant constant et λ variable, les paraboles ont pour équation

$$(x+\lambda y)^2-4ay=0,$$

ou

$$\left(x+\lambda y-\frac{2a\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2=\frac{4a}{1+\lambda^2}\left(y-\lambda x+\frac{a\lambda^2}{1+\lambda^2}\right).$$

Sommet :

$$x=\frac{2\lambda+\lambda^3}{(1+\lambda^2)^2}a,\quad y=\frac{\lambda^2a}{(1+\lambda^2)^2},\quad \left(\lambda=\frac{4ay-x^2-2y^2}{3xy}\right);$$

$$(x^2+y^2)^2-5ax^2y+4ay^3+4a^2y^2=0.$$

MÉCANIQUE. — I. *Déterminer les positions d'équilibre d'une barre très mince, pesante et homogène, dont les extrémités* A, B *sont assujetties à rester sur deux droites fixes et parfaitement polies : l'une,* OX, *horizontale, l'autre,* OY, *dirigée dans le sens de la pesanteur. Chaque élément de la barre est attiré vers le point* O *avec une intensité proportionnelle à la longueur de l'élément et à l'inverse du carré de sa distance au point* O.

Soient $AB = 2a$, $BAO = \theta$; les attractions ont une résultante passant en O :

$$X = -\mu \int_{-a}^{a} \frac{(a+r)\cos\theta\, dr}{(a^2 + r^2 + 2ar\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\mu}{a\sin 2\theta} = Y,$$

formules résultant aussi d'un théorème connu sur l'attraction d'une droite.

Équations de l'équilibre :

$$N - \frac{\mu}{a\sin 2\theta} = 0, \quad N_1 + \frac{\mu}{a\sin 2\theta} - P = 0,$$
$$2N\sin\theta + (2N_1 - P)\cos\theta = 0;$$
$$\tang^3\theta - \tang^2\theta + \left(1 + \frac{Pa}{\mu}\right)\tang\theta - 1 = 0;$$

une seule racine réelle entre 0 et 1.

II. *Un point* M *non pesant, de masse* m, *est assujetti à rester sur la surface polie d'un cylindre de révolution qui tourne avec une vitesse constante* ω *autour d'un diamètre* AB, *supposé fixe, de l'une de ses sections droites* S; *il est attiré vers* AB *par une force perpendiculaire à cette droite et égale au produit de* $m\omega^2$ *par la distance du point* M *à* AB. *Déterminer le mouvement du point sur le cylindre, en supposant qu'à l'in-*

stant initial le mobile soit en A *avec une vitesse égale à* ωAB, *dirigée tangentiellement à* S.

Axe des x suivant AB, axe des z suivant l'axe du cylindre; équations du mouvement relatif de la forme

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{R},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{R} + 2m\omega\frac{dz}{dt},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -2m\omega\frac{dy}{dt},$$

avec les données initiales et, en faisant $\frac{y}{x} = \tang\theta$, on trouve

$$\tang\frac{1}{2}\theta = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}, \qquad z = -R\log\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$$

$$N = 4m\omega^2 R\cos 2\theta.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, à* 0″,1 *près, la longitude et la latitude héliocentriques d'une planète :*

Inclinaison de l'orbite : 18°24′35″,2;
Longitude : ☊ 21°45′32″,4;
Longitude vraie de la planète dans son orbite :

342°3′28″,7.

Longitude : 343°31′46″,3;
Latitude : 11°38′18″,7.

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques, par M. *Ch. Méray*, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — *Deuxième Partie :* Étude monographique des principales fonctions d'une seule variable. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1895. Un Volume gr. in-8° de xi-495 pages. Prix : 14^{fr}.

I.

Il y a un an, j'eus le plaisir d'annoncer aux lecteurs des *Nouvelles Annales* l'apparition de la première Partie de l'Ouvrage de M. Méray; et je disais alors : « Il faut bien se garder de juger ce premier Volume isolément. Chaque Chapitre est une introduction toute prête à des Chapitres des Volumes suivants, ... » et je promettais aux lecteurs de nombreuses surprises, des méthodes nouvelles, à la fois ingénieuses et profondes. Je suis heureux de pouvoir dire de suite que M. Méray ne m'a pas fait mentir et que le nouveau Volume dépasse même nos espérances.

Il contient, faite au point de vue personnel de l'auteur, une étude monographique, très détaillée parfois, des principales fonctions d'une seule variable, fonctions dont les plus simples sont les matériaux usuels des calculs courants : radicaux, irrationnelles algébriques (renfermées ici dans le cas bien plus vaste où il s'agit d'une fonction implicite engendrée par la résolution d'une équation *olotrope* entre elle et la variable), la fonction logarithmique et l'exponentielle, les fonctions circulaires; enfin, ce qu'il y a d'essentiel dans la théorie des fonctions elliptiques et dans celle des fonctions eulériennes.

Fidèle à son principe fondamental et aussi à sa promesse, M. Méray continue à faire sortir toutes choses, même les particularités numériques, de la considération exclusive des séries entières qui lui fournissent parfois les ressources les plus inattendues (Ch. III, IV, V).

S'attachant de préférence aux idées générales, dédaignant les expédients et les artifices, et ne se souciant que d'assurer aux raisonnements une rigueur absolue, il apporte à l'appui de chaque fait analytique la preuve la plus propre à en faire saisir la cause et pressentir les conséquences.

Une particularité curieuse que je signalerai de suite est l'élimination, consommée définitivement dans ce Volume, des considérations de Trigonométrie géométrique avec le secours desquelles on traite, d'ordinaire, d'abord les fonctions circulaires, puis l'exponentielle imaginaire et, *à leur suite*, l'équation binome.

S'ils peuvent choquer des habitudes invétérées, le plan et les procédés de M. Méray lui ont permis de montrer que la seule conception du *nombre entier abstrait* suffit à toute l'Analyse, qu'en dépit de leur variété infinie, les vérités analytiques qui offrent un caractère normal, *d'une utilité certaine*, ne sont, au fond, que de simples propriétés des séries entières.

II.

Entrons maintenant dans quelques détails sur les treize Chapitres dont le Volume se compose. Le premier Chapitre contient l'extension des propriétés fondamentales des polynomes entiers à des fonctions olotropes quelconques. J'y signalerai, tout particulièrement, une démonstration du théorème de d'Alembert qui, non seulement établit l'existence des racines d'une équation entière, mais encore fournit *ipso facto* pour elles un procédé de calcul effectif. Elle avait déjà paru dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1891, mais précédée de certains préliminaires qui, ici, se trouvent à leur place, ailleurs. A la suite, l'étude de la variation des fonctions d'une variable réelle par les dérivées.

Le second Chapitre est consacré à la définition et à l'étude des propriétés générales des fonctions *méromorphes*, c'est-à-dire de celles qui sont aux fonctions olotropes ce que les fractions rationnelles sont aux polynomes entiers.

Comme aucune question de principe ne se trouve engagée ici, M. Méray abandonne une terminologie qu'il avait employée autrefois, pour se rallier à l'expression proposée plus tard par Briot et Bouquet; en cela, tout au moins, il ne montre pas l'intransigeance qui lui a été imputée quelquefois. Dans un paragraphe spécial, on trouve la discussion des expressions se présentant sous les formes indéterminées $\frac{0}{0}$, ∞, $-\infty$, ..., c'est-à-dire, d'après l'auteur, de certaines fonctions composées entrant dans des phases singulières. Vient enfin une exposition très complète des principes du *Calcul des résidus*. Depuis longtemps déjà on ne parle plus guère que de la relation si connue existant entre l'intégrale définie et le résidu intégral d'une fonction méromorphe, pris sur un contour fermé. M. Méray dit lui-même : « Le Calcul des résidus n'a pas l'importance de ces théories qui dominent les vastes parties de l'Analyse »; mais en ajoutant aussitôt : « il a fourni quelques formules d'une rare élégance », il légitime la place qu'il lui a faite, peut-être un peu par respect pour Cauchy, son maître.

III.

J'arrive, maintenant, au Chapitre III, la *Fonction radicale simple,* qui, je m'empresse de le dire, est un petit chef-d'œuvre. A lui seul, tant je le trouve instructif, je voudrais pouvoir consacrer toute cette analyse; mais, hélas! il faut savoir se limiter. Il débute par la règle de convergence de Gauss exposée magistralement sous une forme plus générale, et cependant plus simple, qui devrait lui valoir droit de cité dans l'enseignement : *Pour une série dont le terme général* u_n *reste réel et positif et où le rapport* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *est une fonction de* $\frac{1}{n}$, *olotrope en* $\frac{1}{n} = 0$, *se développant en*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + g_1 \frac{1}{n} + g^2 \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots,$$

il y a convergence quand g_1 *est* < -1, *divergence quand* $g_1 \geqq -1$.

M. Méray nomme *fonction radicale simple* la fonction implicite u de x définie par l'équation rationnelle binome

$$u^m - x^n = 0,$$

la plus simple de toutes, évidemment. La théorie générale, depuis longtemps exposée dans le premier Volume, en fournit immédiatement le développement exécuté à partir des valeurs initiales $x = x_i$, $u = u_i$:

$$u = u_i - \mu \frac{u_i}{x_i} \frac{x - x_i}{1} + \dots$$
$$+ \mu(\mu - 1)\dots(\mu - k + 1) \frac{u_i}{x_i^k} \frac{(x - x_i)^k}{k!} + \dots,$$

où l'on a posé $\mu = \frac{n}{m}$. A cette série $f(\mu, x)$ est aussitôt substituée la pseudo-fonction $\psi(\mu, x)$ qui n'est autre chose que la fonction précédente construite avec les valeurs initiales particulières $x = 1$, $u = 1$. Il ne reste plus qu'à étudier cette série en elle-même, abstraction faite de son origine, et alors on voit immédiatement qu'on est conduit à la définition générale de la fonction x^μ pour toutes les valeurs de μ, même imaginaires. Le procédé qu'on emploie d'ordinaire consiste à poser, *ex abrupto*,

$$x^\mu = e^{\mu l(x)};$$

mais, tout de suite, on sent ce qu'il comporte d'artificiel. Ne paraît-il pas peu logique de passer par deux transcendantes, l'exponentielle et le logarithme, pour définir, d'une façon générale, la fonction si simple x^μ ! Nous devons savoir gré à l'auteur de nous avoir fait enfin descendre à des considérations *analytiques*, débarrassées de toute transcendante, et plus d'un professeur regrettera que le temps trop limité dont il dispose ne lui permette pas de suivre cette autre marche si naturelle et au fond si simple.

L'étude de la fonction $\psi(\mu, x)$, faite *directement* sur la série et ses prolongements successifs, conduit à la connaissance de toutes ses propriétés caractéristiques, extensions de celles des puissances proprement dites. On a même du coup le développement de la fonction suivant les puissances du paramètre μ. Ensuite, on arrive tout naturellement aux déterminations multiples de $\psi(\mu, x)$ au bout des chemins non équivalents par lesquels x peut atteindre une même valeur donnée, c'est-à-dire de ceux que sépare l'origine, seul point où la fonction entre dans une *phase critique*. En $x = X$, ces déterminations $U^{(\pm k)}$ sont liées à l'une d'entre elles U, choisie arbitrairement, par la formule

$$U^{(\pm k)} = \Phi^{\pm k} U,$$

où Φ désigne un facteur ne dépendant que de μ.

Ici se présentait une certaine difficulté. Dans les questions de pure Algèbre, M. Méray pousse l'horreur des transcendantes, ou plutôt son souci d'établir entre toutes choses une filiation étroite et naturelle, jusqu'à bannir la Trigonométrie élémentaire. Il ne nous a jamais parlé de l'argument d'une imaginaire, et il ne nous en parlera pas avant d'avoir étudié la transcendante logarithmique en son lieu et place. Cependant, l'étude complète de $\psi(\mu, x)$ et du multiplicateur connexe $\Phi(\mu)$ exige des connaissances équivalentes à celle de la manière dont varie avec μ ce que nous appelons l'*argument* de cette dernière quantité. Il tourne bien simplement la difficulté, en substituant à la notion de l'*argument* celle de la *pente* d'une imaginaire.

La *pente* d'une imaginaire $a + bi (a \gtreqless 0, b \gtreqless 0)$ est le quotient $\frac{b}{a}$ où nous verrions la tangente trigonométrique de l'argument. On conçoit aisément que ce nouvel élément puisse remplacer l'argument, et M. Méray réussit ainsi à nous donner une idée très nette et très complète de sa fonction $\psi(\mu, x)$. Il établit directement, d'une façon tout à fait élégante, les propriétés du multiplicateur $\Phi(u)$ qu'il discute facilement, puis il arrive naturellement à la résolution numérique de l'équation binome. Pour la racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité, on trouve, en particulier, les valeurs

$$\Phi(0) = 1, \qquad \Phi\left(\frac{1}{m}\right), \qquad \Phi\left(\frac{2}{m}\right), \qquad \ldots, \qquad \Phi\left(\frac{m-1}{m}\right).$$

La discussion des *phases critiques* d'une fonction implicite u de x, définie par la relation

$$f(x, u) = 0,$$

où $f(x, u)$ est une fonction olotrope, fait l'objet du Chapitre IV. C'est la généralisation, opérée par des procédés nouveaux, de l'étude de l'irrationnelle algébrique au voisinage des points critiques x_0, u_0 en lesquels on a

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) = 0,$$

question dont la solution, d'un intérêt si capital, a illustré le nom de Puiseux. M. Méray établit encore l'existence de ces fonctions implicites, dans les circonstances exceptionnelles où l'on se trouve placé, par des développements en séries entières exécutés toujours *directement ;* mais il lui a fallu imaginer des moyens particuliers imitant les procédés lumineux de la théorie courante des équations algébriques et remettant en jeu la *méthode des coefficients indéterminés.* Il recherche d'abord les racines olotropes (tendant vers u_0 en même temps que x vers x_0) et il ramène ensuite la recherche des racines non olotropes à la précédente, en montrant qu'on peut toujours assigner un exposant entier n tel que l'équation

$$f(x_0 + t^n,\ u) = 0$$

offre, en $t = 0$, $u = u_0$, des racines fonctions olotropes de t. Il suffit alors de faire la substitution inverse $t = (x - x_0)^{\frac{1}{n}}$, pour obtenir des développements spéciaux propres aux racines non olotropes. La méthode de calcul pratique ne diffère pas de celle de Puiseux, consistant à former le contour polygonal qui enveloppe les *jalons*, c'est-à-dire les points par lesquels on a représenté graphiquement les paires d'exposants des divers termes effectifs du développement de $f(x, u)$. Ici, je reprocherai à M. Méray de ne pas avoir appuyé ses explications par une figure, et surtout de ne pas les avoir illustrées par un exemple numérique dans l'étude duquel les lecteurs novices auraient trouvé un grand secours ; l'espace, sans doute, lui aura manqué ici comme ailleurs.

Toute cette partie de l'Ouvrage est certainement celle qui a dû coûter le plus d'efforts à l'auteur, celle qu'il a dû *polir et remettre sur le métier* le plus souvent. C'est aussi celle où se mettent le mieux en lumière ses grandes qualités de logicien et de mathématicien consommé.

IV.

Au Chapitre V on aborde l'étude des transcendantes classiques. Pour M. Méray, « toutes les transcendantes peuvent être considérées comme des résultats prochains ou éloignés d'intégrations exécutées sur des expressions de nature auparavant connue » ; en conséquence, il les définit par de telles intégrations, par l'inversion des fonctions ainsi obtenues, etc. Cette méthode, qui est bien souvent la méthode historique, est celle aussi qui, dès l'abord, fait le mieux concevoir la portée et l'utilité de pareilles conceptions.

La fonction $l(x)$ et son inverse e^x sont définies simplement par l'intégrale

$$l(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

et par l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = u,$$

inverse de la relation précédente. De là, par la seule application des principes généraux, découlent immédiatement les développements et toutes les propriétés spécifiques de ces fonctions. Je note, en passant, une expression nouvelle qui me paraît heureuse : par le mot *augment,* M. Méray désigne ce que nous appelons d'ordinaire la *période* du logarithme, laissant ainsi à ce dernier le sens naturel qui lui est attaché dans la théorie des fonctions périodiques. M. Méray rattache aux intégrations génératrices du logarithme, et à l'existence de son augment, le théorème de Cauchy établissant la relation si connue entre les intégrales définies et les résidus. Il en rapproche également son autre fameux théorème sur le nombre des racines offertes par une équation à l'intérieur d'un contour fermé ; on sait que celui de d'Alembert peut être considéré comme un corollaire de ce dernier. M. Méray ne paraît reproduire cette remarque qu'à regret. Il n'aime effectivement que les grandes routes bien droites, évitant les petits sentiers qui mènent quelquefois plus vite au but, mais sans laisser bien apercevoir où l'on va ni par où l'on a passé.

Le Chapitre VI traite des fonctions circulaires.

Contrairement à nos habitudes, l'auteur commence par l'étude des fonctions $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{arc\,cot} x$, définies par des intégrations de fractions rationnelles

$$\operatorname{arc\,tang} x = \int_0^x \frac{dx}{x^2+1}, \qquad \ldots.$$

Son point de vue spécial aurait pu lui faire placer cette étude aussi bien dans le Chapitre précédent, pour y rassembler tout ce qui concerne l'intégration des différentielles rationnelles. Mais il aura préféré n'embarrasser d'aucun accessoire sa théorie du logarithme et de l'exponentielle, et laisser, avec les fonctions circulaires, tout ce qui en porte le nom et en a l'importance dans les applications.

La réduction de l'intégrale ultra-elliptique la plus générale,

$$\int F[x, \sqrt{\varphi(x)}]\,dx,$$

aux types des trois espèces précède l'étude des fonctions $\sin x$ et $\cos x$. Comme on voit, de suite, que les deux cas où le degré k du polynome $\varphi(x)$ est $= 2n-1$ ou $= 2n$ se ramènent toujours l'un à l'autre, celui où $k = 2$ (fonctions circulaires) se réduit à celui où $k = 1$; ce dernier conduisant à une différentielle rationnelle, par une substitution évidente, on aperçoit, en somme, que les intégrales circulaires sont exprimables au moyen des fonctions rationnelles, radicales et logarithmiques, et que leur étude revient aussi à celle de fonctions connues.

Le sujet principal du Chapitre VII est le développement des fonctions circulaires, des fonctions unipériodiques polarisées, pour parler plus exactement, en séries de fractions simples, puis en produits infinis. La méthode qui fournit les développements du premier genre est, sauf la complication résultant de la présence de *séries* de fractions simples au lieu de *sommes* de pareilles fractions, identique à celle qui, dans le Chapitre II, avait procuré une décomposition analogue pour une fraction rationnelle quelconque. Une intégration, suivie d'un passage des logarithmes aux nombres, conduit ensuite aux produits infinis. Le premier paragraphe mérite une mention toute spéciale. Le plan servant à la notation graphique de la variable x, d'une fonction unipériodique, peut être découpé en bandes égales, à bords rectilignes tous parallèles, dans une seule desquelles il suffit d'étudier la fonction. Une direction *polaire* conduit à l'infini, parallèlement au bord des bandes; elle est *boréale* ou *australe* suivant qu'on s'éloigne dans un sens ou dans l'autre. La fonction est alors dite *polarisée* si elle a des limites $u+$, $u-$ (ou bien est infinie) quand x s'éloigne indéfiniment dans les directions polaires, boréales et australes, respectivement. Les fonctions pourvues de ce caractère jouissent de propriétés tout à fait semblables à celles des fonctions bipériodiques, et leur étude est la meilleure préparation à celle de ces dernières. La recherche des développements en question conduit aux fonctions

$$\xi_i(x, \Pi) = \sum_{m=-k}^{m=+k} \frac{1}{(x - m\Pi)^i}, \qquad (k = \infty),$$

et

$$o(x, \Pi) = \ldots \left(1 + \frac{x}{\Pi}\right) x \left(1 - \frac{x}{\Pi}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{m\Pi}\right) \cdots$$
$$= x e^{\int_0^x \left[\xi_1(x, \Pi) - \frac{1}{x}\right] dx},$$

qui, toutes, sont unipériodiques et polarisées. Enfin, on trouve, presque immédiatement,

$$\cot x = \xi_1(x, \Pi), \quad \frac{1}{\sin^2 x} = \xi_2(x, \Pi), \quad \ldots, \quad \sin x = o(x, \Pi),$$

. . . .

Un dernier paragraphe de deux pages fait connaître le résultat très intéressant de l'intégration d'une fonction unipériodique polarisée quelconque.

V.

Une théorie sommaire des fonctions elliptiques, élargie bientôt jusqu'à embrasser toutes les fonctions bipériodiques méromorphes, forme la matière des Chapitres VIII à XII. Pour point de départ, M. Méray reprend l'intégrale

$$x = \int \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}},$$

ou $\varphi(u)$ est un polynome du troisième ou du quatrième degré en u. L'inversion, faite ici d'une manière tout à fait rigoureuse, fournit une fonction de x, indéfiniment méromorphe, que l'auteur désigne par $E(x)$ lorsque le degré de $\varphi(u)$ est 4, par $E_\infty(x)$ lorsqu'il est 3. Ces fonctions sont bipériodiques, et je signale tout spécialement l'élégante démonstration du fait que le rapport des périodes est imaginaire, c'est-à-dire qu'il y a *effectivement* deux périodes.

L'équation en x

$$E(x) = u$$

a des racines distinctes dans chaque parallélogramme élémentaire, sauf le cas où u a l'une des quatre valeurs a, b, c, d, racines de l'équation $\varphi(u) = 0$, cas où les deux racines sont confondues. Ces quatre quantités a, b, c, d, qui jouent un grand rôle dans la théorie, sont ce que l'auteur appelle les valeurs *cardinales* de $E(x)$ [pour $E_\infty(x)$, l'une d'elles peut être considérée comme étant infinie].

L'existence de fonctions bipériodiques méromorphes ayant été ainsi établie, M. Méray étudie leurs propriétés générales rattachées à l'hypothèse de la double périodicité. Pour arriver à la notion capitale de l'*ordre* d'une fonction bipériodique, il ne passe pas par la considération des infinis, des résidus, etc.; il montre simplement, en s'appuyant sur la théorie des fonctions implicites, que toute variation de la quantité u dans l'équation

$$f(x) = u$$

laisse invariable la somme des degrés de multiplicité des racines x qui sont contenues dans le parallélogramme des périodes. L'emploi de ces moyens si simples le conduit même au célèbre théorème de M. Hermite formulant la nullité de la somme des résidus, proposition qu'on avait toujours rattachée à la considération d'une intégrale définie.

Dans un Chapitre spécial sont traitées, pour les fonctions bipériodiques, et cela par une méthode absolument identique, les questions résolues au Chapitre VII pour les fonctions unipériodiques polarisées. Ici, les éléments simples faisant pendant aux fonctions $\xi_i(x)$ sont les fonctions

$$\Xi_i(x) = \lim \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - m\Pi - n\Omega)^i},$$

sommes de séries de fractions simples quadruplement infinies. Pour $i > 2$, ces fonctions sont parfaitement définies; mais, pour $i = 1$ ou $= 2$, la limite de la somme dépend du mode de sommation. En particulier, on obtient ainsi une infinité de fonctions $\Xi_1(x)$. Le rôle de la fonction $o(x)$ du Chapitre VII est joué ici par une infinité de fonctions $O(x)$ liées chacune à une fonction $\Xi_1(x)$ par la même relation

$$O(x) = xe \int_0^x \left[\Xi_1(x) - \frac{1}{x}\right] dx.$$

Parmi les fonctions $\Xi_1(x)$, $O(x)$, se trouvent les fonctions ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$, ${}^{(\Pi)}O(x)$, qui admettent la période Π sans être polarisées, ni bipériodiques. Au fond, la dernière n'est autre chose que la fonction $\theta_1(x)$ de Briot et Bouquet.

Après ces généralités, M. Méray passe aux points saillants de la théorie des fonctions bipériodiques du second ordre, lesquelles ne diffèrent pas des fonctions $E(x)$ et $E_\infty(x)$. Dans sa démonstration de la formule générale d'addition, il fait jouer un rôle important et intéressant à l'irréductibilité de l'équation différentielle. Puis il expose une simple ébauche du problème de la transformation pour s'attacher seulement au cas où il la dit *primaire*. Une transformation est primaire lorsque les deux fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$ sont liées homographiquement. On voit facilement qu'on doit avoir alors

$$f_1(x) = f(x + \Gamma),$$

Γ ayant une des quatre valeurs $0, \frac{\Pi}{2}, \frac{\Omega}{2}, \frac{\Pi+\Omega}{2}$, et Π, Ω désignant les périodes élémentaires communes aux deux fonctions. Ceci conduit à deux relations importantes, l'une et l'autre de la forme

$$\alpha f(x) f\left(x - \frac{\Pi}{2}\right) + \beta\left[f(x) + f\left(x + \frac{\Pi}{2}\right)\right] + \gamma = 0,$$

où les constantes α, β, γ sont données en fonction des valeurs cardinales a, b, c, d par les équations linéaires

$$\begin{cases} ab\alpha + (a+b)\beta + \gamma = 0, \\ cd\alpha + (c+d)\beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

C'est en cherchant ensuite les fonctions du second ordre, pour lesquelles la transformation primaire relative à Ω prend la forme de simplicité maxima

$$f(x) + f\left(x + \frac{\Omega}{2}\right) = 0,$$

que M. Méray arrive enfin à la fonction elliptique canonique de Jacobi $\lambda(x)$ ou $\mathrm{sn}(x)$, puis à $\mathrm{cn}(x)$, $\mathrm{dn}(x)$, $\mathrm{tn}(x)$, dont les propriétés particulières ne sont plus que des corollaires faciles de la théorie générale.

Je suis forcé d'exprimer encore un regret, celui que M. Méray n'ait pas songé à parler aussi des fonctions canoniques de

M. Weierstrass. On tend de plus en plus à substituer à celles de Jacobi ces dernières, qui sont beaucoup plus commodes, et tous les Traités récents sur les fonctions elliptiques, ceux en particulier de MM. de Sparre, Halphen, Tannery et Molk, procèdent presque exclusivement ainsi. Il semble donc que, dans un livre de l'importance de celui dont je parle, il eût été bon, ne fût-ce qu'à titre de renseignement, de faire connaître, au moins à grands traits, des notations dont l'usage est en passe de devenir courant. Mais je compte peut-être encore une fois sans l'exiguïté de l'espace dont M. Méray pouvait disposer.

Le Chapitre XIII, le dernier du Volume, contient un précis très condensé de la théorie des fonctions $B(p, q)$ et $\Gamma(p)$ où l'on retrouve les soins et la méthode facile auxquels l'auteur nous a habitués.

Cet examen rapide montre que cette deuxième Partie de l'œuvre de M. Méray ne le cède en rien à la première. Il me semble fâcheux que toutes deux n'aient pas été publiées en même temps, car celle-ci aurait beaucoup gagné à être illustrée et expliquée par celle-là. En lisant le Volume récent, j'ai dû revenir souvent au premier, et alors seulement j'ai senti l'importance de certains détails, que leur utilité dans le second peut seule rendre tout à fait visible.

Je termine en conseillant plus vivement encore la lecture des *Leçons* de M. Méray à tous ceux que les Mathématiques intéressent; elles contiennent des aperçus originaux, d'une grande hauteur et d'une grande netteté, sur toutes les questions vitales de l'Analyse générale et je ne connais que fort peu d'ouvrages qui soient aussi bien ordonnés, aussi logiques, aussi abondamment nourris de grandes et belles conceptions.

C. Bourlet.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1406.

(1882, p. 336.)

0, 1, 6 *sont-ils les seuls nombres triangulaires dont les carrés soient triangulaires ?* (Lionnet.)

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Le problème revient à la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$(1)\qquad \frac{x^2(x+1)^2}{4} = \frac{y(y+1)}{2},$$

ou

$$2y^2 + 2y - x^2(x+1)^2 = 0.$$

On en tire

$$y = -\frac{1 \pm \sqrt{1 + 2x^2(x+1)^2}}{2},$$

et, en posant $x(x+1) = v$, la question est ramenée à la résolution de l'équation bien connue

$$1 + 2v^2 = u^2 \qquad \text{ou} \qquad u^2 - 2v^2 = 1.$$

Celle-ci admet pour solutions les valeurs

$$u = 1,\ 3,\ 17,\ 99,\ 577,\ 3363,\ 19601,\ 114243,\ \ldots,$$
$$v = 0,\ 2,\ 12,\ 70,\ 408,\ 2378,\ 13860,\ 80782,\ \ldots.$$

dont la loi de récurrence est donnée par les formules

$$u_{n+1} = 6u_n - u_{n-1},$$
$$v_{n+1} = 6v_n - v_{n-1}.$$

Voir, au sujet des équations $u^2 - 2v^2 = \pm 1$, par exemple : *N. A.*, quest. 953, A. Laisant, solution par Moret-Blanc, 1872, p. 173 ; quest. 1338, Lionnet, 1881, p. 373 ; *N. C.*, 1878, p. 166-167 ; quest. 233, Ph. Breton, solutions, 1877, p. 194, et 1879, p. 285, E. Catalan ; quest. 89, Ed. Lucas ; *J. E.*, 1884, p. 15-19, G. de Longchamps ; *Mathesis*, quest. 282, de Rocquigny, 1886, p. 162 ; *J. S.*, quest. 360, E. Lemoine, solution, 1893, p. 23, E. Catalan ; quest. 87, S. Realis, solution, 1893, p. 117-120, H. Brocard, et p. 139-140, Boutin ; *J. E.*, 1894, exerc. 323, Boutin, etc.

Les valeurs de u ont une corrélation assez curieuse avec celles de x dans l'équation

$$(2)\qquad x^2 - 2y^2 = -1.$$

En effet, on a vu (*loc. cit., J. S.*, 1893, p. 118) que les valeurs de x ont pour expressions

$$1,\ 7,\ 41,\ 239,\ 1393,\ 8119,\ 47321,\ \ldots,$$

avec la condition

$$x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}.$$

Si on les additionne successivement à partir de la première, on aura

$$1,\ 8,\ 49,\ 288,\ 1681,\ 9800,\ \ldots,$$

sur lesquelles on reconnaît, alternativement, des nombres carrés et des nombres de la forme $K^2 - 1$. Or, précisément, on trouve ainsi

$$8 = 3^2 - 1, \qquad 288 = 17^2 - 1, \qquad 9800 = 99^2 - 1, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire les nombres 3, 17, 99, ... représentant les valeurs de u. Ainsi, ces dernières sont alternativement de la forme $k^2 - 1$, $l^2 + 1$. Si on les sépare en deux groupes, on a également entre les valeurs successives de k ou de l la relation de récurrence

$$k_{n+1} = 6k_n - k_{n-1},$$

comme on pourra le vérifier sur les séries

$$k \ldots\ldots \quad 2,\ 10,\ 58,\ 338,\ 1970,\ 11482,\ \ldots$$

et

$$l \ldots\ldots \quad 0,\ 4,\ 24,\ 140,\ 816,\ 4756,\ \ldots.$$

Toutes ces relations ont ici leur utilité, parce qu'elles facilitent les vérifications et qu'elles dispensent de passer par la formation des carrés v^2 et l'extraction de la racine carrée des nombres $2v^2 + 1$.

L'équation (1) est, en réalité, de la forme

$$\frac{y(y+1)}{2} = t^2,$$

ce qui revient à dire qu'il faudrait, au préalable, chercher les nombres qui sont à la fois triangulaires et carrés, question déjà ancienne, car elle est traitée, avec beaucoup d'autres analogues, dans l'*Algèbre* d'Euler (*N. C.*, 1877, p. 194, remarque de S. Realis).

Or, nous avons, dans ce qui précède, les éléments de la solution de cette question, car les nombres à la fois triangulaires et carrés ont pour expressions

$$1,\ 36,\ 1225,\ 41616,\ \ldots,$$

carrés de

$$1,\ 6,\ 35,\ 204,\ 1189,\ 6930,\ 40391,\ \ldots,$$

c'est-à-dire des valeurs de $\frac{v}{2}$.

Il resterait donc, parmi ces valeurs de $\frac{v}{2}$, à chercher celles qui sont triangulaires, c'est-à-dire de la forme $\frac{x^2+x}{2}$, ou, ce qui revient au même, à résoudre l'équation $v = x^2 + x$. On y parviendra aisément sans avoir à décomposer v en ses facteurs premiers. Il suffira, en effet, d'extraire la racine carrée de v et de constater si le reste de l'opération donne le même nombre que la racine, par analogie avec ce qui a été fait pour la résolution de l'équation (2) (*loc. cit.*, *J. S.*, 1893, p. 117).

Cette méthode est exempte de tâtonnements, tandis que la détermination des facteurs et leur groupement en produits de deux nombres consécutifs seraient certainement beaucoup plus laborieux.

Mais si cette recherche est rendue relativement facile, on ne peut dire qu'elle soit aussi fructueuse. Elle réussit, il est vrai, pour les trois premières valeurs de v, données dans l'énoncé, puisque $0 = 0^2 + 0$, $2 = 1^2 + 1$, $12 = 3^2 + 3$, mais elle a échoué pour les valeurs suivantes, au moins jusqu'au 15^e terme.

Il nous paraît fort possible que le problème n'admette pas d'autres solutions.

Question 1554.

(1885, p. 535.)

Si x, y, z sont trois nombres positifs dont la somme est égale à l'unité, on a

$$(1-x)(1-y)(1-z) < 8xyz.$$

(Wolstenholme.)

SOLUTION

Par M. Gallucci.

On a

$$\begin{aligned}(1-x)(1-y)(1-z) &= 1-(x+y+z)+yz+zx+xy-xyz\\ &= yz+zx+xy-xyz\\ &= xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right).\end{aligned}$$

Or, on sait que, si la somme de plusieurs nombres est constante, la somme des inverses est un minimum lorsque ces nombres sont égaux entre eux ; donc

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqq 9,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 \geqq 8, \qquad xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right) \geqq 8xyz,$$

$$(1-x)(1-y)(1-z) \geqq 8xyz,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Si x, y, z sont trois nombres positifs dont la somme est $= a$, on a

$$\left(\frac{1}{2}a - x\right)\left(\frac{1}{2}a - y\right)\left(\frac{1}{2}a - z\right) \geqq \frac{1}{8}xyz.$$

Il faut distinguer deux cas : 1° lorsque les facteurs du premier membre sont tous les trois positifs; 2° lorsqu'un seul d'eux est négatif (il n'y a pas d'autre cas possible). Dans le second cas, on a évidemment

$$\left(\frac{1}{2}a - x\right)\left(\frac{1}{2}a - y\right)\left(\frac{1}{2}a - z\right) < \frac{1}{8}xyz,$$

car le premier membre est une quantité négative; le lecteur pourra aisément démontrer le premier cas.

La question 1554 peut donc être complétée ainsi : Si x, y, z sont trois nombres positifs dont la somme est $= 1$, on a

$$8\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) \leqq xyz \leqq \frac{1}{8}(1-x)(1-y)(1-z).$$

Question 1635.

(1892, p. 30*.)

D'un point quelconque M *du plan d'une lemniscate de Bernoulli, de centre* O, *on mène les tangentes* MT_1, MT_2, MT_3, ... *à la courbe et l'on abaisse les normales* MN_1, MN_2, MN_3, ... *Montrer que l'on a la relation*

$$OT_1 . OT_2 . OT_3 \ldots = ON_1 . ON_2 . ON_3 \ldots.$$

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. ERNEST FOUCART.

Soit

$$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$$

l'équation de la lemniscate, ou en coordonnées polaires

$$\rho^2=a^2\cos 2\omega.$$

Les points de contact des tangentes issues du point $M(x_1, y_1)$ sont sur la courbe précédente et sur la cubique

$$\begin{aligned}&x_1(2x^2+2y^2-a^2)x\\&\quad+y_1(2x^2+2y^2+a^2)y-a^2(x^2-y^2)=0.\end{aligned}$$

En tenant compte de l'équation de la lemniscate, on a

$$x=\rho\cos\omega=\rho\frac{\sqrt{a^2+\rho^2}}{a\sqrt{2}},\qquad y=\rho\sin\omega=\rho\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{a\sqrt{2}}.$$

L'équation aux ρ des points T_1, T_2, T_3, ... est donc

$$x_1(2\rho^2-a^2)\sqrt{a^2+\rho^2}+y_1(2\rho^2+a^2)\sqrt{a^2-\rho^2}\,a\rho^3\sqrt{2}=0.$$

Faisant disparaître les radicaux, et ordonnant par rapport à ρ,

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&[(4x_1^2-4y_1^2-2a^2)^2+64x_1^2y_1^2]\rho^{12}+\ldots\\&\qquad\qquad+a^{12}(x_1^2-y_1^2)^2=0.\end{aligned}\right.$$

Les pieds des normales issues de M sont sur la courbe

$$(x-x_1)(2x^2+2y^2+a^2)y=(y-y_1)(2x^2+2y^2-a^2)x.$$

L'équation aux ρ des points N_1, N_2, N_3, ... s'obtient comme la précédente; c'est

$$\begin{aligned}&\rho a\sqrt{2}\sqrt{a^4-\rho^4}-x_1(2\rho^2+a^2)\sqrt{a^2-\rho^2}\\&\qquad\qquad+y_1(2\rho^2-a^2)\sqrt{a^2+\rho^2}=0,\end{aligned}$$

et, en ordonnant,

$$(2)\quad[(4x_1^2-4y_1^2-2a^2)^2+64x_1^2y_1^2]\rho^{12}+\ldots+a^{12}(x_1^2-y_1^2)^2.$$

La comparaison des égalités (1) et (2) donne la relation à établir.

EXERCICES PRÉPARATOIRES A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION.

FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

Licence ès Sciences mathématiques.

Application du Calcul infinitésimal à la Géométrie. — On donne le cylindre défini par les équations

$$x = \mathrm{R}\cos u, \qquad y = \mathrm{R}\sin u, \qquad z = v,$$

où u et v sont des variables indépendantes; à chaque point M de ce cylindre, on fait correspondre une sphère ayant pour centre ce point M et pour rayon une fonction donnée $\rho(u, v)$ des deux variables.

1° Déterminer les deux points caractéristiques de chaque sphère;

2° A quelle condition doit être assujettie la fonction ρ pour que les deux points caractéristiques d'une sphère quelconque soient confondus en un même point?

3° On joint ce point au centre de la sphère correspondante; on obtient ainsi une congruence de droites. Déterminer les courbes situées sur le cylindre et dont chaque tangente appartient à la congruence précédente.

Agrégation des Sciences mathématiques.

Analyse. — I. On considère la parabole $y^2 = 4x$ et la podaire de cette courbe par rapport au point $x = \alpha$, $y = 2$.

1° Trouver, en appliquant le théorème d'Abel et sous forme réelle, les conditions nécessaires et suffisantes pour que trois points de la podaire soient en ligne droite.

Déterminer les points d'inflexion, et étudier la réalité de ces points.

2° Trouver la condition pour que six points de la podaire soient sur une même conique; déterminer les points où la conique osculatrice a un contact du cinquième ordre; déterminer les systèmes de coniques osculatrices en deux points.

Discuter les problèmes précédents en examinant les différentes valeurs de α.

II. On considère la courbe C représentée par l'équation

$$(x^2+4y^2-8)^3-16x^2y^2(x^2+4y^2-6)=0.$$

1° Construire la courbe et déterminer son genre.

2° Démontrer que le nombre des conditions nécessaires et suffisantes pour que $6q$ points de C soient sur une même courbe C_q d'ordre q ne passant par aucun point singulier est inférieur à 10 si q est plus petit que 4, et égal à 10 si q est égal ou supérieur à 4. Chercher ces conditions.

3° Examiner le cas où la courbe C_q passe par un ou plusieurs points singuliers.

4° Par $6q-\lambda\mu$ points non singuliers donnés sur la courbe C, faire passer une courbe C_q de degré $q>3$ qui ait en λ points à déterminer un contact d'ordre $\mu-1$ avec la courbe C, μ points d'intersection étant confondus en chacun des λ points à trouver.

Examiner successivement les trois cas $\lambda>10$, $\lambda=10$, $\lambda<10$.

Dans les deux premiers cas, $\lambda \geqq 10$, on démontrera que, si par les $6q - \lambda\mu$ points donnés et par les $\lambda(\mu - 1)$ points de contact de $\mu - 1$ courbes solutions, on fait passer une courbe de degré q, les λ autres points où elle rencontre la courbe proposée sont aussi sur une courbe solution.

5° Trouver une cubique qui, en tout point où elle rencontre la courbe C, ait avec elle un contact du premier ordre.

Problème d'élémentaires. — On considère un cercle fixe et les triangles ABC conjugués par rapport à ce cercle.

1° Démontrer que le cercle circonscrit à ces triangles et les cercles des neuf points sont orthogonaux à des cercles fixes.

2° On suppose que les côtés AC et AB passent respectivement par des points fixes B_1 et C_1; déterminer le lieu du sommet A; discuter la nature de ce lieu lorsque, l'un des points B_1 ou C_1 restant fixe, l'autre varie d'une manière quelconque dans le plan.

3° On considère le cas particulier où les points B_1 et C_1 sont situés sur une même tangente au cercle donné; démontrer que le triangle ABC reste circonscrit à un triangle T_1 et inscrit dans un autre triangle T_2, et de plus qu'il est homologique à chacun de ces triangles. Déterminer le lieu du centre d'homologie et l'enveloppe de l'axe d'homologie du triangle ABC et de chacun des triangles T_1 et T_2.

Problème de spéciales. — On donne un ellipsoïde E et une sphère S de centre ω; on considère un plan variable P assujetti à cette condition que son pôle p par rapport à S soit situé sur son diamètre par rapport à E.

1° Lieu du pôle p du plan P, et enveloppe de ce plan.

2° Démontrer que la courbe C, lieu du point p, passe par les sommets du tétraèdre conjugué commun à l'ellipsoïde et à la sphère; réciproquement, tout point de cette courbe est le sommet d'un tétraèdre conjugué à l'ellipsoïde et à une sphère S' de centre ω et de rayon convenablement choisi.

3° On fait varier le centre ω de la sphère S sur une droite Δ, et l'on choisit de plus le rayon de cette surface de façon qu'elle passe par le centre de l'ellipsoïde; déterminer la surface Σ lieu de la courbe C et l'enveloppe du plan P. Pour quelles positions de la droite Δ la surface Σ est-elle de révolution?

4° On considère un point M et les plans polaires de ce point par rapport à toutes les quadriques passant par la courbe C relative à une sphère fixe S; démontrer qu'ils passent par un même point M'; déterminer le lieu de ce point M' lorsque M décrit une droite D.

5° On suppose, en particulier, que la droite D passe par le centre de l'ellipsoïde et est située dans le plan osculateur de la courbe C en ce point; montrer que le lieu de M' est une droite D', et trouver le lieu de cette dernière droite lorsque D varie en satisfaisant aux conditions indiquées précédemment.

QUESTIONS.

1711. Quand on déroule une épicycloïde sur la tangente au sommet, le lieu des extrémités du rayon de courbure est une conique. (RICCATI).

1712. On considère une série d'hyperboles équilatères homothétiques par rapport à leur centre commun O, et dont l'axe transverse commun est OX. Dans chacune d'elles, on trace un rayon OM qui détache un secteur d'aire donnée à partir de OX. Trouver le lieu du point M. (C.-A. LAISANT).

1713. Trouver par l'analyse le lieu du foyer mobile d'une conique d'excentricité donnée dont l'autre foyer est fixe et dont la directrice correspondant à ce foyer enveloppe une courbe donnée. Vérifier le résultat trouvé par la Géométrie.

(B. NIEWENGLOWSKI).

1714. Étant donnés, dans un plan, quatre couples de points (A, A_1); (B, B_1); (C, C_1); (D, D_1), tels qu'aucun des quadrilatères analogues au quadrilatère $A'A_1BB_1$, ne soit inscriptible, prouver qu'il existe dans ce plan deux couples de points (X, Y), tels que chacun des quatre quadrilatères analogues au quadrilatère AA_1XY soit inscriptible.

(X. ANTOMARI).

1715. On appelle *nombres de Möbius* les nombres $\mu(n)$ définis de la manière suivante :

$$\mu(1) = 1.$$

$\mu(n) = 0$ quand n est divisible par un carré autre que l'unité.

$\mu(n) = +1$ quand n n'a que des facteurs premiers différents en nombre pair.

$\mu(n) = -1$ quand n n'a que des facteurs premiers différents en nombre impair.

Dans cet énoncé, l'unité n'est pas comptée comme facteur.

Montrer que la somme

$$\mu^2(1) + \mu^2(2) + \ldots + \mu^2(n)$$

est égale à $\frac{6}{\pi^2} n + \delta$, expression où la valeur absolue de δ est inférieure à $3\sqrt{n}$. (J. FRANEL.)

1716. On considère une série de coniques semblables qui ont même corde normale NN' (N et N' sont des points fixes). Chercher l'enveloppe de ces coniques et le lieu de l'extrémité de la corde de courbure au point N. (CL. SERVAIS.)

1717. Le lieu des milieux des cordes d'un cercle ayant une projection donnée sur un diamètre fixe est une quartique. Discuter cette courbe ; la construire, en étant donnés deux points, et donner la construction de la tangente en un point quelconque. (GALLUCCI.)

ERRATA AUX TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page 405, log tang 33°31′20″, *au lieu de* 9,8211438 *lisez* 9,8211488.

ERRATA.

3e série, t. XIV, 1895, p. 385; *ajoutez*, après le titre *Sur un problème de Géométrie: voir* même tome, p. 49.

Même tome, p. 442, *ajoutez* après le même titre *: voir* même tome, p. 385.

RECTIFICATION.

3e série, t. XIV, 1895, p. 39*. Deux questions distinctes ont été confondues sous le n° 1704. Il y a lieu d'attribuer le n° 1704 *bis* à la seconde, qui commence par les mots : « *Démontrer que, etc....* ».

CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1896.

Sujet.

Soit $F(x)$ *un polynome du quatrième degré, dont les quatre racines* a, b, c, d *sont distinctes; on divise le carré de la dérivée par* $F(x)$. *Si l'on désigne par* Q *et* R *le quotient et le reste de cette division, on a*

$$F'^2(x) = F(x)Q + R.$$

1° *Prouver que* Q *est carré parfait.*

2° *Prouver que le polynome*

$$F(x) + \rho R(x)$$

est carré parfait pour trois valeurs différentes de ρ.

3° *Trouver tous les polynomes du quatrième degré* $G(x)$ *qui sont tels que le polynome*

$$F(x) + \rho G(x)$$

soit carré parfait pour trois valeurs distinctes de ρ.

4° *En général, le reste* R *est du troisième degré; pour qu'il s'abaisse au second, il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie :*

$$F'(a) + F'(b) + F'(c) + F'(d) = 0.$$

Le reste R *est alors carré parfait; il ne diffère de* Q *que par un facteur constant.*

Montrer que ce cas est caractérisé par ce fait que l'addition à $F(x)$ *d'une constante convenable rend le polynome carré parfait. La réciproque est-elle vraie?*

Dans ce cas, les paragraphes 2° *et* 3° *subissent-ils quelque modification?*

Conditions.

Le concours est ouvert *exclusivement* aux abonnés des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

1° A un crédit de 100fr d'Ouvrages à choisir dans le catalogue de MM. Gauthier-Villars et fils;
2° A la publication du Mémoire;
3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la rédaction AVANT LE 15 OCTOBRE 1896, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonyme. Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur et la justification de sa qualité d'abonné. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir du 15 octobre, et après le jugement prononcé.

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mémoires. Mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du reste que l'insertion d'un travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 1er janvier 1897, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1° De partager les récompenses ci-dessus mentionnées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite;

2° De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient reportés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire immédiatement connaître s'il désire que la publication de son Travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

LES RÉDACTEURS.

ERRATA.

3e série, t. XV, 1896, p. 55, question 1707 : dans les quatre dernières lignes du premier alinéa, *permutez* les lettres M_1 et M'.

[A3e]

SUR LES CONDITIONS SOUS LESQUELLES UNE ÉQUATION N'ADMET QUE DES RACINES A PARTIE RÉELLE NÉGATIVE;

PAR M. A. HURWITZ (de Zurich) (1).
(Traduit par M. L. LAUGEL.)

I.

A l'instigation de mon honoré collègue, M. A. Stodola, je me suis occupé il y a quelque temps de la question de reconnaître quand une équation de degré n à coefficients réels

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

n'admet que des racines dont la partie réelle est négative.

Bien que la résolution de cette question, d'après les méthodes de Sturm, Liouville, Cauchy et Hermite, ne présente aucune difficulté de principe, néanmoins, je prends ici la liberté d'exposer le résultat auquel je suis arrivé, parce que, sous sa forme simple et commode dans les applications, il offre peut-être un certain intérêt (2).

(1) *Mathematische Annalen*, t. XLVI.

(2) M. Stodola se sert de mon résultat dans son Mémoire *Sur le règlement des turbines* (*Schweizer Bau-Zeitung*, t. XXIII, nos 17, 18), Mémoire dont les résultats ont trouvé une application couronnée du plus remarquable succès à l'Établissement des turbines à Davos (Engadine). La question, comme me l'a fait remarquer M. Stodola, avait été proposée dans la *Natural Philosophy* de Thomson (Lord Kelvin) et Tait (1886, Partie I, p. 390) et sa solution y est indiquée comme étant très désirable. 2e édit., Partie I, p. 390; 1890. Refait et augmenté par les auteurs.

L'exposition du résultat me donne en même temps l'occasion de présenter la méthode d'Hermite-Jacobi sous une forme qui peut être généralisée à divers points de vue.

On peut évidemment, ce que nous ferons ici, s'en tenir au cas où le coefficient a_0 est positif. En effet, s'il en était autrement, on pourrait multiplier tout le premier membre de l'équation par le facteur — 1.

Formons maintenant le déterminant

$$(1) \qquad \Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2\lambda-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2\lambda-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2\lambda-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_\lambda \end{vmatrix}$$

d'après la méthode qui consiste à augmenter successivement les indices de deux unités dans la première ligne horizontale et à les faire diminuer toujours successivement d'une unité dans chaque colonne verticale. On devra aussi poser en général

$$a_k = 0,$$

lorsque l'indice k est négatif ou plus grand que n.

Ceci posé, on a le théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$(2) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

où le coefficient a_0 est supposé positif, n'admette que des racines à partie réelle négative est que les valeurs des déterminants

$$(3) \qquad \Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2, \ \Delta_3, \ \dots, \ \Delta_n$$

soient toutes positives.

A ce théorème ajoutons la remarque suivante. Le déterminant Δ_n, comme c'est facile à reconnaître en le développant suivant les éléments de la dernière colonne verticale, est égal à

$$a_n \Delta_{n-1}.$$

Ainsi la condition que Δ_{n-1} et Δ_n doivent être positifs est équivalente à cette autre que Δ_{n-1} et a_n doivent être positifs.

Le théorème reste donc valable lorsque l'on remplace Δ_n par a_n.

Voici encore une autre remarque :

Si l'on considère la suite de déterminants

$$(4) \qquad \Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \Delta_4, \quad \ldots,$$

les termes de cette suite s'évanouissent identiquement à partir du $(n+1)^{\text{ième}}$ inclus, c'est-à-dire pour des valeurs indéterminées de $a_0, a_1, \ldots, a_n$. En effet, les éléments de la dernière colonne verticale de Δ_λ sont tous nuls pour $\lambda > n$. Par conséquent, la condition du théorème peut encore s'exprimer en disant que les termes de la suite (4) qui ne s'évanouissent pas identiquement doivent être tous positifs. Ces termes, écrits tout au long, sont les suivants :

$$a_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

et, sans insister davantage, on en conclura aisément les conditions relatives à toute valeur particulière de n.

Par exemple, les conditions relatives à l'équation du quatrième degré ($n = 4$), sont :

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$a_4 > 0.$$

M. Stodola a remarqué qu'une condition *nécessaire* pour que l'équation (2) n'admette que des racines à partie réelle négative est que tous les coefficients a_0, a_1, ..., a_n soient positifs. En effet, lorsque la partie réelle de toutes les racines de l'équation (2) est négative, chaque facteur linéaire réel du premier membre de l'équation a la forme $x + p$ et chaque facteur réel quadratique la forme

$$(x + p_1)^2 + p_2^2 = x^2 + p'x + p'',$$

où p, p_1, p_2, p', p'' désignent des grandeurs positives. Mais comme le produit de fonctions entières à coefficients positifs a lui-même également tous ses coefficients positifs, le premier membre de l'équation (2) n'admettra donc que des coefficients positifs.

II.

Supposons que la fonction entière rationnelle $f(x)$, dont les coefficients peuvent tout d'abord admettre des valeurs complexes, ne s'évanouisse pour aucune valeur de x purement imaginaire. Désignons alors respectivement par N et P le nombre des zéros de $f(x)$ qui ont des parties réelles négatives et positives; on a

$$(5) \qquad \mathrm{N} + \mathrm{P} = n,$$

n désignant alors le degré de $f(x)$. Soit maintenant c une constante (complexe) quelconque et

$$(6) \qquad cf(x) = \rho e^{i\pi\varphi},$$

ρ désignant alors le module (*den absoluten Betrag*, la valeur absolue) et $\pi\varphi$ l'argument de $cf(x)$. L'angle φ varie d'une manière continue avec la valeur de x et diminue en particulier de

$$(7)\qquad N - P = \Delta$$

unités, lorsque x parcourt la succession de valeurs numériques imaginaires pures de $+i\infty$ à $-i\infty$. Ce fait se reconnaît de suite lorsqu'en faisant usage de la représentation géométrique habituelle des nombres complexes, on étudie la variation de l'argument de chaque facteur linéaire de $f(x)$. Maintenant, en vertu de (5) et (7), on a

$$(8)\qquad N = \frac{n+\Delta}{2}, \qquad P = \frac{n-\Delta}{2}.$$

La détermination de Δ sera alors ramenée de la manière que l'on sait, à celle d'un *indice de Cauchy* ([1]). Par indice d'nne grandeur R qui possède, en chaque point d'une ligne L parcourue dans un sens déterminé, une valeur réelle déterminée, l'on entendra le nombre formé comme il suit. On attribuera à chaque point de L où R devient infinie un des nombres 0, ou $+1$, ou -1, selon que R, en passant par le point en question, ne change pas de signe, ou bien passe d'une valeur négative à une valeur positive, ou bien d'une valeur positive à une valeur négative. L'indice de R relatif à la ligne L est alors la somme de tous les nombres ainsi attribués aux infinis de R. On admet ici tacitement que R ne change

---

([1]) *Journal de l'École Polytechnique*, XV^e Cahier; 1837. L'indice de Cauchy est renfermé comme cas particulier dans la notion introduite par Kronecker sous le nom de *caractéristique d'un système de fonctions* (*Monatsberichte der K. preuss. Acad. d. W.*; 1859).

son signe qu'en un nombre fini de points où elle devient infinie, et que $\frac{1}{R}$ est continue dans le domaine de ces points.

Ayant ainsi rappelé cette notion, soit z une variable réelle et

$$(9) \qquad cf(-iz) = U + iV,$$

U et V désignant des fonctions entières de z à coefficients réels. Si l'on pose maintenant

$$(10) \qquad \frac{V}{U} = R(z),$$

on a

$$(11) \qquad \varphi = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tang} R(z),$$

et il résulte de cette équation que Δ est identique à l'indice de $R(z)$ relatif à l'axe des z réels parcouru dans le sens des z croissants (axe que l'on doit regarder comme une ligne ou contour qui se ferme à l'infini).

Dans ce qui suit, je supposerai que $R(z)$ ne devient pas infinie pour $z = \infty$, ce qui est évidemment permis, puisque l'on peut disposer arbitrairement de la constante c.

III.

Prenons maintenant pour $R(z)$ une fonction rationnelle quelconque de z à coefficients réels et qui reste finie pour $z = \infty$.

L'indice de $R(z)$ (relatif à l'axe des nombres réels parcouru dans le sens des z croissants) peut, comme l'on sait, être déterminé par le *procédé de division* de *Sturm*, ou bien par la *méthode d'Hermite* au moyen de la représentation par une forme quadratique dont la *signature* est un nombre identique à l'indice cherché.

Par « signature » d'une forme quadratique à coefficients réels, j'entends, avec M. *Frobenius* (1), la différence entre le nombre des carrés positifs et des carrés négatifs qui se présentent dans la représentation de la forme par une somme de carrés de fonctions linéaires réelles, le nombre desdits carrés étant le plus petit possible.

On est conduit à cette méthode d'Hermite pour la détermination de l'indice de $R(z)$ de la manière suivante :

Si l'on désigne par

$$\Theta(z) = y_0 + y_1 z + y_2 z^2 + \ldots + y_{m-1} z^{m-1}$$

une fonction rationnelle entière de z dont les coefficients sont regardés comme des paramètres arbitraires, alors l'intégrale

$$(12) \qquad F_m = \frac{1}{2\pi i}\int R(z)[\Theta(z)]^2\, dz,$$

prise le long d'un contour curviligne renfermant tous les pôles de $R(z)$, représente une forme quadratique des paramètres $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$, qui, étant le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de $R(z)[\Theta(z)]^2$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{z}$, est facile à former (2). D'autre part, l'intégrale est égale à la somme

---

(1) *Sur la loi d'inertie des formes quadratiques* (*Sitzungberichte der Kgl. preuss. Acad. d. W.*; 1894).

(2) Au lieu de l'intégrale (12), on peut également arriver au même résultat en considérant l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int R(z)\frac{[\Theta(z)]^2}{(z-\alpha)^{2m}}\,dz$, prise autour du point $z = \alpha$, α désignant une valeur réelle pour laquelle $R(z)$ demeure fini. Relativement à la dernière intégrale, $z = \alpha$ joue le même rôle que $z = \infty$ par rapport à (12). En corrélation avec cette circonstance, nous remarquons ce fait évident que l'indice de

des résidus de $R(z)[\Theta(z)]^2$ correspondant aux pôles de $R(z)$.

Soit $z = a$ un pôle simple de $R(z)$ et

$$R(a+t) = \frac{c}{t} + c_1 + c_2 t + \ldots; \tag{13}$$

alors le résidu relatif à $z = a$ est

$$c[\Theta(a)]^2.$$

Lorsque a est réel, alors le pôle $z = a$ fournit à l'indice de $R(z)$ la contribution $+1$, ou -1 selon que c est respectivement positif ou négatif.

Lorsque a est imaginaire, si l'on désigne par $\bar{a}$ le pôle imaginaire conjugué de a, la somme des résidus relatifs à a et $\bar{a}$ est

$$c[\Theta(a)]^2 + \bar{c}[\Theta(a)]^2 = (P + iQ)^2 + (P - iQ)^2 = 2P^2 - 2Q^2,$$

où P et Q sont des fonctions linéaires réelles. De ceci résulte [d'abord sous l'hypothèse que $R(z)$ n'admet que des pôles simples] le théorème suivant :

Si l'on désigne par n le nombre des pôles de $R(z)$, *la forme quadratique* F_m *est représentable par une somme de n carrés, où, en outre, la différence entre le nombre des carrés positifs et celui des carrés négatifs est égale à l'indice de* $R(z)$.

Ce théorème est encore valable au cas où $R(z)$ admet des pôles d'ordre de multiplicité quelconque, et l'on doit alors entendre par n le nombre des pôles,

---

$R\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)$ est égal à l'indice de $R(z)$, lorsque a, b, c, d désignent des constantes réelles dont le déterminant $ad - bc$ est positif.

chacun d'eux comptant pour son ordre de multiplicité [1].

Pour démontrer ceci, soit $z=a$ un pôle de $R(z)$, d'ordre λ et soient

$$R(a+t)=\frac{c}{t^\lambda}+\frac{c_1}{t^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{c_{\lambda-1}}{t}+\ldots,$$
$$\theta(a+t)=\theta_0(a)+\theta_1(a)\,t+\theta_2(a)t^2+\ldots,$$

$\Theta_0(a)$, $\Theta_1(a)$, ... désignant des formes linéaires des paramètres $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$. Le résidu relatif à $z=a$ sera

$$c_{\lambda-1}\Theta_0^2+2c_{\lambda-2}\Theta_0\Theta_1+\ldots+c(2\Theta_0\Theta_{\lambda-1}+2\Theta_1\Theta_{\lambda-2}+\ldots).$$

Maintenant, selon que λ est pair ou impair, ce résidu peut s'écrire respectivement sous la forme

$$\Theta_0\Psi_0+\Theta_1\Psi_1+\ldots+\Theta_{\mu-1}\Psi_{\mu-1} \qquad [\lambda=2\mu],$$

ou sous la forme

$$\Theta_0\Psi_0+\Theta_1\Psi_1+\ldots+\Theta_{\mu-1}\Psi_{\mu-1}+c\Theta_\mu^2 \qquad [\lambda=2\mu+1],$$

Ψ_0, Ψ_1, ... désignant des fonctions linéaires des paramètres.

Si a est réel, les coefficients de Θ_0, Θ_1, ..., Ψ_0, Ψ_1, ... sont également réels et le résidu peut être amené à prendre la forme

$$\left[\tfrac{1}{2}(\Theta_0+\Psi_0)\right]^2-\left[\tfrac{1}{2}(\Theta_0-\Psi_0)\right]^2+\ldots+\left[\tfrac{1}{2}(\Theta_{\mu-1}+\Psi_{\mu-1})\right]^2$$
$$-\left[\tfrac{1}{2}(\Theta_{\mu-1}-\Psi_{\mu-1})\right]^2$$
$$(\lambda=2\mu),$$

---

(1) Kronecker, dans son Mémoire *Sur la Theorie de l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques* (*Monatsberichte der Kgl. preuss. Acad. d. W.*, 1881) a remarqué que les déductions relatives aux suites de Sturm restent encore légitimes, avec les modifications appropriées, lorsque les fonctions entières en question admettent des facteurs linéaires multiples.

ou

$$\left[\tfrac{1}{2}(\Theta_0+\Psi_0)\right]^2-\left[\tfrac{1}{2}(\Theta_0-\Psi_0)\right]^2+\ldots+\left[\tfrac{1}{2}(\Theta_{\mu-1}+\Psi_{\mu-1})\right]^2$$
$$-\left[\tfrac{1}{2}(\Theta_{\mu-1}-\Psi_{\mu-1})\right]^2+c\Theta_\mu^2$$
$$(\lambda=2\mu+1),$$

expressions où il se présente une somme de λ carrés de formes linéaires réelles.

Lorsque λ est pair, il se présente exactement autant de carrés positifs que de carrés négatifs; au contraire, lorsque λ est impair, il se présente un carré positif ou bien un carré négatif en plus, selon les cas respectifs où c est positif ou bien négatif. La discussion du cas où $z=a$ est complexe, a lieu d'une façon tout analogue, et l'on reconnaît ainsi que le théorème précédent est valable d'une manière générale.

IV.

Quand $m>n$, alors la forme quadratique F_m possède un déterminant qui s'évanouit, puisqu'elle est représentable par une somme de n carrés, et, par suite, qu'elle se réduit à une forme dépendant d'un nombre de combinaisons linéaires de $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ inférieur à m. Au contraire, le déterminant de la forme F_n est différent de zéro. On peut le démontrer, soit en prouvant l'identité de ce déterminant avec la résultante du numérateur et du dénominateur de la fonction rationnelle $R(z)$ écrite sous forme réduite (comparez § VI), soit en procédant comme il suit :

Si le déterminant de F_n s'évanouissait, l'on pourrait trouver des valeurs de $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ ne s'évanouissant pas toutes, et telles que

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_0},\quad \frac{\partial F_n}{\partial y_1},\quad \ldots,\quad \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}},$$

et que, par conséquent aussi les intégrales

$$(14)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int R(z)\,\Theta(z)\,z^{\lambda}\,dz \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n-1)$$

fussent toutes nulles.

Maintenant lorsque

$$(15)\qquad R(z)\,\Theta(z) = G(z) + R_1(z),$$

$G(z)$ désignant une fonction entière de z et

$$(16)\qquad R_1(z) = R(z)\,\Theta(z) - G(z) = \frac{k'}{z} + \frac{k''}{z^2} + \ldots$$

une fonction rationnelle s'évanouissant pour $z = \infty$, il est nécessaire, pour que ces intégrales s'annulent, que l'on ait

$$k' = k^{o} = \ldots = k^{(n)} = 0,$$

et, par conséquent, que $R_1(z)$ soit infiniment petit de l'ordre $n+1$ au moins pour $z=\infty$. Mais comme $R_1(z)$ ne peut devenir infini qu'en les pôles de $R(z)$, c'est-à-dire au plus n fois, il faudrait donc que $R_1(z)$ s'évanouisse identiquement; mais l'équation suivante, que l'on aurait alors

$$R(z)\,\Theta(z) = G(z),$$

est impossible, puisque $\Theta(z)$ est au plus de degré $(n-1)$ et que $R(z)$ possède n pôles.

V.

De ce qui précède, nous tirons alors le procédé suivant pour la détermination de l'indice de $R(z)$.

Soit

$$(17)\qquad R(z) = c + \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots$$

le développement de $R(z)$ dans le domaine de $z = \infty$.

Le facteur de $\frac{1}{z}$ dans le développement du produit de $R(z)$ par

$$(18) \qquad [\Theta(z)]^2 = \sum_{i,k} y_i y_k z^{i+k} \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

est alors

$$(19) \qquad F_m = \sum_{i,k} c_{i+k} y_i y_k \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

et le déterminant de la forme F_m se présente sous la forme

$$(20) \qquad D_m = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{m-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m-1} & c_m & \ldots & c_{2m-2} \end{vmatrix}.$$

Maintenant, dans la suite de déterminants

$$(21) \qquad D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad \ldots,$$

tous les termes sont, à partir de l'un d'entre eux D_{n+1} par exemple, égaux à zéro, tandis que D_n est différent de zéro. Alors n est le nombre des pôles de $R(z)$, et l'indice de $R(z)$ est égal à la *signature* de la forme F_n.

La signature de la forme F_n nous sera donnée dans chaque cas par l'examen des signes des déterminants non évanouissants de la suite $D_1, D_2, \ldots, D_n$ (¹).

Au cas où aucun de ces déterminants ne s'annule, F_n, comme l'on sait et ainsi qu'il est facile de le démontrer, peut être représenté sous la forme

$$F_n = D_1 u_0^2 + \frac{D_2}{D_1} u_1^2 + \ldots + \frac{D_n}{D_{n-1}} u_{n-1}^2,$$

(¹) FROBENIUS, *loc. cit.*, p. 410.

où u_i désigne une forme réelle linéaire de y_i, y_{i+1}, ..., y_{n-1}.

L'indice de $R(z)$ est donc alors égal à la différence entre le nombre des termes positifs et le nombre des termes négatifs de la suite

$$D_1, \quad \frac{D_2}{D_1}, \quad \frac{D_3}{D_2}, \quad \ldots, \quad \frac{D_n}{D_{n-1}}.$$

Ce cas se présente, en particulier, lorsque l'indice de $R(z)$ prend sa valeur maxima n. En effet, alors F_n est une forme définie positive et il en est de même de F_{n-1}, F_{n-2}, ..., F_1, car ces dernières formes prennent naissance lorsque l'on égale à zéro certains des paramètres y_0, y_1, ..., y_{n-1} de F_n. Mais le déterminant d'une forme positive est toujours positif.

L'on en conclut le théorème :

L'indice de R *prend toujours, et c'est le seul cas où ce fait a lieu, sa valeur maxima n, lorsque les déterminants* D_1, D_2, ..., D_n *sont positifs.*

VI.

Soit maintenant $R(z)$ donné sous la forme

$$(22) \qquad R(z) = \frac{b_0 z^\nu + b_1 z^{\nu-1} + \ldots + b_\nu}{a_0 z^\nu + a_1 z^{\nu-1} + \ldots + a_\nu},$$

le coefficient a_0 étant, par hypothèse, différent de zéro. Le degré ν du dénominateur de $R(z)$ est supérieur ou égal à n, selon que le numérateur et le dénominateur de $R(z)$ ont respectivement un diviseur commun ou non. L'on peut maintenant transformer le déterminant D_m (20), en un déterminant dont les éléments sont formés par les coefficients a_0, ..., a_ν, b_0, ..., b_ν. Cette transformation est praticable à l'aide du théorème suivant que l'on déduit aisément du théorème relatif à la multiplication des déterminants :

Soient

(23) $$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_m$$

des séries de puissances de z qui, par l'effet d'une multiplication par

(24) $$P = k + k_1 z + k_2 z^2 + \ldots$$

peuvent être transformées en de nouvelles séries de puissances

(25) $$P'_1, \quad P'_2, \quad \ldots, \quad P'_m,$$

et telles, par conséquent, que l'on ait en général

$$P'_m = PP_m.$$

Si l'on met à part alors dans chacune des séries respectives

$$\begin{array}{llll} P_1, & P_2, & \ldots, & P_m, \\ P'_1, & P'_2, & \ldots, & P'_m, \end{array}$$

les m premiers termes, et si l'on désigne respectivement par Δ_m, Δ'_m *les déterminants des m fonctions entières de z de degré* $(m - 1)$ *ainsi obtenues, l'on a*

(26) $$\Delta'_m = k^m \Delta_m,$$

J'appliquerai maintenant ce théorème au cas suivant :

Soit

$$\frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots} = c + c_0 z + c_1 z^2 + \ldots;$$

les séries (23) peuvent être prises comme il suit

$$P_1 = 1, \qquad P_2 = c + c_0 z + c_1 z^2 + \ldots,$$
$$P_{2\lambda+1} = z^\lambda P_1, \qquad P_{2\lambda+2} = z^\lambda P_2$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots),$$

tandis que la série (24) sera identifiée avec

$$P = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots$$

Les séries (25) seront alors

$$P'_1 = P, \qquad P'_2 = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$
$$P'_{2\lambda+1} = z^\lambda P'_1,$$
$$P'_{2\lambda+2} = z^\lambda P'_2,$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Si l'on remplace alors dans l'équation (26) l'indice m par $2m$, cette équation donnera la transformation désirée du déterminant D_m, et l'on a notamment

$$(27) \qquad a_0^{2m} D_m = R_m,$$

où R_m désigne le déterminant

$$(28) \qquad R_m = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{2m-1} \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_{2m-1} \\ 0 & a_0 & \ldots & a_{2m-2} \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{2m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_m \\ 0 & 0 & \ldots & b_m \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant s'évanouit certainement pourvu que $m > n$, puisqu'alors les éléments de la dernière colonne verticale sont tous nuls. Maintenant, pour arriver à la détermination de l'indice (et en même temps du nombre n des pôles) de la fonction rationnelle (22), on procédera comme il suit :

On formera la suite des déterminants

$$R_1, R_2, \ldots, R_\nu.$$

Lorsque R_n est le dernier terme de cette suite qui ne s'annule pas, n sera le nombre des pôles, ou, ce qui revient au même, le degré du dénominateur de $R(z)$, lorsque $R(z)$ est écrit sous forme réduite. L'indice de $R(z)$ sera alors fourni par l'examen des signes des termes non évanouissants dans la suite $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

VII.

En particulier, l'on obtient maintenant facilement le théorème énoncé au § I. Soit

$$(29) \qquad f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

une équation à coefficients réels. On aura alors

$$(30) \quad i^n f(-iz) = (a_0 z^n - a_2 z^{n-2} + \ldots) + i(a_1 z^{n-1} - a_3 z^{n-3} + \ldots),$$

et le nombre désigné par Δ au § II est l'indice de

$$(31) \qquad R(z) = \frac{a_1 z^{n-1} - a_3 z^{n-3} + \ldots}{a_0 z^n - a_2 z^{n-2} + \ldots}.$$

L'équation (29) a maintenant toujours, ainsi qu'il résulte de (8) au § II, des racines à parties réelles négatives au seul et unique cas où $\Delta = n$. Il s'ensuit que le numérateur et le dénominateur de $R(z)$ doivent être sans diviseur commun. En effet, s'il en était autrement, $R(z)$ devrait être représentable comme un quotient dont le dénominateur serait de degré $n' < n$ et l'indice de $R(z)$ serait au plus égal à n'.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (29) n'admette que des racines à partie réelle négative est par conséquent celle-ci : la forme

$$(32) \qquad F_n = \frac{1}{2\pi i} \int R(z) [\theta(z)]^2 \, dz$$

doit être une forme définie positive de $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$. Par suite de ce fait que $R(z)$ est une fonction impaire de z, F_n est décomposable en deux formes dont l'une ne renferme que les paramètres $y_0, y_2, y_4, \ldots$, et l'autre que les paramètres $y_1, y_3, y_5, \ldots$ Soit, en effet,

$$(33)\qquad H(z) = \frac{a_1 z^{\lambda-1} - a_3 z^{\lambda-2} + \ldots}{a_0 z^{\lambda} - a_2 z^{\lambda-1} + \ldots}$$

$\left(\lambda = \frac{n}{2}\right.$ ou $\frac{n+1}{2}$ selon que n est respectivement pair ou impair$\left.\right)$; on a évidemment

$$R(z) = z H(z^2).$$

Réunissons ensuite dans $\Theta(z)$ les termes à puissances paires et les termes à puissances impaires en posant par conséquent

$$\Theta(z) = \Theta_0(z^2) + z\Theta_1(z^2).$$

Si l'on introduit alors dans l'intégrale (32), $z^2 = \zeta$ comme nouvelle variable d'intégration et si ensuite on remplace de nouveau ζ par z, on trouvera la décomposition en question

$$(34)\qquad F_n = \frac{1}{2\pi i}\int H(z)\,[\Theta_0(z)]^2 dz + \frac{1}{2\pi i}\int z H(z)\,[\Theta_1(z)]^2 dz.$$

Le fait énoncé par cette formule, que l'indice de $R(z)$ est égal à la somme des indices de $H(z)$ et $zH(z)$, peut se déduire, ceci soit dit en passant, de la définition même de l'indice. Si l'on pose, en vertu de § V et § VI, la condition pour que F_n, ou, ce qui revient au même, pour que chacune des deux intégrales (34) représente une forme définie positive, on sera, après une transformation facile du déterminant que l'on doit former, conduit au théorème du § I.

VIII.

A l'aide de l'équation (8) du § II et de la méthode développée au § VI pour la détermination de l'indice d'une fonction rationnelle, on a résolu en général le problème qui consiste à déterminer le nombre de ces racines d'une équation $f(x) = 0$, qui ont une partie réelle négative, sous l'hypothèse que l'équation n'admet comme racine aucune valeur imaginaire pure de x. (On peut d'ailleurs s'affranchir de cette restriction si l'on convient de compter chaque racine imaginaire pure avec l'ordre de multiplicité $\frac{1}{2}$ comme une racine à partie négative aussi bien que positive). Ce problème, comme le fait voir la substitution de $-ix$ aux lieu et place de x, n'est pas essentiellement différent de cet autre problème, qui consiste à déterminer le nombre des racines d'une équation de degré n

$$f_1(x) + if_2(x) = 0 \tag{35}$$

qui ont une partie imaginaire positive, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ désignant des fonctions entières à coefficients réels. Ce nombre sera donné également par la première formule (8), et par conséquent par $\frac{n+\Delta}{2}$, Δ désignant alors l'indice de $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

Ce dernier problème a fait l'objet des recherches de M. Hermite dans deux Mémoires (1) auxquels je renverrai le lecteur. Pour conclure, je remarque encore ceci : de la définition de l'indice, résulte évidemment qu'une fonction rationnelle $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ possède toujours l'indice $\pm n$ au seul et unique cas où le dénominateur $f_1(x)$ s'évanouit en n points de l'axe des quantités réelles [$x = \infty$ devant être regardé comme un zéro de $f_1(x)$ lorsque $f_1(x)$ atteint seulement le degré $(n-1)$], et lorsqu'en même

(1) *Journal de Crelle*, t. 52, p. 39, et *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, p. 128.

temps $f_2(x)$ prend des valeurs de signe contraire pour deux racines consécutives quelconques de $f_1(x) = 0$. L'on conclut encore de ceci que la valeur maxima $\pm n$ de l'indice de $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ se présente toujours au seul et unique cas où chacune des équations $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ admet n racines réelles distinctes entre elles et où en même temps les racines de l'une des équations sont séparées par celles de l'autre. En particulier, les n racines de l'équation (35) ont toujours leurs parties imaginaires toutes positives ou bien toutes négatives, au seul et unique cas où les racines des équations $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$, jouissent de la propriété précédemment énoncée ([1]).

[F2]

QUELQUES EXEMPLES DE SÉRIES DOUBLEMENT PÉRIODIQUES;

PAR M. P. APPELL.

1. On sait qu'on nomme *fonction doublement périodique* une fonction uniforme $f(x)$ vérifiant deux relations de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x + 2\mathrm{K}) = f(x) \\ f(x + 2i\mathrm{K}') = f(x). \end{cases}$$

Les constantes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$ sont les deux périodes.

Lorsque la fonction doublement périodique n'admet, à distance finie, d'autres singularités que des *pôles*, on dit qu'elle est une *fonction elliptique*.

([1]) Comparer BIEHLER, *Journal de Crelle*, t. 87, p. 350, et LAGUERRE, *Journal de Crelle*, t. 89, p. 339.

Nous nous proposons ici d'indiquer quelques séries représentant des fonctions doublement périodiques. Pour cela, considérons la fonction $\Theta(x)$ de Jacobi, définie comme il suit :

Posons

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

où le module de q est supposé moindre que l'unité : la fonction Θ est définie par la série

$$(2) \qquad \Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{n\pi x i}{K}},$$

ou encore,

$$\Theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - \ldots$$

Cette fonction satisfait aux deux relations suivantes, faciles à vérifier à l'aide du développement (2)

$$(3) \qquad \begin{cases} \Theta(x+2K) = \Theta(x) \\ \Theta(x+2iK') = -\frac{1}{q} e^{-\frac{\pi x i}{K}} \Theta(x). \end{cases}$$

On conclut de la seconde relation n fois répétée

$$(4) \qquad \Theta(x+2niK') = \frac{(-1)^n}{q^{n^2}} e^{-\frac{n\pi x i}{K}} \Theta(x),$$

où n peut aussi être pris négatif.

2. Ceci posé, soit p un *entier positif* fixe ; considérons la fonction définie par la série

$$(5) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\Theta^p(x+2niK')},$$

où la fonction Θ du dénominateur est élevée à la puissance p. Si cette série est convergente, il est évident qu'elle définit une fonction doublement périodique admettant les deux périodes $2K$ et $2iK'$. En effet, chaque terme de la série admet la période $2K$, et, quand on change x en $x + 2iK'$, chaque terme ne fait que reculer d'un rang, et la somme de la série ne change pas. Or la convergence résulte immédiatement de la formule (4) : car, d'après cette formule, dont on élève les deux membres à la puissance p, on peut écrire

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Theta^p(x)} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^{np} q^{pn^2} e^{\frac{pn\pi xi}{K}}.$$

Dans cette nouvelle série, la convergence est évidente, car le module de q est moindre que l'unité. Cette série définit une fonction holomorphe de x, $G(x)$, de sorte que la fonction doublement périodique $\varphi(x)$ se présente maintenant sous la forme

$$\varphi(x) = \frac{G(x)}{\Theta^p(x)}.$$

C'est une fonction elliptique, car elle n'a que des pôles à distance finie, à savoir les zéros de Θ. On sait que la fonction Θ n'a qu'un zéro simple dans chaque parallélogramme des périodes $2K$ et $2iK'$. La fonction φ a donc un seul pôle d'ordre p dans chaque parallélogramme.

Si $p = 1$, il semble que la fonction φ n'ait qu'un pôle simple dans un parallélogramme : mais alors elle doit se réduire à une constante, ce qu'il est aisé de vérifier, car, si $p = 1$, on a

$$G(x) = \Theta(x), \qquad \varphi(x) = 1.$$

3. Soit maintenant a une constante différente de zéro. La série

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{a + \Theta^p(x + 2niK'}$$

est encore convergente et définit encore une fonction aux deux périodes $2K$ et $2iK'$. Mais cette fonction admet dans chaque parallélogramme des périodes une *infinité* de pôles qui sont les zéros des fonctions

$$a + \Theta^p(x + 2niK').$$

Elle a donc des points singuliers essentiels à distance finie et ce n'est pas une fonction elliptique.

4. On étendra sans peine ces considérations de la façon suivante. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ des constantes et $R(x)$ une fonction rationnelle à coefficients constants de $\Theta(x - \alpha_1)$, $\Theta(x - \alpha_2)$, $\ldots$, $\Theta(x - \alpha_\nu)$. Si la série

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} R(x + 2niK')$$

est convergente, elle définit une fonction doublement périodique qui est elliptique quand la fonction $R(x)$ est homogène par rapport aux fonctions Θ qui la composent, de façon à se reproduire multipliée par une exponentielle linéaire en x, quand x augmente de $2iK'$.

En prenant les séries

$$F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a^n R(x + 2niK')$$

ou

$$F_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a^n q^{mn^2} e^{\frac{nm\pi x i}{K}} R(x + 2niK')$$

(m entier constant), on obtient des fonctions à multiplicateurs constants ou exponentiels.

Enfin, on peut former des séries analogues à celles que nous venons de considérer, en les composant avec des fonctions Θ de deux ou plusieurs variables.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE NOVEMBRE 1895. — COMPOSITIONS.

Marseille.

ANALYSE. — *En appelant a et b deux fonctions uniformes de z, démontrer que la surface représentée par les équations*

$$x = a \cos\varphi,$$
$$y = b \sin\varphi,$$

peut être engendrée par le déplacement convenable d'une ellipse variable avec z.

Déterminer le volume compris entre la surface et les deux plans dont les équations sont

$$z = z_0 \quad \text{et} \quad z = z_0 + h,$$

en supposant le produit ab constant.

Former ensuite, dans le cas général, l'équation différentielle en z et φ qui donne les lignes asymptotiques de la surface.

Intégrer enfin cette équation différentielle dans le cas où l'on a

$$a = \mathrm{K}b, \qquad \mathrm{K} = \text{const.}, \qquad \frac{1}{b}\frac{d^2 b}{dz^2} = \frac{1}{z^2}.$$

NOTA. — *Les axes de coordonnées seront supposés rectangulaires.*

Une tranche du volume est comprise entre deux ellipses de même aire, situées dans des plans parallèles. Soit A l'aire d'une de ces ellipses ; l'élément de volume est $\mathrm{A}\,dh$, et le volume entier $\mathrm{A}h$.

Les lignes asymptotiques sont déterminées par les équations $d^2\varphi = 0$, $d^2 z = 0$, $pd^2x + qd^2y = 0$, quand z et φ sont les variables indépendantes. On trouve ainsi l'équation générale

$$\begin{aligned}&(a''b\cos^2\varphi + ab''\sin^2\varphi)dz^2\\ &\quad - 2(a'b - ab')\sin\varphi\cos\varphi\, dz\, d\varphi - ab\, d\varphi^2 = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a''}{a} - \cos^2\varphi + \frac{b''}{b}\sin^2\varphi\right)dz^2\\ &\quad - 2\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)\sin\varphi\cos\varphi\, dz\, d\varphi - d\varphi^2 = 0,\end{aligned}$$

en appelant a', b', a'', b'' les dérivées de a et b par rapport à z.

Dans le cas particulier proposé pour l'intégration, l'équation précédente se réduit à

$$\frac{b''}{b}dz^2 - d\varphi^2 = 0,$$

ou à

$$\frac{dz^2}{z^2} - d\varphi^2 = 0.$$

Il est facile d'achever.

Dijon.

Analyse. — I. *Intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants, dépourvues ou pourvues de seconds membres.*

II. *Trouver, en coordonnées rectangulaires, une ligne plane pour laquelle l'aire limitée par elle, par les axes des coordonnées et par l'ordonnée du point m mobile sur cette ligne, reste proportionnelle au carré de la distance du même point m à l'origine.*

En appelant x l'abscisse du point m, y son ordonnée à considérer comme fonction de x, et k un coefficient constant dont la valeur dépend de la proportionnalité à réaliser d'après l'énoncé, l'équation de ce problème est

$$\int_0^x y\,dx = \frac{1}{2k}(x^2+y^2),$$

dont la différentiation conduit à l'équation différentielle homogène

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ky-x}{y}.$$

Après l'intégration de cette dernière, la valeur de la constante arbitraire se détermine par la condition initiale $y=0$ pour $x=0$, dont la nécessité est évidente.

Mécanique. — I. *Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, la réaction du point fixe étant la seule force extérieure agissant sur lui.*

II. Question. — *Un fil homogène pesant, attaché à deux points fixes situés à la même hauteur, affecte la forme d'un arc de cycloïde, la tangente au sommet étant horizontale. On demande quelle doit être la loi de la section.*

La section en un point doit être inversement proportionnelle au cube du cosinus de l'angle de la tangente en ce point avec la tangente au sommet. On voit que les deux points fixes ne peuvent être les points de rebroussement de la cycloïde; ce qui est un cas particulier de la proposition plus générale que la tangente en une extrémité fixe d'un fil pesant ne peut être verticale.

Épreuve pratique. — *Une surface de révolution a pour axe une droite verticale dont le pied sur le plan horizontal est à* $0^{m},02$ *en avant de la ligne de terre;*

elle est engendrée par la rotation d'une circonférence de $0^m,025$ *de rayon, située dans le plan vertical, dont le centre placé à gauche de la projection verticale de l'axe, au-dessus de la ligne de terre, est séparé de ces deux droites par des distances toutes deux égales à* $0^m,04$. *Construire le plan tangent à cette surface en un quelconque de ses points, ainsi que son contour apparent sur le plan vertical.*

Paris.

ANALYSE. — 1° *Intégrer l'équation*

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = xy + x^2y^2.$$

Cette équation, étant une équation de Bernoulli, devient linéaire quand on prend pour fonction inconnue l'inverse de y. On trouve ainsi pour son intégrale générale

$$y = \frac{2\sqrt{1+x^2}}{\log(x+\sqrt{1+x^2}) - x\sqrt{1+x^2} + C},$$

C étant une constante arbitraire.

2° *Trouver les lignes asymptotiques du conoïde qui a pour plan directeur le plan des* xy, *pour directrice l'axe des* z *et qui est circonscrit à la sphère*

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

On sait que les asymptotiques non rectilignes du conoïde $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ont pour équation finie

$$x^{-2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = \text{const}.$$

Pour déterminer φ, on pose $y = xZ$, Z étant la fonction inverse de φ, et l'on écrit que cette droite coupe la sphère en deux points confondus, ce qui donne $x^2(1+Z^2)=1$. L'équation du conoïde est donc

$$z^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=1, \qquad z=\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

D'après cela, l'équation

$$\frac{y}{(\lambda^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\text{const}$$

représente les asymptotiques cherchées, qui sont algébriques.

Dynamique. — *Une tige rectiligne pesante* OA, *non homogène, d'épaisseur infiniment petite, est mobile autour d'une de ses extrémités* O *supposée fixe. Trouver le mouvement de cette tige, supposée placée dans des conditions initiales quelconques.*

On prendra pour axes fixes la verticale descendante Oz *et deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy *dans un plan horizontal. On appellera* θ *l'angle* zOA *et* φ *l'angle* zOA *avec le plan* zOx.

Désignons par M la masse de la barre, par MK^2 son moment d'inertie par rapport au point O, par l la distance de son centre de gravité au point O. Le théorème des forces vives donne

$$(1) \qquad \varphi'^2\sin^2\theta+\theta'^2=\frac{2lg}{k^2}\cos\theta=h, \qquad (h=\text{const.}).$$

Le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe Oz donne une seconde intégrale

$$(2) \qquad \varphi'\sin^2\theta=\text{const.}=C.$$

Éliminant φ' on aura, pour déterminer l'inconnue $u = \cos\theta$, à intégrer la différentielle

$$dt = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(\frac{2lg}{k^2}u+h\right) - C^2}}.$$

On tirera ensuite φ' de l'intégrale (2). Même expression de n que pour le pendule sphérique ; même discussion.

Cinématique. — *Les côtés* AB *et* AC *du quadrilatère articulé* ABCD *sont égaux, ainsi que les côtés* DB *et* DC. *On fixe le côté* AB *et l'on considère le mouvement de la bielle* CD : *ce mouvement peut être obtenu par le roulement d'une courbe liée à* CD *sur une courbe fixe.*

Déterminer ces deux courbes. Démontrer que la manivelle AC *fait deux tours pendant que la manivelle* BD *en fait un* [1].

Les courbes cherchées sont les lieux du centre instantané I dans le plan fixe et dans le plan mobile. Ce point I est à l'intersection des côtés CA et DB prolongés.

Soient a la longueur des côtés issus de A et d celle des côtés issus de D. On prend dans le plan fixe pour pôle B, pour axe polaire BA ; dans le plan mobile pour pôle D, pour axe polaire DC ; les coordonnées de I étant r, θ dans le premier système, r_1, θ_1 dans le second, la propriété de la diagonale AD d'être bissectrice des deux angles en A et en D, donne les relations

$$\frac{a}{p} = \frac{d+r}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}. \qquad \frac{a}{d} = \frac{r_1 - a}{\sqrt{a^2+r_1^2-ar_1\cos\theta_1}},$$

[1] L'énoncé devrait ajouter : *si* AC *est plus petite que* BD.

qu'on peut écrire

$$r = \frac{2ad}{d^2 - a^2}(a + d\cos\theta), \qquad r_1 = \frac{2ad}{d^2 - a^2}(d - a\cos\theta_1).$$

Les deux courbes cherchées sont donc deux limaçons de Pascal.

Si l'on suppose $d > a$, le point D décrit une circonférence qui entoure le point A; donc quand la manivelle AD fait un tour complet, il en est de même de la droite AD; l'angle DAB augmente de 360°; l'angle CAB étant double du précédent, son côté AC fait deux tours.

Calcul astronomique. — *En un lieu de colatitude λ, on observe le temps sidéral du passage d'une étoile d'ascension droite* A *et de distance polaire* P, *au fil vertical de la lunette d'un théodolite. La lecture du cercle azimutal est* L.

On pointe ensuite la lunette sur une mire terrestre; soit L′ *la lecture correspondante. On demande de déterminer l'azimut absolu de la mire.*

On prendra

$$\lambda = 41^\circ\ 9'48'',0; \qquad t = 5^h 20^m 59^s,5; \qquad L = 120^\circ\ 8'56'',4;$$
$$P = 50^\circ 45' 24'',2; \qquad A = 8^h 33^m 45^s,3; \qquad L' = 155^\circ 51'\ 4'',5.$$

Les lectures croissent de l'est à l'ouest par le sud.

Lyon.

Analyse. — I. *On prend sur une surface les lignes de courbure pour lignes coordonnées curvilignes. Le ds^2 devient $ds^2 = E(u, v)du^2 + C(u, v)dv^2$. Exprimer en un point le produit des rayons de courbure principaux.*

II. *Intégrer les équations aux dérivées partielles*

$$F(z - px - qy - pq) = 0 \qquad \text{et} \qquad F(px + py + pq) = 0,$$

F *fonction quelconque.*

Mécanique. — I. *Établir la relation entre la force vive totale d'un système, la force vive dans le mouvement relatif par rapport au centre de gravité et la force vive du centre de gravité, etc.*

II. *Mouvement d'un point pesant sur une circonférence qui tourne uniformément autour d'un diamètre vertical.*

Cas particulier où, à l'origine des temps, le point est dans la situation de repos relatif à l'extrémité du rayon horizontal.

Rennes.

Analyse. — I. *Trouver l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que leur plan tangent en chaque point* (x, y, z) *détermine sur l'axe* OZ *et à partir de l'origine une longueur qui ne dépend que du rapport* $\frac{y}{x}$.

Transformer l'équation du second ordre obtenue, par la substitution

$$\xi = x, \qquad \eta = \frac{y}{x};$$

en déduire son intégrale générale.

On intégrera également cette équation en partant de l'intégrale intermédiaire immédiatement fournie par l'énoncé.

II. *Étude de l'intégrale*

$$\int \frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z^2}\,dz,$$

prise le long du contour formé de deux demi-circonférences de rayons

R *et* r

ayant l'origine pour centre commun et reliées par les *portions de l'axe réel qu'elles interceptent entre elles.*

On supposera a et b réels et positifs.

En faisant tendre R vers l'infini et r vers zéro, on déduira la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx$$

(α *et* β *réels*).

La première question concerne *les surfaces réglées qui admettent l'axe des z comme directrice.*

Quant à l'intégrale réelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx,$$

qui dépend de la seconde question, on peut ainsi définir son mode de détermination : soit ω une quantité positive que l'on choisira égale à la plus petite des deux quantités positives

$$|\alpha| \quad \text{et} \quad |\beta|;$$

soit enfin $\varepsilon = \pm 1$, choisi de même signe que le produit $\alpha\beta$; l'intégrale précédente aura pour valeur

$$\pi . \omega . \varepsilon.$$

MÉCANIQUE. — *Déterminer et étudier les formes d'équilibre d'un fil homogène, inextensible, dont les points sont sollicités par une force émanant d'un centre fixe et inversement proportionnelle au carré de la distance.*

Former le système des équations propres à fournir les constantes arbitraires lorsqu'on donne la longueur du fil *et* les positions de ses deux extrémités.

La courbe cherchée, *toujours rectifiable,* se résout en deux variétés ; l'une de ces variétés est une transformée d'hyperbole qu'on obtient en faisant tourner les rayons vecteurs issus d'*un* foyer, de manière que l'angle d'un rayon avec l'axe focal de l'hyperbole soit amplifié dans un rapport constant K; la longueur du rayon vecteur est, bien entendu, conservée.

Le lieu de l'extrémité du nouveau rayon vecteur est la courbe cherchée.

Le rapport constant K est lié très simplement à l'*excentricité* de l'hyperbole.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Sur la Terre, regardée comme sphérique, on demande la distance kilométrique des deux points* A *et* B, *déterminés par leurs coordonnées géographiques :*

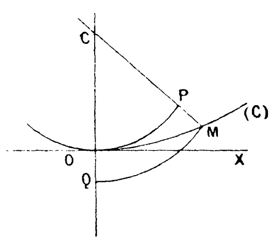
A	*Latitude*	$\varphi =$	$59°.56'.30''$
	Longitude	$L =$	$27.58.13$
B	*Latitude*	$\varphi' = -$	$33.\ 1.55$
	Longitude	$L' =$	$286.\ 2.38$

Lille.

ANALYSE. — 1° Question de cours. — *Intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.*

Application aux équations des cônes, des cylindres et des surfaces de révolution.

2° Problème. — *Une courbe plane* (C) *est tangente*



en O *à une droite* Ox. C *étant le point où la normale en* O *rencontre la normale en un point quelconque* M, *on décrit du point* C *deux arcs de cercle* OP, MQ, *limités à ces deux normales.*

Déterminer la courbe par la condition que les trois arcs OM, OP, MQ *vérifient la relation linéaire*

$$a.\mathrm{OP} + b.\mathrm{MQ} = \mathrm{OM}.$$

L'équation générale des tangentes à (C) *étant*

$$x \sin\alpha - y\cos\alpha = f(\alpha),$$

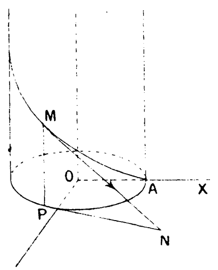
on formera l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $f(\alpha)$; *on achèvera l'intégration dans le cas où* $a = b = \frac{1}{2}$.

Mécanique. — Première question. — *Étendre le théorème des forces vives, le théorème des moments des quantités de mouvement, et, en particulier, celui des aires au cas du mouvement relatif d'un système autour de son centre de gravité.*

Deuxième question. — *Un point matériel non pesant* M, *de masse* m, *est assujetti à se mouvoir sur l'hélice circulaire*

$$x = a\cos u, \qquad y = a\sin u, \qquad z = au\cot i,$$

que l'on suppose dépolie. On demande d'étudier le



mouvement du point M, *sachant qu'il est soumis à une force dirigée vers le point* N *où la tangente en* M *à* *l'hélice rencontre le plan xOy et égale à*

$$mae^{\frac{MN}{a}}.$$

On tiendra compte du frottement. A l'instant initial le mobile est en A dans le plan xOy et sa vitesse est v_0.

ASTRONOMIE. — *En un lieu de latitude connue λ, on a mesuré le temps sidéral T qui s'écoule entre les deux passages d'une même étoile connue (α, δ) dans un plan vertical déterminé. Calculer les heures sidérales de ces deux passages.*

Application :

$$\lambda = 50^\circ 38' 44'',0 \text{ (B)},$$
$$T = 1^h 14^m 46^s,$$
$$\alpha = 10^h 57^m 14^s,97,$$
$$\delta = 62^\circ 19' 3'',5 \text{ (B)}.$$

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Maillard, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers.

La question d'Analyse proposée en juillet 1895 à l'examen de Licence devant la Faculté de Lyon (voir *Nouvelles Annales*, 3e série, t. XV, p. 48) peut être résolue par les méthodes ordinaires ([1]).

Il s'agit d'intégrer l'équation sans second membre

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + a^2x^2y = 0.$$

Faisons $ax = t$, écrivons y' et y'' pour $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$, divi-

([1]) *Voir*, par exemple, SERRET, *Calcul intégral*, Chap. X.

sons par t, il vient

$$ty'' - 2y' + ty = 0.$$

Égalons à zéro les dérivées successives du premier membre, faisons $t = 0$, nous aurons

$$y'_0 = 0, \qquad y''_0 = y_0,$$

puis

$$y_0^{n+1} = -\frac{n}{n-2}\, y_0^{n-1},$$

d'où, par la formule de Mac-Laurin :

$$\begin{aligned} y = y_0\left(1 + \frac{t^2}{2!} - \frac{3t^4}{4!} + \frac{5t^6}{6!} - \frac{7t^8}{8!} + \ldots\right) \\ + \frac{y'''_0}{2}\left(\frac{2t^3}{3!} - \frac{4t^5}{5!} + \frac{6t^7}{7!} - \frac{8t^9}{9!}\ldots\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$y = y_0(\cos t + t\sin t - \frac{y'''_0}{2}(\sin t - t\cos t)$$

ou bien

$$y = \mathrm{M}(\cos t + t\sin t) + \mathrm{N}(\sin t - t\cos t).$$

Appliquant à l'équation complète la méthode de variation des constantes, remettant ax au lieu de t, on trouve sans difficulté l'intégrale particulière indiquée, où

$$\mathrm{A} = \frac{1}{a^4} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = -\frac{1}{4a^4}.$$

VARIÉTÉS.

La Bibliothèque mathématique des travailleurs.

Les facilités matérielles données aux travailleurs contribuent puissamment aux progrès des Sciences. Il n'est donc pas étonnant que la proposition faite au Congrès de Caen (1894) par M. Lémeray, et tendant à l'organisation d'une bibliothèque mathématique, ait été accueillie avec la sympathie la plus sincère par les sections de Mathématiques, auxquelles cette proposition s'adressait.

Mais de l'idée à l'exécution la distance est souvent grande, et l'entreprise à créer se trouvait hérissée de difficultés que personne ne méconnaissait. La première pensée avait été d'adopter, ce qui semble assez naturel, la forme coopérative. Or, le seul procédé pratique consistait à créer la bibliothèque à Paris; et ce sont justement les mathématiciens habitant Paris qui en ont le moins besoin. Comment amener à coopérer entre elles des personnes isolées les unes des autres, et le plus souvent ne se connaissant même pas?

Très pénétré cependant de l'importance d'une telle fondation, et de sa grande utilité, je crus devoir faire connaître la proposition de M. Lémeray par une question posée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*.

Bientôt, répondant à cet appel, un jeune savant, le Dr Hulmann, que je connaissais du reste depuis plusieurs années, s'offrait à essayer de mettre en pratique l'idée de la création dont il s'agit. Peu de mois après, la *Bibliothèque mathématique des travailleurs* était fondée. Elle vient aujourd'hui de franchir le cap de sa première année. Ce résultat rapide et inespéré a été obtenu par le concours d'un grand nombre de bonnes volontés et d'initiatives individuelles, qui sont venues encourager le Dr Hulmann dans sa tâche, et dont il y a lieu de se féliciter.

La *Bibliothèque mathématique des travailleurs* a pour but exclusif de prêter des livres, journaux ou Mémoires de Mathématiques à ses abonnés. La coopération aurait permis de faire plus, et d'organiser peut-être en outre la possibilité de la lecture sur place; mais, comme nous l'avons dit plus haut, on risquait d'attendre longtemps et peut-être indéfiniment. Dépourvue de toute complication administrative, et réduite au minimum de dépenses, la Bibliothèque peut consacrer presque toutes ses ressources à enrichir le fonds initial avec lequel elle a débuté. Aussitôt fondée, cette utile institution, qu'on ne saurait assez faire connaître, a trouvé les concours les plus dévoués de collaborateurs apportant leurs avis, leurs livres, et leur active propagande; puis les abonnés ont répondu à l'appel qui leur était fait, comprenant bien qu'il y avait là une œuvre de désintéressement et de solidarité scientifiques, exempte de toute pensée commerciale.

En juillet 1895, la Bibliothèque a publiée un premier catalogue, comprenant 630 numéros, c'est-à-dire 630 Volumes. Lors de la publication du prochain catalogue, qui aura lieu au cours de la présente année, le nombre total dépassera mille.

Ce n'est pas seulement le nombre qui fait la valeur de ce fonds, mais encore la rareté de certains Volumes, dont quelques-uns sont pour ainsi dire introuvables. Ce sont surtout des dons volontaires qui ont produit ce brillant résultat.

Nous ne pouvons entrer ici dans aucun détail au sujet du fonctionnement et des conditions d'abonnement. Ceux de nos lecteurs que la question intéresserait pourront obtenir tous les renseignements en s'adressant au Dr Hulmann, 4, rue de la Cure, Paris (Auteuil). Nous nous bornerons à signaler, comme condition essentielle, que tout livre ou recueil désiré par un abonné, et se trouvant dans le commerce, est immédiatement acquis par la Bibliothèque.

Si cette institution, bien récente encore, prend les développements que les débuts permettent légitimement d'espérer, il est à prévoir que, dans un avenir pas bien éloigné peut-être, elle pourrait rendre encore de plus grands services en organisant une salle de lecture, d'où la possibilité de travailler sur place. Malgré le nombre et l'importance des grandes bibliothèques scientifiques existant déjà, il y aurait là un nouvel élément de travail des plus précieux, et qui serait bientôt apprécié des jeunes mathématiciens habitant Paris. Mais ceci est du domaine de l'avenir. En ce qui concerne le présent, il nous a semblé bon de faire connaître aux lecteurs et collaborateurs des *Nouvelles Annales*, et principalement à ceux qui habitent les départements ou l'étranger, ce nouveau foyer de diffusion des vérités mathématiques, qui s'appelle la *Bibliothèque mathématique des travailleurs*.

C.-A. Laisant, Rédacteur.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Questions 1638 et 1639.

(1892, p. 30*, 31*.)

1638. *On considère un cercle fixe* C *et un faisceau de cardioïdes ayant toutes même axe de symétrie et même point de rebroussement* O. *La somme des inverses des rayons vecteurs joignant le point* O *aux points d'intersection du cercle avec une des cardioïdes est constante.*

1639. *On considère un cardioïde et une point fixe* P *dans son plan. Un cercle quelconque ayant son centre en* P *rencontre la cardioïde en huit points. La somme des longueurs des rayons vecteurs joignant ces huit points au point de rebroussement de la cardioïde est constante.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Ernest Foucart.

Soient

$$\rho = R(1 + \cos\omega),$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + R'^2 = 0$$

les équations d'une cardioïde et d'un cercle C de centre $P(a, b)$. On a

$$x = \rho\cos\omega = \rho\frac{\rho - R}{R}, \qquad y = \rho\sin\omega = \rho\frac{\sqrt{2\rho R - \rho^2}}{R}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation de la circonférence, on a, pour déterminer les points communs aux deux courbes autres que les points cycliques, l'équation

$$\rho^2 - 2a\rho\frac{\rho - R}{R} - 2b\rho\frac{\sqrt{2\rho R - \rho^2}}{R} + R'^2 = 0.$$

Développant et ordonnant par rapport à ρ, il vient

$$\begin{aligned}[(R - 2a)^2 + 4b^2]\rho^4 &+ 4R[a(R - 2a) - 2b^2]\rho^3 \\ &+ 2R[2a^2R + R'^2(R - 2a)]\rho^2 + 4aR'^2R^2\rho + R^2R'^2 = 0;\end{aligned}$$

la considération de cette équation donne la proposition du numéro 1638 ou celle du numéro 1639, suivant qu'on y regarde R ou R' comme variable.

Il eût été préférable, dans la question 1639, de ne considérer que les quatre points communs autres que les points cycliques.

Question 1641.

(1892, p. 31*.)

Si un cercle a pour centre un point d'une hyperbole équilatère et passe par le symétrique de ce point par rapport au centre de l'hyperbole, il coupe cette courbe en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral. (LEMAIRE.)

SOLUTION

Par M. ERNEST FOUCART.

Soient

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0$$

l'équation de l'hyperbole et $a\,\text{séc}\,\varphi$, $a\tan\varphi$ les coordonnées du point considéré. Transportons en ce point les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes ; l'hyperbole et le cercle ont alors pour équations

$$x^2 - y^2 + 2ax\,\text{séc}\,\varphi - 2ay\tan\varphi = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 4a^2(1 + \sin^2\varphi)\,\text{séc}^2\varphi = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points communs à ces deux courbes est

$$m^4 + 2\sin\varphi\, m^3 - 3(1+\sin^2\varphi)m^2 + 2\sin\varphi\, m + \sin^2\varphi = 0,$$

et, supprimant la droite qui passe par le centre de l'hyperbole,

$$m^3 + 3\sin\varphi\, m^2 - 3m - \sin\varphi = 0.$$

Cette équation définit les coefficients angulaires de droites faisant entre elles des angles de 60°, car si l'on pose

$$\operatorname{tang}\omega = -\sin\varphi,$$

et

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{3} = m,$$

on a la relation connue

$$-\sin\varphi = \frac{3m - m^3}{1 - 3m^2},$$

équivalente à l'équation écrite.

Question 1644.

(1892, p. 31*.)

Si α *est l'angle sous lequel une normale à une parabole coupe l'axe de cette parabole,* β *l'angle sous lequel elle coupe la courbe en son second point de rencontre avec celle-ci, on a* $\operatorname{tang}\alpha = 2\operatorname{tang}\beta$. (On demande une solution géométrique.) (D'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. Ernest Foucart.

Soient A, le pied de la normale AB ; C, le pôle de AB ; F, le milieu de AB ; D et E, les points de rencontre de l'axe avec AB et AC. On a

$$AE = AD\operatorname{tang}\alpha,$$
$$AC = AB\operatorname{tang}\beta,$$

d'où, en tenant compte du parallélisme de FC et DE,

$$\frac{AD\operatorname{tang}\alpha}{AB\operatorname{tang}\beta} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AF},$$

et comme

$$AB = 2.AF,$$
$$\operatorname{tang}\alpha = 2\operatorname{tang}\beta.$$

Question 1645.

(1892, p. 32*.)

On considère une lemniscate de Bernoulli (L) *dont le point double est en* O *et l'un des sommets en* A.

On considère aussi l'hyperbole équilatère (H) *ayant un de ses sommets au milieu de* OA *et pour asymptotes les tangentes au point double de la lemniscate.*

Montrer que le cercle qui a son centre en un point quelconque C *de* (H) *et qui passe par* O *est tangent à la lemniscate* (L) *en un point* K *tel que* OA *est bissectrice des droites* OC *et* OK. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Ernest Foucart.

Soient

$$\text{(L)} \qquad (x^2+y^2)^2 - 4a^2(x^2-y^2) = 0,$$

$$x^2+y^2 - \frac{2ax}{\cos\varphi} - 2ay\operatorname{tang}\varphi = 0,$$

les équations de la lemniscate et du cercle de centre

$$C\left(\frac{a}{\cos\varphi}, a\operatorname{tang}\varphi\right).$$

L'équation aux coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points communs à ces deux courbes, autres que l'origine et les points cycliques, s'obtient en éliminant la variable d'homogénéité entre ces deux équations, ce qui donne

$$m^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + 2m\sin\varphi + (1-\cos^2\varphi) = 0,$$

ou

$$(m+\sin\varphi)^2 = 0.$$

Cette équation montre que les deux courbes sont tangentes en un point K, tel que OK ait pour coefficient angulaire $-\sin\varphi$; or $\sin\varphi$ est justement le coefficient angulaire de OC, donc OC et OK sont symétriques par rapport à Ox.

Question 1658.

(1894, p. 1*.)

On donne un triangle abc. Du sommet a, on abaisse sur bc la perpendiculaire aa'; de même, de b on abaisse la *perpendiculaire bb'. Du point i, centre du cercle inscrit au triangle $a'cb'$, on mène des parallèles à ac et bc.*

Ces droites rencontrent ces côtés aux points $\alpha\beta$. Démontrer que la circonférence qui touche en α et β les côtés cb et ca est tangente au cercle des neuf points du triangle donné? (MANNHEIM).

SOLUTION

par M. A. DROZ-FARNY.

Dans le losange $i\beta c\alpha$, on a

$$c\beta = \frac{ci}{2\cos\frac{c}{2}}.$$

Or le triangle $a'cb'$ est semblable au triangle donné, le rapport de similitude étant $\cos c$. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle acb. On sait que

$$c\mathrm{I} = \frac{p-c}{\cos\frac{c}{2}},$$

et, par conséquent,

$$c\beta = \frac{c\mathrm{I}\cos c}{2\cos\frac{c}{2}} = \frac{(p-c)\cos c}{2\cos^2\frac{c}{2}} = \frac{ab}{2p}\cos c.$$

Soit m le point milieu de ac. La puissance du sommet c par rapport au cercle des neuf points sera

$$cb'.cm = \frac{ab}{2}\cos c.$$

Construisons sur ac un point β' pour lequel $c\beta.c\beta' = cb'.cm$. On aura

$$c\beta' = p.$$

Si donc on transforme la figure par rayons vecteurs réciproques, par rapport au point c comme centre et $r^2 = cb'.cm$ comme module d'inversion : 1° le cercle des neuf points se transforme en lui-même; 2° le cercle $\alpha\beta$ a pour inverse un nouveau cercle $\alpha'\beta'$ tangent aux côtés ac et bc à une distance $c\alpha' = c\beta' = p$.

Or ce cercle n'est rien autre que le cercle ex-inscrit au triangle abc dans l'angle c. Ce dernier étant tangent au cercle des neuf points, il en sera de même du cercle $\alpha\beta$ et les points de contact sont en ligne droite avec le sommet c.

Question 1659.

(1894, p. 1*).

Étant donnée une conique (C), *on considère le triangle formé par les tangentes menées d'un point* P *à la conique et la polaire de ce point par rapport à* (C). *Montrer que l'orthocentre de ce triangle est sur la polaire du point* P *par rapport au cercle orthoptique de la conique* (C).

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Soient PA et PB les tangentes à la conique (C), PP′, AA′, BB′ les hauteurs du triangle PAB, H son orthocentre, M le milieu de AB et O le centre de (C). La droite A′B′ coupe AB en α et αH rencontre PM en a. On sait que PM passe par le centre O. La circonférence décrite sur AB comme diamètre, passant par A′ et B′, il en résulte que αH est polaire de P par rapport à cete circonférence et que, par conséquent, angle $\mathrm{P}a\alpha = 90°$. Le quadrilatère $\mathrm{P}a\mathrm{P}'\alpha$ est donc inscriptible et, comme P′ et α sont conjugués harmoniques par rapport à A et B, cette circonférence est circonscrite au triangle $\mathrm{PP}'\alpha$ conjugué par rapport à (C). On a donc, d'après le théorème de Faure,

$$\mathrm{O}a.\mathrm{OP} = a^2 + b^2,$$

ce qui prouve que $a\mathrm{H}\alpha$ est une droite, et que cette droite est la polaire de P par rapport au cercle orthoptique.

Question 1665.

(1894, p. 2*.)

Si trois cercles sont inscrits à un triangle, les quatrièmes tangentes communes qu'ils admettent, pris deux à deux, forment un triangle homologique du premier.

(E. Duporcq.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Soient O, O_a, O_b, O_c les quatre cercles inscrits. La quatrième tangente commune aux cercles O et O_a coupe le côté $BC = a$ au pied de la bissectrice intérieure de l'angle A; de même la quatrième tangente commune aux cercles O_b et O_c coupe a au pied de la bissectrice extérieure de l'angle A.

Mais on sait que les six pieds des bissectrices intérieures et extérieures des angles du triangle sont par trois sur quatre droites. Les trois côtés d'un des quatre triangles des tangentes coupent donc les côtés correspondants du triangle ABC suivant trois points en ligne droite; d'où le théorème.

QUESTIONS.

1718. $f(z)$ désignant un polynome entier en z, on a l'égalité

$$2i\pi[f(x)-f(v)] = \int_c f'(z)\,\mathrm{L}z\,dz,$$

$f'(z)$ désignant la dérivée de $f(z)$, et l'intégrale étant prise dans le sens positif le long d'un contour fermé C, simple, *partant du point* x, pour y revenir après avoir entouré l'origine O. (C. Bourlet.)

1719. Si deux triangles homologiques ABC et $A_1B_1C_1$ sont inscrits dans la même conique Q :

1° Le centre O d'homologie est le pôle de l'axe X;

2° Les points (BC_1, B_1C), (AC_1, A_1C), (AB_1, A_1B) appartiennent à X, et les droites (bc_1, b_1c), (ac_1, a_1c), (ab_1, a_1b) passent par O;

3° Si par O l'on mène une sécante Δ, les droites joignant les sommets de chacun des triangles aux points où les côtés correspondants de l'autre sont coupés par Δ sont trois à trois concourantes en deux points ω et ω_1 de Q, et ces deux points sont en ligne droite avec O;

4° Les droites joignant un point θ de X aux sommets de chacun des triangles coupent les côtés correspondants de l'autre en des points situés trois à trois sur deux droites ρ et ρ_1 tangentes à la conique Q_1 inscrite aux deux triangles, et ces deux droites se coupent sur X.

5° Déduire de là une construction *simple* de la conique passant par cinq points ou tangente à cinq droites.

(P. SONDAT.)

1720. On sait que dans un triangle quelconque, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont en ligne droite. Étant donné un triangle Δ, on construit la droite dont il vient d'être question relative à chacun des triangles formés par les points de contact du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits à Δ. Démontrer que les quatre droites ainsi obtenues se coupent au centre du cercle circonscrit à Δ.

(J. FRANEL.)

1721. Déterminer un polynome entier du degré n, $f'_n(x)$ tel que le résidu de la fonction

$$f'_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^{m-1}}{1-x^m} \qquad (m \text{ nombre entier positif}),$$

relatif au point $x = 0$, soit égal à 0 quand m et n sont différents, et à l'unité quand $m = n$. (J. FRANEL.)

1722. Par un foyer F d'une conique donnée, on mène une corde quelconque MM'. Le cercle de diamètre MM' rencontre la conique en deux autres points M_1 et M'_1. Montrer que :

1° La droite $M_1M'_1$ passe par un point fixe;

2° Le lieu des points de rencontre des sécantes communes au cercle et à la conique se compose d'une ligne droite et d'une cubique. (E.-N. BARISIEN.)

ERRATA.

3e série, t. XV, 1896 : page 100, ligne 11, *au lieu de* osculatrices en deux points, *lisez* ayant en deux points un contact du deuxième ordre.

[L²17a] SUR L'INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES [1];

Par M. H. ANDOYER.

1. Soit

$$\begin{aligned} f = & \, a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 \\ & + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0 \end{aligned}$$

l'équation ponctuelle d'une quadrique quelconque S rapportée à un tétraèdre de référence quelconque $A_1A_2A_3A_4$.

La quadrique S est une *quadrique proprement dite* si les quatre équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

n'ont pas de solutions communes non toutes nulles, c'est-à-dire encore si le discriminant F de f n'est pas nul. Alors la quadrique S n'a aucun point singulier; tout point de l'espace a un plan polaire et un seul ; un point est situé dans son plan polaire s'il est sur S, et son plan polaire est alors le plan tangent à S en ce point; ce plan tangent coupe la surface suivant deux droites distinctes.

La quadrique S est un *cône* si les quatre équations $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ ont un système de solutions non toutes nulles,

(1) L'exposition suivante des résultats bien connus relatifs à l'intersection de deux quadriques est celle que je donne dans mes conférences aux candidats à l'agrégation; elle me paraît simple et complète. Il est d'ailleurs à peine utile de dire qu'elle ne présente rien d'essentiellement nouveau.

c'est-à-dire encore si le discriminant F est nul, sans que tous ses mineurs du premier ordre le soient. Une telle surface a un point singulier et un seul, le sommet A du cône. Tout point de l'espace autre que A a un plan polaire et un seul passant par A ; il est contenu dans son plan polaire s'il est sur S, et son plan polaire est alors le plan tangent à S en ce point ; ce plan tangent coupe la surface suivant deux droites confondues. Le plan polaire de A est absolument indéterminé.

La quadrique S est un système de deux plans distincts, ou simplement un *dièdre,* si les quatre équations $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ ont une infinité simple de systèmes de solutions communes non toutes nulles, c'est-à-dire encore si le discriminant F et tous ses mineurs du premier ordre sont nuls, sans que tous ses minenrs du second ordre le soient. Une telle surface a une infinité simple de points singuliers remplissant la droite D, arête du dièdre. Tout point de l'espace non situé sur D a un plan polaire et un seul passant par D ; il est situé dans son plan polaire s'il est sur S, et son plan polaire est alors un des plans du dièdre S. Le plan polaire d'un point de D est absolument indéterminé.

La quadrique S est un *plan double* si les quatre équations $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ ont une infinité double de systèmes de solutions communes non toutes nulles, c'est-à-dire encore si le discriminant F ainsi que tous ses mineurs du premier et du second ordre sont nuls. Une telle surface a une infinité double de points singuliers, remplissant le plan P qui, compté deux fois, constitue la surface S. Tout point de l'espace non situé dans P a pour plan polaire le plan P ; le plan polaire d'un point de P est absolument indéterminé.

2. Soit

$$g = b_{11}x_1^2 + \ldots + 2b_{34}x_3x_4 = 0,$$

l'équation d'une seconde quadrique T, *distincte de* S; nous supposons, en outre, que *les deux quadriques* S *et* T *n'ont pas de points singuliers communs;* l'étude du système de deux quadriques ayant un point singulier commun ne diffère pas, en effet, de l'étude du système de deux coniques.

Les deux quadriques S et T se coupent suivant une courbe du quatrième ordre C, ou *quartique,* car l'hypothèse faite montre que les deux quadriques, si elles se décomposent toutes deux en systèmes de plans, n'ont pas de plan commun.

Les deux quadriques S et T déterminent un *faisceau* Φ de quadriques U, représentées par l'équation

$$\lambda f + \mu g = 0,$$

λ et μ étant deux paramètres toujours finis, non nuls en même temps.

Deux quadriques U sont distinctes si elles correspondent à deux systèmes distincts (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), de valeurs de λ et μ, c'est-à-dire tels que l'on ait

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0;$$

deux telles quadriques peuvent évidemment remplacer les quadriques S et T pour définir le faisceau Φ, et, par suite, nous pourrons toujours choisir, à notre gré, les quadriques fondamentales S et T parmi celles du faisceau.

Toutes les quadriques U du faisceau, en nombre simplement infini, contiennent la courbe C; par un point de l'espace non situé sur C passe une quadrique U et une seule.

Enfin, remarquons que tout ce que nous avons déjà dit, comme tout ce qui suivra, ne dépend évidemment en rien du choix des coordonnées, et que, par suite, le tétraèdre de référence pourra toujours être pris à notre gré.

3. Le faisceau Φ contient des quadriques *singulières*, c'est-à-dire douées de points singuliers. Ces quadriques correspondent aux valeurs de λ et μ qui annulent le discriminant Δ de la forme $\lambda f + \mu g$. Les points singuliers d'une telle quadrique sont donnés par la résolution des quatre équations

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0.$$

Une quadrique singulière est un cône, si les valeurs de λ et μ auxquelles elle correspond n'annulent pas tous les mineurs du premier ordre de Δ ; elle est un dièdre si ces valeurs annulent tous les mineurs du premier ordre de Δ, mais non tous les mineurs du second ordre ; elle est un plan double, si ces valeurs annulent tous les mineurs du second ordre de Δ.

Appelons *points singuliers* du faisceau Φ les points singuliers des surfaces singulières du faisceau. On voit tout de suite que tout point singulier du faisceau jouit de la propriété d'avoir même plan polaire par rapport à toutes les quadriques U du faisceau ; et réciproquement, tout point jouissant de cette propriété est un point singulier du faisceau. En effet, les points jouissant de cette propriété sont fournis par les équations

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_3}}{\frac{\partial g}{\partial x_3}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_4}}{\frac{\partial g}{\partial x_4}},$$

qui sont équivalentes à celles trouvées plus haut pour déterminer les points singuliers du faisceau.

Deux points singuliers appartenant à deux surfaces singulières différentes, c'est-à-dire correspondant à deux systèmes distincts (λ_1, μ_1) (λ_2, μ_2) de valeurs de λ et μ annulant Δ, sont conjugués par rapport à toutes les surfaces du faisceau.

En effet, si (x_i) et (y_i) sont les coordonnées de ces deux points, on a les relations

$$\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_1 \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \qquad \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial y_i} + \mu_2 \frac{\partial g}{\partial y_i} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\lambda_1 \sum y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_1 \sum y_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0,$$

$$\lambda_2 \sum x_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + \mu_2 \sum x_i \frac{\partial g}{\partial y_i} = 0,$$

et, puisque l'on a $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \neq 0$,

$$\sum y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum x_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \qquad \sum y_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum x_i \frac{\partial g}{\partial y_i} = 0,$$

et enfin, λ, μ étant quelconques,

$$\lambda \sum y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \sum y_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

En résumé, nous voyons que, si un point A est singulier, il est singulier pour une seule surface singulière; par rapport à toutes les surfaces autres que celle-ci, il a un même plan polaire, qui contient tous les points singuliers des autres surfaces singulières.

4. Le discriminant Δ n'est pas en général nul identiquement; alors l'équation $\Delta = 0$, où l'on peut considérer le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ comme l'inconnue, admet quatre ra-

cines distinctes ou confondues, et, par suite, le faisceau Φ contient au plus quatre surfaces singulières, et au moins une. En outre, il est évident que si une racine de $\Delta = 0$ correspond à un plan double, c'est-à-dire annule tous les mineurs du second ordre de Δ, cette racine est d'un ordre de multiplicité au moins égal à trois; de même, une racine qui correspond à un dièdre, c'est-à-dire qui annule tous les mineurs du premier ordre de Δ, mais non tous les mineurs du second ordre, est d'un ordre de multiplicité au moins égal à deux.

Mais le discriminant Δ peut aussi être nul identiquement; étudions d'abord complètement ce cas exceptionnel.

Les quadriques U sont toutes singulières; mais, parmi elles, une au plus peut être un système de plans. En effet, si deux d'entre elles étaient des systèmes de plans, on aurait, en les choisissant pour S et T,

$$f = X_1 X_2, \qquad g = X_3 X_4,$$

les X_i étant des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées, et l'équation du faisceau serait

$$\lambda X_1 X_2 + \mu X_3 X_4 = 0.$$

Or il est impossible que les quatre fonctions X_i soient indépendantes, car, dans ce cas, en prenant pour nouveaux plans de coordonnées les plans $X_i = 0$, on voit tout de suite que Δ ne serait pas nul identiquement; mais il est impossible aussi que les fonctions X_i ne soient pas indépendantes, car, dans ce cas, S et T auraient un point singulier commun. L'hypothèse faite est donc absurde.

Supposons donc que S et T soient deux cônes; en choisissant convenablement les coordonnées, on peut écrire

$$\begin{aligned} f &= a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 \\ &\qquad + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4, \\ g &= b_{11}x_1^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 \\ &\qquad + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{14}x_1x_4 + 2b_{34}x_3x_4, \end{aligned}$$

de sorte que les sommets de S et T sont respectivement A_1 et A_2.

On a alors

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11}\mu & 0 & b_{13}\mu & b_{14}\mu \\ 0 & a_{22}\lambda & a_{23}\lambda & a_{24}\lambda \\ b_{13}\mu & a_{23}\lambda & a_{33}\lambda + b_{33}\mu & a_{34}\lambda + b_{34}\mu \\ b_{14}\mu & a_{24}\lambda & a_{34}\lambda + b_{34}\mu & a_{44}\lambda + b_{44}\mu \end{vmatrix};$$

les discriminants des formes à trois variables f et g n'étant pas nuls, l'évanouissement identique de Δ est exprimé par les conditions

$$a_{22} = 0, \qquad b_{11} = 0, \qquad b_{13}a_{24} - b_{14}a_{23} = 0.$$

Ces conditions expriment que chacun des cônes S et T passe par le sommet de l'autre, et que ces deux cônes ont même plan tangent le long de la génératrice commune A_1A_2. En prenant pour ce plan tangent le plan $A_1A_2A_3$ d'équation $x_4 = 0$, on a

$$a_{23} = 0, \qquad b_{13} = 0,$$

et puisque S et T sont de véritables cônes, les coefficients a_{33}, b_{33}, a_{24}, b_{14} sont différents de zéro.

En égalant à zéro tous les mineurs de Δ, on voit que le faisceau Φ contient un système de plans et un seul; c'est un dièdre qui correspond à

$$a_{33}\lambda + b_{33}\mu = 0;$$

ce dièdre se compose du plan $A_1A_2A_3$ et d'un autre plan ne passant ni par A_1 ni par A_2.

Donc, finalement, le faisceau Φ se compose de cônes tangents le long d'une génératrice commune à un même plan, et d'un dièdre formé par ce plan et un autre qui coupe la génératrice commune. Par suite, la courbe C se compose de cette génératrice commune comptée deux fois et d'une conique qui la rencontre en un point.

5. Le cas exceptionnel où le discriminant Δ est identiquement nul étant laissé de côté, examinons maintenant ce que l'on peut dire sur chaque surface singulière du faisceau et ses points singuliers.

1° Supposons qu'une surface singulière du faisceau soit un cône; prenons ce cône pour la quadrique T, de sorte que la racine correspondante de $\Delta = 0$ sera

$$\lambda = 0.$$

En prenant pour A_1 le sommet du cône T, on a

$$g = b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 \\ + 2b_{23}x_2x_3 + 2b_{24}x_2x_4 + 2b_{34}x_3x_4,$$

et, par suite,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12}\lambda & a_{13}\lambda & a_{14}\lambda \\ a_{12}\lambda & a_{22}\lambda + b_{22}\mu & a_{23}\lambda + b_{23}\mu & a_{24}\lambda + b_{24}\mu \\ a_{13}\lambda & a_{23}\lambda + b_{23}\mu & a_{33}\lambda + b_{33}\mu & a_{34}\lambda + b_{34}\mu \\ a_{14}\lambda & a_{24}\lambda + b_{24}\mu & a_{34}\lambda + b_{34}\mu & a_{44}\lambda + b_{44}\mu \end{vmatrix}.$$

Si la racine $\lambda = 0$ est simple pour l'équation $\Delta = 0$, on a

$$a_{11} \neq 0;$$

ceci veut dire que le point A_1, sommet du cône T, n'est sur aucune autre surface du faisceau.

Si la racine $\lambda = 0$ est multiple pour l'équation $\Delta = 0$, on a

$$a_{11} = 0,$$

puisque le discriminant de la forme g à trois variables n'est pas nul. Donc le point A est commun à toutes les

les surfaces U du faisceau, et comme il a même plan polaire par rapport à toutes ces surfaces, celles-ci sont toutes tangentes au même plan en A; si le faisceau a un dièdre comme autre surface singulière, l'un des plans de ce dièdre est le plan tangent commun en A à toutes les surfaces U.

Soit $A_1 A_2 A_3$ ce plan tangent commun en A_1 à toutes les surfaces U; on a alors

$$a_{12} = a_{13} = 0,$$

et a_{14} n'est certainement pas nul.

On a aussi

$$\Delta = -a_{14}^2 \lambda^2 \begin{vmatrix} a_{22}\lambda + b_{22}\mu & a_{23}\lambda + b_{23}\mu \\ a_{23}\lambda + b_{23}\mu & a_{33}\lambda + b_{33}\mu \end{vmatrix}.$$

La racine $\lambda = 0$ n'est d'un ordre de multiplicité supérieur à deux que si l'on a

$$b_{22} b_{33} - b_{23}^2 = 0,$$

c'est-à-dire si le plan $A_1 A_2 A_3$ est tangent au cône T; alors elle est au moins triple.

La racine $\lambda = 0$ est quadruple si l'on a en outre

$$a_{22} b_{33} + a_{33} b_{22} - 2 a_{23} b_{23} = 0,$$

c'est-à-dire si les droites d'intersection de S avec le plan $A_1 A_2 A_3$ sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites d'intersection de T avec le même plan : comme celles-ci sont supposées actuellement confondues avec la génératrice de contact du cône T avec le plan $A_1 A_2 A_3$, il faut que cette génératrice de contact appartienne à toutes les surfaces U du faisceau.

2° Supposons qu'une surface singulière soit un dièdre que nous prendrons pour la quadrique T, de sorte que la racine correspondante de $\Delta = 0$ sera

$$\lambda = 0.$$

En prenant $A_1 A_2$ pour arête du dièdre T, on a

$$g = b_{33} x_3^2 + 2 b_{34} x_3 x_4 + b_{44} x_4^2,$$

et par suite

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12}\lambda & a_{13}\lambda & a_{14}\lambda \\ a_{12}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23}\lambda & a_{24}\lambda \\ a_{13}\lambda & a_{23}\lambda & a_{33}\lambda + b_{33}\mu & a_{34}\lambda + b_{34}\mu \\ a_{14}\lambda & a_{24}\lambda & a_{34}\lambda + b_{34}\mu & a_{44}\lambda + b_{44}\mu \end{vmatrix}.$$

Si la racine $\lambda = 0$ n'est que double pour l'équation $\Delta = 0$, et par suite simple pour tous les mineurs de Δ, on a

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \neq 0;$$

ceci veut dire que l'arête $A_1 A_2$ du dièdre T coupe la surface S en deux points distincts. Comme plus haut, on voit que ces deux points sont communs à toutes les surfaces U du faisceau, et qu'en chacun d'eux ces surfaces admettent toutes même plan tangent, distinct de chacun des plans du dièdre T. Si le faisceau a un dièdre comme autre surface singulière, les deux plans de ce dièdre sont les plans tangents communs aux surfaces U en ces deux points.

Si la racine $\lambda = 0$ est pour l'équation $\Delta = 0$ d'un ordre de multiplicité supérieur à deux, on a

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

puisque le discriminant de la forme g à deux variables n'est pas nul.

Alors, ou bien l'arête $A_1 A_2$ est tangente à la surface S, ou bien elle appartient à la surface S.

Dans le premier cas, soit A_1 le point où $A_1 A_2$ touche S, de sorte que

$$a_{11} = a_{12} = 0,$$

a_{22} n'étant pas nul, et soit $A_1 A_2 A_3$ le plan tangent à S en A, de sorte que

$$a_{13} = 0,$$

a_{14} n'étant pas nul.

On voit que toutes les quadriques du faisceau passent en A_1 et y touchent le plan $A_1 A_2 A_3$ et la droite $A_1 A_2$. De plus

$$\Delta = -a_{14}^2 \lambda^2 \begin{vmatrix} a_{22}\lambda & a_{23}\lambda \\ a_{23}\lambda & a_{33}\lambda + b_{33}\mu \end{vmatrix};$$

donc la racine $\lambda = 0$ n'est quadruple que si l'on a

$$b_{33} = 0,$$

c'est-à-dire si le plan $A_1 A_2 A_3$ est l'un des plans du dièdre T.

Ajoutons que, dans ce cas, on vérifie aisément que la racine $\lambda = 0$ n'est pas double pour tous les mineurs de Δ.

Dans le second cas, on a

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0,$$

et en prenant pour $A_1 A_2 A_3$ le plan tangent à S en A_1, on a en outre

$$a_{13} = 0,$$

avec

$$a_{14} \neq 0.$$

Toutes les quadriques du faisceau contiennent l'arête $A_1 A_2$ et sont tangentes entre elles en chaque point de cette arête. De plus

$$\Delta = a_{14}^2 a_{23}^2 \lambda^4,$$

de sorte que

$$a_{23} \neq 0,$$

et la racine $\lambda = 0$ est quadruple pour $\Delta = 0$.

Ajoutons que, dans ce cas, on vérifie aisément que la racine $\lambda = 0$ est double, mais n'est pas triple pour tous les mineurs de Δ.

3° Supposons enfin qu'une surface singulière soit un plan double que nous prendrons pour la quadrique T, de sorte que la racine correspondante de l'équation $\Delta = 0$ est $\lambda = 0$. Si nous supposons que le plan $A_1 A_2 A_3$ compté deux fois constitue la surface T, on a

$$g = b_{44} x_4^2,$$

et, par suite,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12}\lambda & a_{13}\lambda & a_{14}\lambda \\ a_{12}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23}\lambda & a_{24}\lambda \\ a_{13}\lambda & a_{23}\lambda & a_{33}\lambda & a_{34}\lambda \\ a_{14}\lambda & a_{24}\lambda & a_{34}\lambda & a_{44}\lambda + b_{44}\mu \end{vmatrix}.$$

Si la racine $\lambda = 0$ n'est que triple pour l'équation $\Delta = 0$, on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

c'est-à-dire que le plan $A_1 A_2 A_3$, non tangent à la quadrique S, la coupe suivant une conique proprement dite. Toutes les quadriques U du faisceau passent par cette conique et sont tangentes entre elles en tout point de cette conique.

Si la racine $\lambda = 0$ est quadruple pour $\Delta = 0$, le plan $A_1 A_2 A_3$ tangent à S coupe S suivant deux droites distinctes sur lesquelles on peut répéter ce qui précède.

Enfin, ajoutons que l'on vérifie aisément que la racine $\lambda = 0$ n'est jamais double pour tous les mineurs du second ordre de Δ, ni jamais triple pour tous les mineurs du premier ordre de Δ.

6. Il va devenir facile maintenant d'étudier la nature des quadriques d'un faisceau, leurs points de contact et

leur courbe d'intersection suivant les propriétés des racines de l'équation $\Delta = 0$. Pour simplifier cette étude, commençons par faire les remarques suivantes :

Si deux quadriques d'un faisceau se touchent en un point, toutes les quadriques du faisceau se touchent en ce point, sauf une, qui admet ce point comme point singulier.

Si deux quadriques ont un point commun, qui n'est singulier pour aucune d'elles, et n'ont pas même plan tangent en ce point, ce point est simple pour leur intersection : car un plan quelconque passant par ce point coupe les deux quadriques suivant deux coniques, pour l'intersection desquelles ce point compte une seule fois.

De même, on voit que si deux quadriques ont un point commun singulier pour l'une d'elles, ce point es multiple pour leur intersection; il en est de même si, le point n'étant singulier pour aucune des deux surfaces, celles-ci ont même plan tangent en ce point.

Une quartique gauche proprement dite ne peut avoir qu'un seul point singulier, qui est double; les tangentes en ce point sont distinctes ou confondues; dans tous les cas, une tangente en un point double coupe la courbe en trois points confondus au point double, et pas davantage. Pour vérifier ces propositions, il suffit de remarquer qu'une quartique gauche est rencontrée par un plan en quatre points seulement. Une cubique gauche n'a pas de points singuliers.

Si l'intersection de deux quadriques contient une courbe plane, cette courbe est une droite ou une conique.

Si un plan coupe deux quadriques suivant une même courbe plane, le faisceau déterminé par ces deux quadriques contient une surface singulière composée de deux plans : car si $x_4 = 0$ est le plan sécant, on a

$$f = x_4\psi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \alpha\varphi(x_1, x_2, x_3),$$
$$g = x_4\chi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \beta\varphi(x_1, x_2, x_3),$$

ψ et χ étant des formes linéaires, φ une forme quadratique, α et β des constantes; donc le faisceau $\lambda f + \mu g = 0$ contient le système de plans $\beta f - \alpha g = 0$.

Enfin, si l'intersection de deux quadriques n'est pas une quartique gauche proprement dite, elle contient au moins une droite ou une conique proprement dite.

7. Ces remarques faites, examinons successivement tous les cas qui peuvent se présenter d'après les propriétés des racines de l'équation $\Delta = 0$.

1° *L'équation* $\Delta = 0$ *a quatre racines simples.*

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières quatre cônes; les points singuliers sont les sommets de ces cônes, et chacun d'eux a pour plan polaire commun, par rapport à toutes les surfaces U, le plan des trois autres. Comme ces points ne sont pas sur les surfaces U, ils forment un tétraèdre.

Les surfaces U ne se touchent en aucun point.

La courbe C du faisceau ne contient pas de conique, sans quoi le faisceau contiendrait un dièdre; elle ne contient pas non plus de droite, car c'est l'intersection de deux cônes n'ayant pas de génératrice commune : c'est donc une quartique gauche proprement dite, sans point singulier, puisque les surfaces U n'ont aucun point de contact.

2° *L'équation* $\Delta = 0$ *a deux racines simples et une racine double n'annulant pas les mineurs du premier ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières

trois cônes ; les points singuliers sont les sommets de ces cônes A, B, C.

Si A est le sommet du cône correspondant à la racine double, toutes les surfaces U sont tangentes en A au plan ABC. Les points B et C n'appartiennent pas aux surfaces U; les plans polaires communs de B et C, par rapport à toutes les surfaces U, passent respectivement par AC et AB, et, par suite, les points A, B, C forment un triangle. Les surfaces U ne se touchent qu'au point A; leur plan tangent commun ne touche pas le cône A.

La courbe C ne contient pas de conique; elle ne contient pas non plus de droite, car c'est l'intersection de deux cônes n'ayant pas de génératrice commune : c'est donc une quartique gauche proprement dite, ayant un point double en A. En ce point les tangentes sont distinctes : ce sont les génératrices d'intersection du cône A avec le plan ABC.

3° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine simple et une racine triple n'annulant pas les mineurs du premier ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières deux cônes; les points singuliers sont les sommets de ces cônes A, B. Si A est le sommet du cône correspondant à la racine triple, toutes les surfaces U sont tangentes en A à un plan passant par AB et tangent au cône A; elles n'ont pas d'autre contact. Le plan polaire commun de B par rapport à toutes les surfaces U passe en A. Comme plus haut, on voit que la courbe C est une quartique gauche proprement dite, ayant en A un point de rebroussement ordinaire : la tangente en ce point est la génératrice de contact du cône A avec le plan tangent commun à toutes les surfaces U en A.

4° *L'équation* $\Delta = 0$ *a deux racines doubles, dont aucune n'annule les mineurs du premier ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières deux cônes, dont les sommets A et B sont les points singuliers du faisceau.

Les surfaces U sont toutes tangentes entre elles en A et B, et n'ont pas d'autre contact; le plan tangent commun en chacun de ces points passe par l'autre, et, par suite, AB est génératrice commune aux surfaces U.

La courbe C du faisceau ne contient pas de conique et contient la génératrice AB une seule fois, puisque les cônes A et B ne sont pas tangents le long de cette droite : elle se compose donc de cette droite et d'une cubique gauche qui la rencontre en A et B.

5° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine quadruple n'annulant pas les mineurs du premier ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient une seule surface singulière, un cône dont le sommet A est le seul point singulier du faisceau. Les surfaces U sont tangentes entre elles en A et n'ont pas d'autre contact; leur plan tangent commun est tangent au cône A suivant une droite D qui appartient à toutes les surfaces U.

La courbe C du faisceau ne contient pas de conique et contient la droite D une seule fois, puisque les surfaces ne sont pas tangentes tout le long de D; elle ne peut d'ailleurs contenir une autre droite, puisque celle-ci appartiendrait au cône A. Elle se compose donc de la droite D et d'une cubique gauche qui lui est évidemment tangente en A.

6° *L'équation* $\Delta = 0$ *a deux racines simples, et une racine double annulant les mineurs du premier ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières

deux cônes de sommets A et B et un dièdre d'arête D. Les points singuliers du faisceau sont les points de D et en outre A et B. Les points A et B ne sont pas sur les surfaces U; la droite D coupe les surfaces U en deux points P et Q, et en chacun de ces points elles sont tangentes aux plans PAB et QAB, distincts des plans du dièdre; elles n'ont d'ailleurs pas d'autre contact.

Les plans polaires communs de A et B par rapport aux surfaces U sont les plans BPQ et APQ; les droites AB et D ne se rencontrent pas.

La courbe C du faisceau s'obtient en coupant le cône A par le dièdre d'arête D, dont les plans ne passent pas par A : elle se compose de deux coniques proprement dites se coupant en P et Q.

7° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine simple, et une racine triple annulant les mineurs du premier ordre* Δ, *mais n'annulant pas les mineurs du second ordre.*

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières un cône de sommet A et un dièdre d'arête D. Les points singuliers du faisceau sont les points de D et le point A.

Le point A n'est pas sur les surfaces U; la droite D touche les surfaces U en un point P, et en ce point elles sont tangentes à un plan passant par A et par D, distinct des plans du dièdre. Le plan polaire commun de A par rapport à toutes les surfaces U passe par D.

Comme plus haut, on voit que la courbe C se compose de deux coniques proprement dites situées dans les plans du dièdre et tangentes entre elles au point A.

8° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine double n'annulant pas les mineurs du premier ordre de* Δ, *et une autre racine double annulant tous ces mineurs.*

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières

un cône de sommet A et un dièdre d'arête D. Les points singuliers du faisceau sont les points de D et le point A. Le point A est situé sur les surfaces U, toutes tangentes en ce point au plan qui passe par A et par D. La droite D coupe la surface U en deux points P et Q, et en chacun de ces points les surfaces ont un même plan tangent passant par A et distinct des plans du dièdre. Les surfaces U ont donc un triple contact.

L'un des plans du dièdre est le plan APQ, et, par suite, la courbe C se compose d'une conique proprement dite et de deux droites se coupant en A et rencontrant cette conique en P et Q.

9° *L'équation $\Delta = 0$ a deux racines doubles dont chacune annule les mineurs du premier ordre de Δ.*

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières deux dièdres d'arêtes D et D' qui ne se rencontrent pas. Chacune d'elles coupe les surfaces U en deux points, P et Q pour D, P' et Q' pour D'. En chacun de ces points les surfaces U sont tangentes et, par suite, elles ont un quadruple contact. Le plan tangent commun en P est le plan PP'Q', appartenant au dièdre d'arête D', et ainsi des autres.

La courbe C se compose évidemment des quatre droites PP', PQ', QP', QQ', qui forment un quadrilatère gauche.

10° *L'équation $\Delta = 0$ a une racine quadruple annulant les mineurs du premier ordre de Δ, mais n'annulant pas les mineurs du second ordre; en outre, cette racine n'est pas double pour tous les mineurs du premier ordre.*

Le faisceau Φ contient comme seule surface singulière un dièdre d'arête D; les points singuliers sont les points de D. La droite D touche les surfaces U en un point P; et, en ce point, toutes les surfaces U sont tangentes entre elles, et n'ont d'ailleurs pas d'autre contact. Leur plan tangent, commun en P, est l'un des plans du dièdre.

La courbe C se compose alors évidemment d'une conique proprement dite et de deux droites se coupant sur cette conique et situées dans un autre plan.

11° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine quadruple annulant les mineurs du premier ordre de* Δ, *mais n'annulant pas les mineurs du second ordre; en outre, cette racine est double pour tous les mineurs du premier ordre.*

Le faisceau Φ contient comme seule surface singulière un dièdre d'arête D; les points singuliers sont les points de D. La droite D est située sur les surfaces U qui se raccordent le long de cette droite.

La courbe C se compose évidemment de la droite D comptée deux fois et de deux droites rencontrant D en des points différents et déterminant avec D deux plans différents.

12° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine simple, et une racine triple annulant les mineurs du second ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient comme surfaces singulières un cône de sommet A et un plan double P. Les points singuliers sont le point A et les points de P. Les surfaces U ne passent pas en A; le plan polaire commun de A par rapport aux surfaces U est le plan P. Le plan P coupe les surfaces U suivant une conique proprement dite, le long de laquelle les surfaces se raccordent; les plans tangents le long de cette conique passent tous par A.

La courbe C se compose de cette conique comptée deux fois.

13° *L'équation* $\Delta = 0$ *a une racine quadruple annulant les mineurs du second ordre de* Δ.

Le faisceau Φ contient, comme surface singulière, un plan double P dont les points sont les points singuliers. Ce plan est tangent aux quadriques U et les coupe suivant deux droites le long desquelles ces surfaees se raccordent.

La courbe C se compose de ces deux droites comptées chacune deux fois.

8. Nous avons ainsi épuisé tous les cas possibles, et, chaque fois, nous sommes arrivés à des conclusions distinctes. Donc nous avons caractérisé toutes les espèces possibles de faisceaux de quadriques, et toutes les formes possibles de l'intersection de deux quadriques.

Il serait facile, comme application, d'étudier la situation respective des deux coniques que l'on obtient en coupant deux quadriques par un même plan passant par un point singulier de l'intersection.

Il est facile aussi de voir qu'un faisceau Φ de quadriques est complètement déterminé par la courbe C de ce faisceau toutes les fois que cette courbe ne contient ni conique double ni droite double. Si cette eourbe contient une seule droite double, il faut se donner en outre le plan tangent aux quadriques du faisceau en un point de cette droite autre que ses points d'intersection avec les deux autres droites qui appartiennent à la courbe. Si cette courbe est une conique double, il faut se donner en outre les plans tangents en trois points de cette conique; si elle est formée par deux droites doubles, il faut se donner les plans tangents aux quadriques en deux points de l'une de ces droites et en un point de l'autre.

Enfin, ajoutons qu'il serait facile de transformer, par la méthode des polaires réciproques, tout ce que nous avons dit et de faire une théorie toute pareille pour un faisceau tangentiel de quadriques et la développable circonscrite à deux quadriques : en faisant cette transformation, on remarquera d'ailleurs que $f' = 0$ et $g' = 0$ étant les équations tangentielles de deux quadriques dont les équations ponctuelles sont $f = 0$ et $g = 0$, les racines du discriminant de la forme $\lambda f' + \mu g'$ se déduisent par une transformation simple de celles du discriminant de la forme $\lambda f + \mu g$, et par suite jouissent des mêmes propriétés caractéristiques.

[O8d] THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE;

PAR M. RAYMOND SÉE,
Élève à l'École Polytechnique.

Un plan se déplace en restant tangent à une surface; pour une quelconque de ses positions sa caractéristique passe par le point où il touche cette surface.

Appelons (a) la courbe lieu des points de contact du plan mobile et de la surface donnée, et a le point où le plan, dans une de ses positions, touche cette surface. On peut supposer que le point a est un point marqué du plan mobile et assujettir ce point à décrire (a) lorsque ce plan se déplace.

Dans l'une quelconque de ses positions, le plan est tangent en a à (a), autrement dit, la trajectoire de a

est tangente à ce plan; mais on sait [1] que *les points d'un plan mobile, qui décrivent des lignes tangentes à ce plan, appartiennent à sa caractéristique;* donc, le théorème est démontré [2].

Conséquences. — Si un plan mobile passe successivement par les génératrices d'une surface réglée, pour une position quelconque de ce plan, sa caractéristique passe par le point où il touche la surface réglée [3].

Parce que le plan mobile, dans ses différentes positions, est tangent à la surface réglée.

Quand un plan se déplace en restant tangent à deux surfaces, ou lignes, il enveloppe une surface développable : on obtient une génératrice de cette surface en menant la droite qui passe par les points où le plan, dans l'une quelconque de ses positions, touche les deux surfaces ou lignes données [4].

Parce que cette droite est la caractéristique du plan mobile.

---

[1] MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive,* 2e édition, p. 247.

[2] La même démonstration s'applique au cas où le plan mobile reste tangent à une ligne donnée (a).

[3] *Loc. cit.*, p. 294.

[4] *Loc. cit.*, p. 400.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE JUILLET 1895. — COMPOSITIONS.

Montpellier.

Analyse. — *Déterminer une courbe plane telle que la portion de tangente comprise entre le point de contact et une droite fixe ait une longueur donnée. Etudier la forme de la courbe; calculer son rayon de courbure, et les coordonnées du centre de courbure. Déterminer sa développée. Calculer l'aire comprise entre la courbe, une normale et la développée.*

Solution. — Cette courbe est connue sous le nom de *tractrice*. OY étant la droite donnée, elle doit vérifier l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2 - x^2}{x^2},$$

d'où

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}\sqrt{a^2 - x^2};$$

la valeur positive de $\sqrt{a^2 - x^2}$ donnant la portion de courbe située dans l'angle XOY, la valeur négative donne une branche symétrique; x variant de o à a, y varie de $+\infty$ à o, ce qui indique la forme de la courbe. Les formules connues donnent le rayon et le centre de courbure

$$R = \frac{a}{x}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad \begin{cases} X = \dfrac{a^2}{x}, \\ Y = y + R\dfrac{x}{a} = a \log \dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}; \end{cases}$$

la développée est une chaînette dont le sommet est le point (a, o).

Soit ω l'angle de la normale avec OY; l'aire cherchée est

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\omega R^2 d\omega = \frac{a^2}{2}\int_0^\omega \operatorname{tang}^2\omega \, d\omega$$
$$= \frac{a^2}{2}(\operatorname{tang}\omega - \omega) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \operatorname{arc\,cos}\frac{x}{a}\right).$$

Mécanique. — *Une plaque circulaire infiniment mince, homogène et pesante, touche par l'un de ses points un plan horizontal fixe parfaitement poli. Le centre de gravité de la plaque étant maintenu fixe, on imprime à celle-ci une rotation ω autour du rayon qui passe par le point de contact avec le plan fixe; puis on l'abandonne aux forces qui la sollicitent.*

On demande d'étudier le mouvement de la plaque, et en particulier d'indiquer la forme de la courbe que décrit sur le plan fixe le point de contact avec la plaque.

Solution. — OXY étant le plan horizontal fixe, ox, oy deux rayons du disque, soient M sa masse, ρ son rayon, et MR la réaction verticale appliquée au point de contact. Soit (X, Y, Z) le centre du disque; on a

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2Y}{dt^2} = o, \qquad \frac{d^2Z}{dt^2} = R - g.$$

Les moments d'inertie sont $A = B = M\frac{\rho^2}{4}$, $C = M\frac{\rho^2}{2}$, et les équations d'Euler donnent, pour le mouvement autour du centre de gravité,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dp}{dt} + qr\right)\frac{\rho^2}{4} &= \mathrm{R}\rho\cos\theta\cos\varphi,\\
\left(\frac{dq}{dt} - pr\right)\frac{\rho^2}{4} &= -\mathrm{R}\rho\cos\theta\cos\varphi,\\
\frac{dr}{dt} &= 0,
\end{aligned}$$

où

$$\left\{\begin{aligned}
&p\sin\varphi + q\cos\varphi = \sin\theta\frac{d\psi}{dt},\\
&q\sin\varphi - p\cos\varphi = \frac{d\theta}{dt},\\
&r = \frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta\frac{d\psi}{dt}.
\end{aligned}\right.$$

Enfin, l'équation $Z = \rho\sin\theta$ exprime que le disque reste tangent au plan XOY.

Pour $t = 0$, soit $\varphi_0 = \psi_0 = 0$; les conditions de l'énoncé donnent

$$X = Y = 0, \qquad p_0 = r_0 = \theta'_0 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad r = 0,$$

ce qui simplifie les équations précédentes. En éliminant p, q et Z, on a

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\psi}{dt^2}\sin\theta + \frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0,\\
&\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}\sin\theta - \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{4}{\rho}\mathrm{R}\cos\theta,\\
&\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\theta = \frac{\mathrm{R} - g}{\rho},\\
&\frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta\frac{d\psi}{dt} = 0.
\end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cot\theta = 0,$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dt}\sin^2\theta = \alpha = q_0 \sin\theta_0,$$

puis

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(3 + 2\cos 2\theta) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 2\sin 2\theta + \frac{4g}{\rho}\cos\theta - \alpha^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = 0,$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cos 2\theta + \frac{4g}{\rho}\sin\theta + \frac{\alpha^2}{2\sin^2\theta}$$
$$= \beta = \frac{q_0^2}{2} + \frac{4g}{\rho}\sin^2\theta_0,$$

ou encore

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{\sin\theta_0 - \sin\theta}{5 - 4\sin^2\theta}\left(\frac{8g}{\rho} - q_0^2\frac{\sin\theta + \sin\theta_0}{\sin^2\theta}\right),$$

et

$$R = \frac{\sin\theta}{(5 - 4\sin^2\theta)^2}\left[\rho q_0^2 \sin^2\theta_0 \frac{1 + 4\cos^4\theta}{\sin^4\theta} - \rho q_0^2 + g\left(4\sin\theta + \frac{5}{\sin\theta} - 8\sin\theta_0\right)\right].$$

Pour $t = 0$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ et par suite $\frac{d\theta}{dt}$ prennent le signe de $q_0^2 - \frac{4g}{\rho}\sin\theta_0$.

Si $q_0^2 < \frac{8g}{\rho(1 + \sin\theta_0)}$, $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule pour une valeur θ_1 de θ comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et θ variera entre θ_0 et θ_1. Dans ce cas, R reste positif, de même que $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$. Les coordonnées polaires du point de contact sont

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \psi, \qquad r = \rho\cos\theta,$$

ce qui permet de déterminer la forme de la courbe, $\frac{dr}{dt}$ s'annulant pour $\theta = \theta_0$ et θ_1; les valeurs correspondantes de ω sont données par une intégrale définie, $\frac{d\psi}{d\theta}$ étant une fonction connue de θ.

Si $q_0^2 < \frac{4g}{\rho} \sin\theta_0$, on a

$$\theta_1 > \theta_0, \qquad \text{sinon} \qquad \theta_1 < \theta_0;$$

mais le mouvement est le même dans ces deux cas, qui ne diffèrent que par le choix de la position initiale.

Si $q_0^2 = \frac{4g}{\rho} \sin\theta_0$, θ reste constant, et l'on a

$$\psi = \frac{q_0}{\sin\theta_0} \times t, \qquad \varphi = q_0 \cot\theta_0 \times t.$$

Si $\frac{4g}{\rho} \sin\theta_0 < q_0^2 < \frac{g}{\rho \cos^2\theta_0}(9 - 8\sin\theta_0)$, θ varie entre θ_0 et $\frac{\pi}{2}$, R reste encore positif, le disque passe par une position verticale, pour laquelle $\frac{d\varphi}{dt}$ s'annule, $\frac{d\psi}{dt}$ reste positif.

Si $q_0^2 > \frac{g}{\rho \cos^2\theta_0}(9 - 8\sin\theta_0)$, θ augmente aussi; mais pour une valeur de θ, comprise entre θ_0 et $\frac{\pi}{2}$, R devient nul, puis négatif; le point de contact quittera alors le plan, et le mouvement cesse de correspondre aux conditions de l'énoncé, le disque n'étant plus soumis qu'à son poids jusqu'au moment où il reviendra en contact avec le plan XOY. Le mouvement autour du centre de gravité est alors celui d'un corps qui n'est soumis à aucune force extérieure.

Épreuve pratique. — *Connaissant la longitude v d'une planète dans son orbite, ainsi que l'inclinaison ω de l'orbite et la longitude Ω du nœud ascendant, calculer la longitude et la latitude héliocentrique.*

$$v = 178°19'13'',4,$$
$$\omega = 7°\ 6'56'',7,$$
$$\Omega = 235°42'\ 8'',1.$$

SESSION DE NOVEMBRE 1895. — COMPOSITIONS.

Besançon.

ANALYSE. — *Un hyperboloïde de révolution à une nappe est donné par le rayon a du cercle de gorge et par l'angle ω que font les génératrices avec le plan de ce cercle. Déterminer les courbes de cette surface telles que l'angle* α_1 *sous lequel une de ces courbes coupe les génératrices de l'un des deux systèmes soit une fonction donnée de la distance r du point d'intersection de la courbe et de la génératrice au point où cette même génératrice rencontre le cercle de gorge.*

APPLICATION.

$$\cos\alpha = \pm \frac{a^2(1 - 2\cos^2\omega) + r^2\cos^2\omega}{a^2 + r^2\cos^2\omega};$$

on achèvera l'intégration dans tous les cas qui se présentent, de manière à avoir les intégrales sous forme réelle ; on discutera et l'on indiquera la forme des courbes obtenues.

Soit $\cos\alpha = f(r)$; $f(r)$ pourra être considéré comme donné. Les coordonnées d'un point de l'hyperboloïde peuvent être représentées par

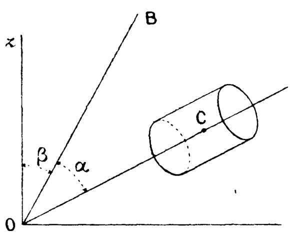
$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta - r\cos\omega\sin\theta,\\ y &= a\sin\theta + r\cos\omega\cos\theta,\\ z &= r\sin\omega, \end{aligned}$$

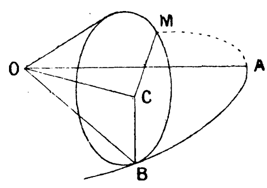
r et θ étant variables. Les courbes cherchées sont définies par l'équation différentielle

$$d\theta = \frac{a\cos\omega(f^2 - 1) \pm f\sqrt{(1 - f^2)(a^2\sin^2\omega + r^2\cos^2\omega)}}{a^2\cos^2\omega - a^2 f^2 - r^2 f^2\cos^2\omega}\,dr;$$

on voit qu'elles s'obtiennent par une quadrature. Dans l'application indiquée, la quantité placée sous le radical devient carré parfait. A l'un des signes du radical correspondent les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde du second système; à l'autre signe, des courbes dont l'équation est facile à obtenir sous forme finie. Cette équation contient des fonctions trigonométriques ou des exponentielles, suivant que ω est supérieur ou inférieur à 60°.

MÉCANIQUE. — 1° *Un cylindre de révolution dont l'axe est* OA *est mobile autour de la droite fixe* OB. *L'angle* BOA *est constant; discuter la durée d'une petite oscillation en fonction de l'angle* β *de* OB *avec la verticale et de la distance* $OC = l$ (C *centre de gravité*).





2° *Un cône droit dont l'angle est* 2β *est chargé d'un poids* M *appliqué en un point de sa surface. Déterminer le mouvement de ce point quand on écarte le cône de sa position d'équilibre. On suppose le cône sans masse et assujetti à rouler sur un plan horizontal.*

1er PROBLÈME. — Calculer les moments principaux d'inertie du cylindre relatifs à son centre de gravité. En déduire, d'après les formules connues, son moment d'inertie par rapport à une parallèle à OB menée par le point C, et enfin son moment d'inertie par rapport à OB. Le mouvement sera donné par le théorème des aires. Il a lieu sous l'action de la composante de la pesanteur dans un plan perpendiculaire à OB.

2ᵉ Problème. — Soient θ l'angle que fait, dans le cône droit, le plan méridien du point M avec le plan méridien vertical, v la vitesse du point M. On peut prendre la masse de ce point et la longueur OM égales à 1. On a

$$v^2 = \sin^2\beta \cos^2\beta (1 - \cos\theta)(1 + \cos^2\beta + \sin^2\beta \cos\theta)\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

En appliquant le principe des forces vives

$$dt = \sin\beta \cos\beta \sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1 + \cos^2\beta + \sin^2\beta\cos\theta}{h - g\sin\beta\cos\beta(1-\cos\theta)}},$$

intégrale elliptique. Dans un cas particulier remarquable le radical se réduit à une constante.

Épreuve pratique. — *En un lieu de latitude,*

$$\varphi = 47°54'19'',$$

on a observé l'azimut $a = +54°46'31''$ *et la hauteur* $h = 39°18'27''$ *d'une étoile, à l'heure sidérale locale* $\theta = 8^h 13^m 52^s,3$, *la température étant* $T = 23°,7$, *la pression atmosphérique* $p = 742^{mm},65$.

On demande :

1° *De corriger* h *de la réfraction ;*

2° *De calculer l'ascension droite et la distance polaire* $\mathfrak{P}$ *de l'étoile.*

Bordeaux.

Mathématiques. — *Calculer l'intégrale indéfinie*

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^2\sqrt{x^2-1}},$$

a étant un nombre positif supérieur à l'unité.

L'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{L}\frac{dy}{dx} + \mathrm{M}y = 0,$$

est telle que si $y = y_1$ *est solution de l'équation,* $y = y_1^2$ *est également une solution.*

Déterminer la fonction y_1.

Établir la condition qui doit être remplie par les fonctions L *et* M *pour que l'équation admette des solutions de la nature indiquée précédemment.*

Mécanique. — 1. *Un système de forces est constitué par* n *forces fixes et une force dirigée suivant une droite fixe, mais dont l'intensité est variable. On demande le lieu de l'axe central du système.*

Cas particuliers : 1° *la direction de la force variable rencontre l'axe central du système des* n *forces fixes;* 2° *elle est parallèle à cet axe central.*

2. *Une plaque invariable de forme quelconque est mobile dans son plan autour d'un point* O, *avec frottement; le frottement se traduisant par un couple qui agit en sens inverse de la rotation instantanée, et dont le moment est proportionnel à la pression de la plaque avec le point* O.

Aucune force extérieure ne sollicitant le système, on assujettit le point O *à prendre un certain mouvevement rectiligne.*

Déterminer ce mouvement rectiligne et les conditions initiales du mouvement de la plaque, de manière que le mouvement angulaire de celle-ci soit (au moins pendant un certain intervalle de temps) uniforme.

Calcul. — *Calculer pour Bordeaux, et pour le* 18 *novembre* 1895, *l'heure et l'azimut du coucher du*

Soleil :

Latitude de Bordeaux....................	$44°.50'.\ 7'',2$
Déclinaison du Soleil à midi vrai (18 nov.).	$-19.14.48,8$
» (19 nov.).	$-19.28.57,4$

Les formules à employer sont :

$$\cos t_0 = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta,$$

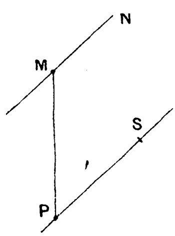
$$\operatorname{tang} A = \frac{\cos\delta \sin t_0}{-\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t_0}.$$

Clermont.

Analyse. — *Par le pied* P *de chaque ordonnée,* PM $= z$, *d'une surface, on mène une parallèle à la normale en* M *à cette surface. Montrer que pour que les droites ainsi obtenues soient normales à une surface, il faut que* $p^2 + q^2$ *soit une fonction de* z, p *et* q, *dérivées partielles de* z. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue.*

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale; les coordonnées de S sont

$$x + \rho\alpha, \qquad y + \rho\beta, \qquad \rho\gamma;$$



quand x varie seul, les cosinus directeurs du déplacement sont

$$1 + \alpha\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \quad \beta\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial\beta}{\partial x}, \quad \gamma\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial\gamma}{\partial x}.$$

Écrivons que ce déplacement est normal à $p\rho$; on trouve

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\alpha;$$

on aurait de même $\frac{\partial\rho}{\partial y} = -\beta$. La condition cherchée est

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\partial\beta}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

ou

$$p\left(p\,\frac{\partial p}{\partial y} + q\,\frac{\partial q}{\partial y}\right) - q\left(p\,\frac{\partial p}{\partial x} + q\,\frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0.$$

Le déterminant fonctionnel de z et de $p^2 + q^2$ est nul.

Remarque. — Le long d'une section horizontale, la normale fait un angle constant; ces sections sont des lignes de courbure. Résultat analogue pour le lieu de S.

Astronomie. — *Prendre dans la* Connaissance des Temps *les trois coordonnées écliptiques héliocentriques vraies de Vénus :*

longitude $\mathcal{L}$, latitude B, distance r au Soleil,

et les trois coordonnées écliptiques vraies du Soleil :

longitude L — 180°, latitude α, distance R à la Terre,

le 12 *septembre* 1895 *à midi moyen de Paris; en déduire les trois coordonnées écliptiques géocentriques vraies de Vénus, au même instant t :*

longitude λ, latitude β, distance D à la Terre.

Démontrer d'abord les formules de résolution

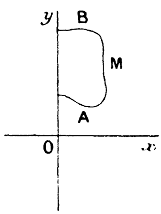
$$\begin{aligned}
D\cos\beta\cos\lambda &= r\cos B\cos\mathcal{L} - B\cos\alpha\cos L,\\
D\cos\beta\sin\lambda &= r\cos B\sin\mathcal{L} - R\cos\alpha\sin L,\\
D\sin\beta &= r\sin\beta \quad - R\sin\alpha.
\end{aligned}$$

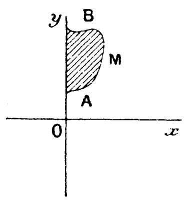
Nancy.

Analyse. — Première question. — *Les axes* Ox, Oy *étant rectangulaires, et* A *et* B *étant deux points donnés sur* Oy, *calculer l'intégrale curviligne*

$$\int [\varphi(y)e^x - my]\,dx + [\varphi'(y)e^x - m]\,dy,$$

prise le long d'un chemin quelconque AMB, *allant du point* A *au point* B, *mais limitant avec* AB *une aire* AMBA *de grandeur donnée* S; *m désigne une constante, et* $\varphi(y)$ *une fonction de* y *définie et continue, ainsi que sa dérivée* $\varphi'(y)$.





Deuxième question. — 1° *Définir, d'après Lagrange, l'intégrale complète, l'intégrale générale, l'intégrale singulière d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre entre deux variables indépendantes et une fonction z de ces variables.*

2° *Étant donnée la relation*

$$2m(x + ay + b) = z\sqrt{z^2 + a^2} + a^2 \log\left(z + \sqrt{z^2 + a^2}\right),$$

où a, b *et* m *sont des constantes, en déduire l'équation aux dérivées partielles du premier ordre indépendante de* a *et de* b, *à laquelle satisfait la fonction* z *des deux variables* x *et* y. *Intégrer cette équation. Revenir à la relation proposée en élimi-*

nant la fonction arbitraire de l'intégrale générale

$$\int_{\text{AMB}} = \int_{\text{AMBA}} + \int_{\text{AB}}.$$

1. On est ramené à une intégrale suivant le contour fermé AMBA, et à une intégrale le long de AB.

La première s'évalue par la formule de Green. Supposons l'aire à droite de AB,

$$\int_{\text{AMBA}} \text{P}\,dx + \text{Q}\,dy = \int\int_{\text{aire AMBA}} \left(\frac{\partial \text{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \text{P}}{\partial y}\right) dx\,dy$$
$$= \int\int_{\text{aire}} m\,dx\,dy = m\text{S}.$$

Si l'aire est à gauche, on a $-m\text{S}$.

De plus

$$\int_{\text{AB}} = \int_a^b dy[\varphi'(y)e^x - m] = e^x[\varphi(b) - \varphi(a)] - m(b-a).$$

Donc

$$\int_{\text{AMB}} = \pm m\text{S} + e^x[\varphi(b) - \varphi(a)] - m(b-a),$$

2. Étant donnée l'équation

$$2m(x+y+b) = z\sqrt{z^2+a^2} + a^2\log\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right),$$

les dérivées, par rapport à x et y, donnent, en posant $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$,

$$m = \sqrt{z^2+a^2}\,p, \qquad ma = \sqrt{z^2+a^2}\,q.$$

En éliminant a entre les dernières, on a

$$a^2 = p^2z^2 + q^2.$$

Pour intégrer, on remarque que, l'équation renfermant z, p et q, on est conduit à poser $z = f(x+ay)$, où a est une constante, ou bien $x + ay = \varphi(z)$, ce qui donne

$$p\,\varphi'(z) = 1, \qquad q\,\varphi'(z) = a$$

et

$$m^2 = \frac{z^2 + a^2}{\varphi'(z)^2}.$$

Donc

$$m\,\varphi'(z) = \sqrt{z^2 + a^2},$$

$$m[\varphi(z) + b] = \int \sqrt{z^2 + a^2}\,dz$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[z\sqrt{z^2 + a^2} + a^2 \log\left(z + \sqrt{z^2 + a^2}\right)\right];$$

d'où, enfin,

$$2m(x + ay + b) = z\sqrt{z^2 + a^2} + a^2 \log\left(z + \sqrt{z^2 + a^2}\right),$$

qui est la relation qui a servi de point de départ. On a ainsi une intégrale complète; on en déduit toutes les autres.

MÉCANIQUE. — *Un point pesant de masse égale à un gramme est lancé dans le plan vertical perpendiculaire au méridien du lieu sous un angle de 60° vers l'est ou vers l'ouest.*

L'intensité de la vitesse initiale a été déterminée au moyen d'un pendule balistique; le point matériel, lancé horizontalement avec cette vitesse, est venu se fixer au centre de gravité du pendule; la distance du centre de gravité à l'axe de suspension du pendule et le rayon de giration du pendule par rapport à son axe de suspension sont tous deux égaux à un décimètre; la masse du pendule est égale à 10kg; *lorsque, par suite du choc, le pendule s'est élevé, l'angle d'écart avec la verticale a été de* 60°.

On tient compte de la rotation de la Terre, on prend $\omega = 0{,}000073$; *on néglige* ω^2; *la latitude du lieu est égale à* 45°. *Déterminer le point de rencontre du mobile avec le plan horizontal passant par sa position initiale.*

1° Détermination de la vitesse initiale du projectile par le pendule balistique.

Si v_0 est la vitesse du projectile avant le choc, ω_0 la vitesse commune du pendule et du projectile après, on a

$$m v_0 a = (\mathrm{MK}^2 + m a^2)\omega_0,$$

où $m =$ la masse du projectile $= 1^{\mathrm{gr}}$, M celle du pendule $= 10000^{\mathrm{gr}}$, a la distance du projectile à l'axe de suspension $= 10^{\mathrm{cm}}$ et K le rayon de giration $= a$ dans le problème.

Le pendule composé donne, pour l'angle maximum d'écart θ, l'équation

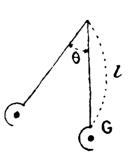
$$\omega_0 = 2\sqrt{g\frac{\mathrm{M}l + ma}{\mathrm{MK}^2 + ma^2}}\sin\frac{\theta}{2}.$$

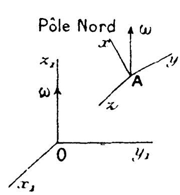
D'où ici, comme l, distance du centre de gravité à l'axe de suspension, est égale à a, comme K,

$$\omega_0 = 2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}, \qquad v_0 = \frac{m+\mathrm{M}}{m}\,2\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{ga}.$$

Le cas actuel, où $al = \mathrm{K}^2$ est celui où il n'y a pas de percussion sur l'axe de suspension. Avec les données ($\theta = 60°$),

$$v_0 = 10001\sqrt{9809^{\mathrm{cm}}}.$$





2° Étudions le mouvement d'un projectile à la surface de la Terre, lancé avec la vitesse v_0 dans un plan vertical. Nous prenons comme axes fixes des axes passant par le centre de la Terre, Oz, vers le pôle nord, de façon que la rotation $o\omega$ soit positive ; au point A, nous prenons un trièdre de même sens, dont Ax est tangent au méridien vers le nord, Ay au parallèle vers l'est; Az est la verticale vers le centre de la Terre. Les équations du mouvement relatif sont ici

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2m\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt},$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = 2m\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} + 2m\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt},$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -2m\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt} + mg,$$

et il faut les intégrer; les conditions initiales sont, en supposant le mobile lancé vers l'est dans le plan zAy, sous l'angle α avec la verticale vers le haut,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = v_0\cos\alpha, \qquad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = -v_0\sin\alpha.$$

En négligeant ω, on aurait la première approximation

$$x = 0, \qquad y = v_0 t\cos\alpha, \qquad z = -v_0\sin\alpha\, t + \frac{1}{2}gt^2;$$

en appelant ξ, η, ζ les accroissements développés suivant les puissances de ω, limités à la première puissance, on a

$$\xi = -\omega v_0\cos\alpha\sin\lambda\, t^2,$$
$$\eta = +\omega\cos\lambda\left(-v_0\sin\alpha\, t^2 + \frac{gt^3}{3}\right),$$
$$\zeta = -\omega\cos\lambda\, v_0\cos\alpha\, t^2.$$

Pour que le point atteigne le plan horizontal, il faut poser $z = 0$, ce qui donne

$$t\left(-v_0\sin\alpha + g\frac{t}{2} - \omega\cos\lambda\, v_0\cos\alpha\, t\right) = 0,$$
$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g - 2\omega\cos\lambda\, v_0\cos\alpha}.$$

En remplaçant et se limitant aux termes en ω, on a

$$x = -\frac{4v_0^3}{g^2}\sin^2\alpha\cos\alpha\,\omega\sin\lambda,$$

$$y = \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} + \frac{4}{3}\omega\cos\lambda\frac{v_0^3\sin\alpha}{g^2}(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Pour $\alpha = 60°$, le terme complémentaire de y est nul ; donc l'y du point d'arrivée est le même que si ω est nul, et il y a toujours une petite déviation vers le sud.

Pour $\alpha = 60°$, $\lambda = 45°$, on a

$$x = -\frac{3}{4}\omega\sqrt{2}\frac{v_0^3}{g^2}, \qquad y = \frac{2v_0^2\sqrt{3}}{4g}.$$

Calcul d'Astronomie. — *Déterminer l'azimut et la distance zénithale d'un astre dont les coordonnées, ascension droite et distance polaire, sont*

$$Æ = 18^h 15^m 53^s,7, \qquad \delta = 25°37'26'',4.$$

La latitude du lieu est $\lambda = 48°41'31''$, *et l'heure de l'observation est* $14^h 28^m 35^s,4$.

Poitiers.

Analyse. — I. *Dans un plan, on donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy; *de l'origine* O, *on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à la courbe enveloppe des droites représentées par l'équation*

$$x\cos\omega + y\sin\omega = f(\omega).$$

[$f(\omega)$ *est une fonction connue du paramètre* ω].

Trouver l'aire de la courbe, lieu des pieds de ces perpendiculaires. Application à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

II. *On donne trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz : *que représente l'équation*

$$(x + my)^2 = a^2(1 + m^2)(x^2 + y^2 + z^2)?$$

(*a et m sont deux constantes réelles*)?

Soit $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, *éliminer la fonction* $F(\rho)$ *de l'équation*

$$[x + yF(\rho)]^2 = a^2[1 + F^2(\rho)](x^2 + y^2 + z^2).$$

Chercher si l'équation aux dérivées partielles (*linéaire*) *ainsi obtenue admet des solutions vérifiant aussi l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution autour de l'axe* Oz.

MÉCANIQUE. — *Un point matériel est assujetti à se mouvoir sur une courbe fixe, plane. On propose de déterminer la nature de cette courbe, sachant que la force motrice donnée* F, *dérivant d'un potentiel, agit dans le plan de la courbe, et que la réaction normale* N *est aussi une fonction connue des coordonnées du point. Applications :*

1°	$F = \mu y$,	$N = 0$,	$v_0 = y_0\sqrt{\mu}$,
2°	$F = -\mu y$,	$N = \mu y_0 \cos\varphi$,	$v_0 = 0$.

φ *est l'angle de la tangente à la courbe avec l'axe des* x.

ASTRONOMIE. — *On a observé dans un même vertical au même instant deux étoiles dont les coordonnées sont connues. Trouver l'heure sidérale de l'observation.*

Étoiles.	Ascension droite.	Déclinaison.
α Grande Ourse	$10^h 57^m 15^s$	$+62^\circ 19' 3'',5$
ζ Grande Ourse	$13^h 19^m 42^s$	$+55^\circ 28' 25''$

Latitude du lieu : $46^\circ 35' 5''$ boréale.

Toulouse.

Analyse. — I. *On considère la surface algébrique du troisième ordre définie par les formules*

$$x = \frac{u^2 + v^2}{2(u^2 - 1)},$$
$$y = v,$$
$$z = \frac{u(v^2 + 1)}{u^2 - 1},$$

qui déterminent les coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z d'un de ses points en fonction de deux paramètres u et v :

1° *Montrer que cette surface passe par la parabole* P *définie par les équations*

$$z = 0, \qquad y^2 + 2x = 0,$$

et calculer ses rayons de courbure principaux en un point pris sur cette parabole P;

2° *Déterminer ses ombilics et ses lignes asymptotiques.*

II. *Déterminer les constantes α, β, γ de façon que, parmi les solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre*

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

se trouve un polynome entier en x. Comme application, trouver l'intégrale générale de cette équation dans le cas particulier où l'on a

$$\gamma = \alpha, \qquad \beta = -2.$$

I. — Un calcul facile donne pour les six quantités E, F, G, D, D′, D″ (Notations des *Leçons* de M. Darboux,

t. III, p. 242 et suivantes) relatives à la surface qui figure dans la première question d'Analyse :

$$E = \frac{(1+v^2)^2[u^2+(1+u^2)^2]}{(u^2-1)^4}, \qquad D = \frac{(1+v^2)^2}{(u^2-1)^3}.$$

$$F = -\frac{uv(1+v^2)[1+2(1+u^2)]}{(u^2-1)^3}, \qquad D' = 0,$$

$$G = \frac{v^2+(u^2-1)^2+4u^2v^2}{(u^2-1)^2}, \qquad D'' = -\frac{1+v^2}{(u^2-1)^2}.$$

De ces expressions résulte immédiatement la solution de la question. La parabole P est définie dans le système (u, v) par l'équation $u=0$; tous ses points sont des ombilics. L'équation différentielle des asymptotiques, savoir

$$\frac{du^2}{u^2-1} = \frac{dv^2}{v^2+1},$$

s'intègre immédiatement.

La surface précédente n'est autre que celle considérée par M. de Saint-Germain dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, t. XII, 1re Partie, p. 177-180; 1888).

II. — L'équation différentielle dont il s'agit est celle de la série hypergéométrique; elle admet comme solution un polynome entier si l'un des nombres α, β est un entier négatif; les candidats n'avaient pour l'établir qu'à substituer un polynome entier de degré n dans le premier membre de l'équation et à chercher si le polynome de degré n, résultat de la substitution, pouvait être nul identiquement; on trouve d'abord, en égalant à zéro le coefficient de x^n,

$$(n+\alpha)(n+\beta) = 0,$$

ce qui prouve que l'un des nombres α, β doit être un entier négatif, et cette condition, comme on le reconnaît immédiatement en poursuivant l'identification, est suffisante pour l'existence d'un polynome satisfaisant à l'équation, et dont le degré est égal à celui des deux nombres $-\alpha$, $-\beta$ qui est entier.

Dans le cas où $\gamma = \alpha$, $\beta = -2$, on obtient par ce qui précède la solution particulière

$$(1-x)^2,$$

et par l'application du procédé classique de réduction, on parvient à l'intégrale générale au moyen de quadratures.

MÉCANIQUE. — *Trouver la figure d'équilibre d'un fil flexible, inextensible, homogène, de longueur donnée, attaché par ses deux extrémités à deux points fixes et sollicité par une force émanant d'un point fixe et proportionnelle à une fonction donnée de la distance de chacun de ses points au point fixe.*

Calculer la tension du fil en chaque point; former l'équation différentielle de la courbe d'équilibre.

Examiner les cas particuliers suivants : 1° *la force qui sollicite chaque point du fil est attractive et proportionnelle à une puissance donnée du rayon vecteur issu du point fixe;* 2° *la force est proportionnelle au rayon vecteur.*

Le commencement de la question de Mécanique n'est autre que la question de Cours traitée, par exemple, dans le *Traité de Mécanique* de M. Appell (t. I, p. 193 et suiv.); les deux cas particuliers à traiter en sont une application immédiate.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Le* 13 *janvier* 1895, *à midi moyen de Paris, la déclinaison du Soleil a été*

$$-21^\circ 48' 17'',5;$$

le 20 *mars, à la même heure* $-0^\circ 8' 52'',3$.

La différence des ascensions droites du Soleil à ces deux dates a été $4^h 27^m 33^s,72$.

Calculer l'obliquité de l'écliptique.

Si l'on désigne par α, α' les ascensions droites du Soleil aux époques considérées et par δ, δ' les déclinaisons correspondantes, on a, d'après la formule

$$\operatorname{tang} b = \sin c \operatorname{tang} B$$

relative aux triangles rectangles, les relations

$$\operatorname{tang}\delta = \sin\alpha \operatorname{tang}\omega,$$
$$\operatorname{tang}\delta' = \sin\alpha' \operatorname{tang}\omega,$$

ω étant l'obliquité de l'écliptique. On en déduit

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha+\alpha'}{2} = \frac{\sin(\delta+\delta')}{\sin(\delta-\delta')}\operatorname{tang}\frac{\alpha-\alpha'}{2},$$

d'où $\alpha+\alpha'$, puisque δ, δ', $\alpha-\alpha'$ sont connus. On a ensuite ω.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1668.

(1894, p. 3*).

Étant donnée une parabole de sommet O *et de foyer* F, *on trace une corde focale* AB. *Le cercle circonscrit au triangle* OAB *rencontre l'axe de la parabole en un point* P, *tel que* FP = AB. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Soit $r = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$ l'équation polaire de la parabole.

On aura $FA = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$; $FB = \dfrac{p}{1-\cos(180+\varphi)} = \dfrac{p}{1+\cos\varphi}$.

Donc $AB = FA + FB = \frac{2p}{\sin^2\varphi}$, $FA.FB = \frac{p^2}{\sin^2\varphi}$.

Or

$$FO.FP = FA.FB,$$

d'où

$$FP = \frac{p^2}{\sin^2\varphi} : \frac{p}{2} = \frac{2p}{\sin^2\varphi}, \quad FP = AB.$$

On nous a adressé aussi la solution suivante :

On sait que *quelle que soit la corde focale on a*

$$\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \text{const.}$$

Si l'on prend l'axe comme corde, on voit que la constante est $\frac{1}{FO}$; on a alors $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{1}{FO}$,

d'où $\quad (FA + FB)\,FO = FA \times FB, \quad$ donc, etc.

Question 1669.

(1894, p. 3*).

Par le foyer F *d'une parabole, on mène une corde* AB *et l'on décrit sur* AB *comme diamètre une circonférence* Σ *qui rencontre la parabole en deux autres points* C *et* D. *On porte sur* FC, *du côté opposé à* C, *une longueur* $FD' = FD$ *et sur* FD, *du côté opposé à* D, *une longueur* $FC' = FC$. *Montrer que les points* C' *et* D' *sont situés sur la circonférence* Σ. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Une circonférence quelconque de centre L a pour équation polaire

$$\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \alpha) + a^2 - r^2 = 0,$$

a et α étant les coordonnées polaires du centre L.

En choisissant le foyer F comme origine et l'axe de la parabole comme axe polaire, la circonférence AB aura pour équations

$$\rho^2 - \rho\frac{2p\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\cos(\varphi - \alpha) + \frac{p^2\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} - \frac{p^2}{\sin^4\alpha} = 0,$$

ou

$$\rho^2 - \rho\frac{2p\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\cos(\varphi - \alpha) - \frac{p^2}{\sin^2\alpha} = 0,$$

car

$$AB = \frac{2p}{\sin^2\alpha} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{FA - FB}{2} = \frac{p\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \text{ (1)}.$$

Éliminons φ entre l'équation du cercle et l'équation de la parabole $\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$.

De cette dernière, on déduit

$$\cos\varphi = \frac{\rho - p}{p} \qquad \text{et} \qquad \sin\varphi = \sqrt{\frac{\rho^2 - (\rho - p)^2}{\rho^2}}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation du cercle développée, elle devient

$$\rho^2 \sin^2\alpha - 2\rho p \cos\alpha(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha) - p^2 = 0,$$

$$\rho^2\sin^2\alpha - 2\rho p\cos^2\alpha\,\frac{\rho - p}{\rho} - 2\rho p\cos\alpha\sin\alpha\sqrt{\frac{\rho^2-(\rho-p)^2}{\rho^2}} - p^2 = 0,$$

ou

$$\rho^2\sin^2\alpha - 2p\cos^2\alpha(\rho - p) - p^2 = p\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\rho^2 - (\rho - p)^2}.$$

Cette équation, élevée au carré, fournit

$$\rho^4\sin^4\alpha + \rho^3(\quad) + \ldots + p^4 = 0,$$

d'où

$$FA.FB.FC.FD = \frac{p^4}{\sin^4\alpha}.$$

Or

$$FA.FB = \frac{p^2}{\sin^2\varphi}.$$

Donc

$$FC.FD = FA.FB,$$

et, par conséquent,

$$FA.FB = FC.FC' = FD.FD'.$$

Question 1670.

(1894, p. 3*.)

Étant donnés trois points A, B, C *sur une courbe quelconque, soient* A' *le pôle de* BC, B' *le pôle de* AC, *et* C' *le*

(1) Voir la solution de la question 1668 (p. 196 ci-dessus).

pôle de AB. *Lorsque les points* A, B, C *se réunissent en un seul* A, *on a*

$$\lim\left(\frac{A'B'.A'C'.B'C'}{\text{surface } A'B'C'}\right) = R,$$

R *étant le rayon du cercle osculateur en* A.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. G. TZITZÉICA.

Soit R′ le rayon du cercle circonscrit à A′B′C′. On a

$$A'B' + B'C' + C'A' = 4R' + \text{surface } A'B'C'.$$

Il reste à montrer que

$$(1) \qquad \lim R' = \frac{R}{4}.$$

Je considère les coniques qui passent par A, B, C, c'est-à-dire qui ont à la limite avec la courbe donnée un contact du second ordre.

Il est évident qu'elles sont inscrites dans le triangle infinitésimal A′B′C′. Spécialement, les foyers des paraboles circonscrites à ABC se trouvent sur le cercle circonscrit à A′B′C′. Alors la limite de R′ est le rayon du cercle, lieu des foyers des paraboles ayant en A un contact du second ordre avec la courbe considérée. Or, le rayon de ce dernier cercle est, comme on sait [1], $\frac{R}{4}$. L'égalité (1) est par conséquent démontrée.

QUESTIONS.

1723. Trouver les limites de la fraction

$$\frac{\varepsilon^{ax} - \varepsilon^{bx}}{a^{\varepsilon x} - b^{\varepsilon x}},$$

---

[1] *Voir*, par exemple, TISSERAND, *Rec. compl. d'exerc. sur le Calc. infinit.*

lorsque

$$1^\circ \quad x = 0,$$
$$2^\circ \quad x = \infty,$$
$$3^\circ \quad a = b,$$

respectivement. (R.-W. GENESE.)

1724. Démontrer l'identité

$$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \ldots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \ldots & (a-n)^{n-1} \\ a^{n-2} & (a-1)^{n-2} & (a-2)^{n-2} & \ldots & (a-n)^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & (a-1) & (a-2) & \ldots & (a-n) \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1^n . 2^{n-1} . 3^{n-2} \ldots (n-2)^3 . (n-1)^2 \, n.$$

(V. DE STRÉKALOF.)

1725. Si m et n sont deux nombres premiers, $m^{n-1} + n^{m-1} - 1$ est divisible par mn. (J.-J. MILNE.)

1726. Si m, n, p sont trois nombres premiers,

$$(np)^{m-1} + (pm)^{n-1} + (mn)^{p-1} - 1$$

est divisible par mnp. (J.-J. MILNE.)

1727. Étant donnée une surface quelconque F, pour laquelle l'indicatrice est *elliptique*, la surface F′, lieu des *centres de courbure* de toutes les sections normales ou obliques que l'on peut faire autour de chacun de ses points, est représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{R_1 R_2 (x^2 + y^2)}{R_2 x^2 + R_1 y^2} z,$$

R_1 et R_2 étant les rayons principaux de F relatifs au point que l'on considère.

Cela étant, vérifier que l'aire de la surface F′ et le volume qu'elle enveloppe ont respectivement pour expression

$$A = \pi \left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right) \sqrt{R_1 R_2},$$

$$V = \frac{\pi}{48} (3 R_1^2 + 2 R_1 R_2 + 3 R_2^2) \sqrt{R_1 R_2}.$$

(A. ISSALY.)

[R7aβ]

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE QUAND ON TIENT COMPTE DU FROTTEMENT;

PAR M. W. DE TANNENBERG.

Je me propose d'indiquer une méthode élémentaire, permettant de trouver sous une forme simple les équations du mouvement d'un point matériel sur une surface, quand on tient compte du frottement.

I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Soient

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v)$$

les équations de la surface donnée S. Nous supposerons qu'on ait choisi les variables u et v de manière que les lignes coordonnées de la surface soient rectangulaires. Dans ces conditions

$$(2) \qquad F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Nous désignerons par MU la direction de la tangente à la ligne coordonnée (U)

$$v = \text{const.}$$

qui passe par le point $M(u, v)$; de même MV désignera la direction de la tangente à la ligne coordonnée (V)

$$u = \text{const.}$$

passant par le même point M. Suivant l'usage, MU correspondra aux (u) croissants et MV aux (v) croissants.

Soient

$$u = \alpha(t), \qquad v = \beta(t) \tag{3}$$

les équations d'un arc de courbe (C) passant par M; nous prendrons pour sens positif de cet arc, dans le voisinage du point M, celui dans lequel se meut M quand t va en croissant. Soit alors MT la direction de la tangente; nous poserons

$$\omega = \widehat{\mathrm{MU}, \mathrm{MT}}.$$

Si (s) désigne l'abscisse curviligne du point M sur la courbe C, on sait que

$$\left\{\begin{aligned} ds \cos\omega &= +\sqrt{\mathrm{E}}\,du, \\ ds \sin\omega &= +\sqrt{\mathrm{G}}\,dv, \\ ds^2 &= \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

E, G ayant la signification habituelle.

Enfin nous prendrons, pour direction positive de la normale à la surface, la direction MW, telle que le trièdre MU, MV, MW ait la disposition directe.

2. Considérons le mouvement du trièdre (MU, MV, MW), quand le point M décrit la courbe C suivant la loi définie par les équations (3), et proposons-nous de trouver la projection sur la normale MW du segment de la rotation instantanée.

Les cosinus directeurs des droites MU, MV sont respectivement

$$(\mathrm{MU}) \qquad a_1 = \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad b_1 = \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad c_1 = \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial z}{\partial u},$$

où $\mathrm{A} = +\sqrt{\mathrm{E}}$;

$$(\mathrm{MV}) \qquad a_2 = \frac{1}{\mathrm{C}}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad b_2 = \frac{1}{\mathrm{C}}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad c_2 = \frac{1}{\mathrm{C}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

où $\mathrm{C} = +\sqrt{\mathrm{G}}$.

La composante cherchée (r) est donnée par

$$r = a_2 \frac{da_1}{dt} + b_2 \frac{db_1}{dt} + c_2 \frac{dc_1}{dt}.$$

Si l'on développe $\frac{da_1}{dt}$, on trouve

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{1}{\mathrm{A}} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} u' + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} v' \right) + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mathrm{A}} \right).$$

$\frac{db_1}{dt}$, $\frac{dc_1}{dt}$ ont des expressions analogues. Donc, en tenant compte de la condition (2)

$$r = \frac{1}{\mathrm{AC}} \left(u' \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + v' \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right),$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{1}{\mathrm{AC}} \left(- \mathrm{A} u' \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} + \mathrm{C} v' \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u} \right) \text{ (1)}.$$

Les formules (3) permettent d'écrire

$$r = \frac{\rho}{\mathrm{AC}} \left(- \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} \cos \omega + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u} \sin \omega \right).$$

3. Enfin cherchons la projection de l'accélération du point M sur la normale à la surface. Cette projection a évidemment pour expression (a, b, c désignant les cosinus directeurs de MW)

$$\Gamma_n = a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Mais

$$a \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt} + c \frac{dz}{dt} = 0,$$

donc

$$\Gamma_n = - \frac{da\, dx + db\, dy + dc\, dz}{dt^2}.$$

---

(1) Voir la *Théorie des Surfaces* de M. DARBOUX (2e Partie, p. 385).

Or, si au numérateur on remplace x, y, z, a, b, c par leurs valeurs en fonction de (u, v), on trouve une forme quadratique en du et dv, que l'on rencontre souvent en Géométrie :

$$da\,dx + db\,dy + dc\,dz = -(E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2).$$

Par suite

$$\Gamma_n = \frac{E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2}{dt^2}.$$

II. — Équations du mouvement.

Supposons qu'un point matériel M, soumis à une force donnée F, se meuve avec frottement sur la surface S, et écrivons les équations du mouvement pendant un intervalle de temps

$$t_1 < t < t_2,$$

où la vitesse ne s'annule pas. Nous supposerons la demi-normale MW dirigée du côté où le point peut quitter la surface; on peut évidemment réaliser cette condition, tout en conservant la disposition directe au trièdre MU, MV, MW (en permutant au besoin u et v). Alors la réaction normale N de la surface reste positive pendant le mouvement du point sur la surface. Pour direction positive de la trajectoire, nous prendrons le sens de ce mouvement; de sorte que

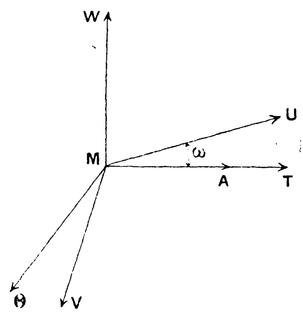
$$\rho = \frac{ds}{dt} > 0,$$

et la force de frottement a pour expression $(-f\text{N})$. Enfin la masse du point sera supposée égale à l'unité.

Ceci posé, écrivons que la force d'inertie fait équilibre à la force active F et à la réaction R de la surface. Soit MΘ la demi-normale à la trajectoire, située dans le plan tangent et définie par

$$\widehat{\mathrm{MT},\mathrm{M}\Theta} = +\frac{\pi}{2}.$$

Projetons toutes les forces sur MT, MΘ, MW. Il



suffit d'exprimer que sur chaque axe la somme des projections est nulle.

Les projections de F et de la réaction R sont respectivement

$$\begin{array}{ccc} F_u \cos\omega + F_v \sin\omega, & -F_u \sin\omega + F_v \cos\omega, & F_n. \\ -fN, & 0, & N. \end{array}$$

Les projections de la force d'inertie suivant MT et MW sont respectivement

$$-\frac{d\rho}{dt}, \qquad -\frac{E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2}{dt^2}.$$

Reste à calculer la projection sur MΘ. Soit MA le segment représentant la vitesse à l'instant t. L'accélération du point M est la dérivée géométrique du segment MA, prise par rapport à t, ou bien la vitesse relative du point A par rapport au système (Mx, My, Mz), parallèle au système fixe (Ox_1, Oy_1, Oz_1). Cette vitesse est la résultante de deux autres : 1° de la vitesse relative de A par rapport au système MU, MV, MW; 2° de la vitesse par rapport à Mx, My, Mz du point du plan UMV, qui coïncide avec A, à l'époque t. Les projections de ces deux vitesses suivant MΘ sont évidemment $\left(\rho \frac{d\omega}{dt}\right)$ et (ρr). Donc la projection de la force d'inertie suivant MΘ est

$$-\rho\left(\frac{d\omega}{dt}+r\right)=-\rho\frac{d\omega}{dt}-\frac{\rho^2}{\mathrm{AC}}\left(-\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v}\cos\omega+\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u}\sin\omega\right).$$

Les équations du mouvement sont donc

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{d\rho}{dt}=\mathrm{F}_u\cos\omega+\mathrm{F}_v\sin\omega-f\mathrm{N}.$$

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned}&\rho\frac{d\omega}{dt}+\frac{\rho^2}{\mathrm{AC}}\left(-\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v}\cos\omega+\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u}\sin\omega\right)\\&=-\mathrm{F}_u\sin\omega+\mathrm{F}_v\cos\omega.\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{III})\qquad \frac{\mathrm{E}'du^2+2\mathrm{F}'du\,dv+\mathrm{G}'dv^2}{dt^2}=\mathrm{F}_n+\mathrm{N}.$$

$$(\mathrm{IV})\qquad \mathrm{A}\frac{du}{dt}=\rho\cos\omega.$$

$$(\mathrm{V})\qquad \mathrm{C}\frac{dv}{dt}=\rho\sin\omega.$$

L'équation III permet d'exprimer N en fonction de ρ, ω, u, v. Les équations I, II, IV et V forment alors un système de quatre équations différentielles du premier ordre par rapport aux quatre fonctions inconnues ρ, ω, u, v.

On pourrait établir l'équation II en utilisant une formule du *Cours de Géométrie* relative à la courbure géodésique; j'ai pensé que la méthode précédente était plus élémentaire et même plus simple.

On peut appliquer ces équations au problème traité par M. de Saint-Germain (*Bulletin des Sciences mathé-*

matiques, 1892). Dans ce cas la surface est le cylindre

$$x = \mathrm{R}\cos v, \qquad y = \mathrm{R}\sin v, \qquad z = u.$$

La normale à la surface, dirigée vers l'axe, a pour cosinus directeurs

$$a = -\cos v, \qquad b = -\sin v, \qquad c = 0;$$

par suite

$$\Sigma\, da\, dx = -\mathrm{R}\, dv^2,$$

d'où

$$\mathrm{E}' = 0, \qquad \mathrm{F}' = 0, \qquad \mathrm{G}' = \mathrm{R}.$$

D'autre part

$$\mathrm{A} = 1, \qquad \mathrm{C} = \mathrm{R}.$$

On retrouve les équations auxquelles M. de Saint-Germain a été conduit par un procédé tout différent.

[C2h]

SUR LA DÉFINITION DE L'INTÉGRALE DÉFINIE;

Par M. Maurice FOUCHÉ,
Professeur au collège Sainte-Barbe.

On rencontre, dès les Mathématiques élémentaires, un certain nombre de quantités qui ne peuvent être définies avec précision que comme des limites de sommes d'infiniment petits, parce qu'elles s'expriment analytiquement par une intégrale définie. Tels sont la longueur d'une ligne courbe, l'aire d'une figure plane limitée par une courbe, le volume de la pyramide, celui du secteur sphérique, le centre de gravité d'une ligne, etc. Toutes ces définitions, ainsi que celle de l'intégrale définie qui les comprend toutes, sont généralement données par la considération d'une suite de termes dont chacun est une somme de quantités qu'on fait tendre vers o. Cette manière de procéder a l'inconvénient d'entraîner des longueurs, parce qu'il faut démontrer : 1° que les termes de la suite considérée tendent vers une limite bien déterminée et 2° que cette limite reste la même, quelle que soit la manière de former la suite convergente, car la même quantité peut être définie au moyen d'une infinité de suites différentes qui toutes tendent vers la même limite. La définition de la longueur d'une ligne courbe, qu'on rencontre la première dans l'ordre de l'Enseignement, est assurément l'une des questions les plus difficiles que l'on ait à traiter dans la classe de Mathématiques élémentaires, à tel point qu'il est rare qu'on puisse l'exposer aux élèves avec toute la rigueur et tous les développements nécessaires. La définition de l'intégrale définie, envisagée d'une manière abstraite et indépendamment de toute considération géométrique, a paru assez pénible pour qu'on ait cru devoir la supprimer du programme d'admission à l'École Polytechnique.

On obtient des raisonnements beaucoup plus simples et beaucoup plus rapides, si, à la considération d'une suite de termes pouvant être rangés linéairement, on substitue la considération des *ensembles*.

M. Tannery a montré qu'on pouvait définir un nombre incommensurable par la propriété de partager tous les nombres commensurables en deux classes telles que tout nombre de la première classe soit plus petit que tout nombre de la seconde. Toute règle qui permettra d'effectuer cette classification de *tous* les nombres commensurables définit, par cela même, un nombre incommensurable qui sépare les deux classes. S'il arrive qu'un *seul* nombre commensurable échappe à cette classification, la règle, au lieu de définir un nombre incommensurable, définit ce nombre commensurable *unique* qui sépare tous les autres en deux classes. C'est ainsi que $\sqrt{2}$ définit un nombre incommensurable, parce que tous les nombres commensurables ont leur carré plus petit que 2 (1^{re} classe) ou plus grand que 2 (2^e classe), tandis que la fraction décimale périodique

$$0,1111\ldots$$

définit le nombre commensurable $\frac{1}{9}$, parce que cette fraction est la seule qui ne puisse être classée parmi les fractions plus petites que l'une des fractions décimales

$$\begin{array}{l} 0,1, \\ 0,11, \\ 0,111, \\ \ldots\ldots, \\ 0,111\ldots1, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

ou parmi les fractions plus grandes que l'une des fractions

$$\begin{array}{l} 0,2, \\ 0,12, \\ 0,112, \\ \ldots\ldots, \\ 0,111\ldots12, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

En partant de cette idée si simple, il est facile d'établir une théorie complète des nombres incommensurables, de définir avec précision les opérations effectuées sur cette sorte de nombres, et de démontrer en toute rigueur que le nombre incommensurable est bien la limite de ses valeurs approchées, en ce sens que la différence entre le nombre incommensurable et ses valeurs approchées devient et reste aussi petite qu'on veut, dès que l'excès de la valeur approchée par excès sur la valeur approchée par défaut est lui-même plus petit que l'erreur qu'on ne veut pas dépasser.

C'est encore en partant de la même idée qu'on peut arriver à définir très simplement les quantités qui sont des sommes d'infiniment petits.

Il est inutile de dire ce qu'on entend par un *ensemble* de nombres. Je dirai seulement que je considère des *ensembles* contenant une *infinité de nombres* commensurables ou non. Je désigne un ensemble par E(α) et les nombres qui le composent par α_1, α_2, α_3, ..., sans que les indices attachent à ces nombres l'idée de les ranger dans un ordre quelconque.

Je dirai que deux ensembles E(α) et E(β) sont *contigus* si : 1° tout nombre du premier est plus petit que tout nombre du second :

$$\alpha_i < \beta_j,$$

quels que soient les indices, et si 2° on peut trouver deux nombres, l'un dans l'un des ensembles, l'autre dans l'autre, tels que leur différence soit plus petite qu'un nombre quelconque donné à l'avance :

$$\beta_k - \alpha_h < \varepsilon,$$

ε étant arbitraire.

Il est presque évident que deux ensembles contigus définissent un nombre qui les sépare. On peut l'établir rigoureusement en remarquant qu'à cause de l'hypothèse

$$\beta_k - \alpha_h < \varepsilon,$$

il est impossible que deux nombres A et B soient tous les deux compris entre les nombres α et les nombres β. Donc, tout nombre commensurable sera ou plus petit qu'un nombre α (1re classe) ou plus grand qu'un nombre β (2e classe), sauf peut-être un seul. D'autre part, à cause de l'hypothèse

$$\alpha_i < \beta_j,$$

tout nombre de la première classe sera plus petit que tout nombre de la seconde classe. Donc, d'après la définition de M. Tannery, les deux ensembles définissent un nombre qui est incommensurable si tous les nombres commensurables sont classés, et commensurable si un nombre commensurable échappe à la classification. De plus, le nombre A ainsi défini est bien la limite commune des deux ensembles, au sens habituel du mot *limite,* car on peut toujours choisir les indices de manière que les deux différences $\beta_i - A$ et $A - \alpha_i$ soient plus petites qu'un nombre ε, puisque chacune de ces deux différences est plus petite que

$$\beta_i - \alpha_i.$$

Ces principes préliminaires qui, du reste, peuvent servir à d'autres objets, par exemple à la définition de a^x quand x est incommensurable, étant bien établis, j'arrive à la définition de la limite d'une somme d'infiniment petits, et, comme toutes les questions de cette nature se ramènent à l'intégrale définie, je me bornerai à traiter la définition de l'intégrale définie, le même raisonnement pouvant s'adapter aux questions géométriques analogues qu'on voudrait traiter directement.

Soit $f(x)$ une fonction de x que je suppose seulement bien déterminée et croissante quand x varie de a à b. Je considère une suite

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n$$

de valeurs croissantes de x comprises entre a et b :

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < b,$$

et je forme les deux expressions

$$\alpha = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) \\ + (x_3 - x_2)f(x_2) + \ldots + (b - x_n)f(x_n),$$
$$\beta = (x_1 - a)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) \\ + (x_3 - x_2)f(x_3) + \ldots + (b - x_n)f(b).$$

Si l'on fait varier les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à chaque système de ces nombres correspondront une valeur de α et une valeur de β. Je dis que toutes les valeurs de α et toutes les valeurs de β forment deux ensembles contigus.

En effet, en premier lieu, d'après nos hypothèses, chacun des binomes $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ... est positif, et, puisqu'on a supposé la fonction $f(x)$ croissante, chaque terme de β est plus grand que le terme correspondant de α. Donc, en faisant la somme, on a d'abord

$$\beta > \alpha.$$

Si maintenant on considère deux systèmes différents des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soit

$$\alpha = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (b - x_n)f(x_n),$$
$$\beta' = (x'_1 - a)f(x'_1) + (x'_2 - x'_1)f(x'_2) + \ldots + (b - x'_{n'})f(b).$$

J'appelle $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n+n'}$ les nombres x_i ou x'_j rangés par ordre de grandeur croissante, et je pose

$$\alpha'' = (z_1 - a)f(a) + (z_2 - z_1)f(z_1) + \ldots + (b - z_{n+n'})f(z_{n+n'}),$$
$$\beta'' = (z_1 - a)f(z_1) + (z_2 - z_1)f(z_2) + \ldots + (b - z_{n+n'})f(b).$$

On aura, soit

$$x_p - x_{p-1} = z_q - z_{q-1},$$

soit

$$x_p - x_{p-1} = (z_q - z_{q-1}) + (z_{q-1} - z_{q-2}) + \ldots + (z_r - z_{r-1})$$

suivant que x_{p-1} et x_p seront deux termes consécutifs ou non de la suite des z.

Il en résulte que chaque terme de α est égal, soit à l'un des termes de α'', soit à une somme de plusieurs termes consécutifs de α'' dans lesquels on aurait remplacé les valeurs différentes de $f(z)$ par la première de ces valeurs, laquelle est la plus petite. Donc

$$\alpha < \alpha''.$$

On verrait de même que

$$\beta' > \beta''.$$

Mais on a $\beta'' > \alpha''$, comme on l'a vu précédemment pour α et β, et, par conséquent,

$$\beta' > \alpha,$$

quelles que soient les valeurs de α et β', ce qui est la première condition pour que les ensembles soient contigus.

En second lieu, si l'on suppose chacun des binomes $x - a$, $x_2 - x_1$, ..., plus petit qu'un nombre h, la différence

$$\beta - \alpha = (x_1 - a)[f(x_1) - f(a)] + (x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_1)] + \ldots,$$

qui est une somme de termes tous positifs, sera plus petite que

$$h[f(x_1) - f(a)] + h[f(x_2) - f(x_1)] + \ldots + h[f(b) - f(x_n)]$$

et, en mettant h en facteur commun,

$$\beta - \alpha < h[f(b) - f(a)],$$

quantité qu'on peut réduire autant qu'on voudra, puisque h est arbitraire.

Les deux ensembles $E(\alpha)$ et $E(\beta)$, étant contigus, définissent un nombre A, qui est la valeur de l'intégrale définie, et qu'on représente par le symbole

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Cette valeur A est la limite commune vers laquelle tendent les nombres α et β quand la différence des valeurs consécutives de x tend vers zéro, car chacune des différences

$$\beta - A, \quad A - \alpha$$

est plus petite que $\beta - \alpha$ et, par suite, plus petite que

$$h[f(b) - f(a)],$$

quantité qui est elle-même plus petite que ε dès que toutes les différences $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ... sont plus petites que

$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Nous avons supposé la fonction croissante de a à b. Il n'y aurait presque rien à changer au raisonnement précédent si elle était décroissante. Dans le cas général, on partagera l'intervalle de variation en plusieurs autres satisfaisant à la condition énoncée, et l'on fera la somme des résultats.

Le raisonnement précédent ne suppose pas la fonction continue, mais il suppose qu'on peut partager l'intervalle de variation en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels la fonction est constamment croissante ou constamment décroissante. On peut le modifier en remplaçant dans les expressions de α et β les valeurs successives de $f(x)$ par le minimum m et le maximum M des valeurs de la fonction dans chacun des intervalles :

$$\alpha = (x_1 - a)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + \ldots + (b - x_n)m_n,$$
$$\beta = (x_1 - a)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 + \ldots + (b - x_n)M_n.$$

On démontrera aisément, toujours par la considération des quantités α'' et β'', qu'on a bien la condition

$$\alpha_i < \beta_j.$$

Mais, pour établir la condition

$$\beta - \alpha < \varepsilon,$$

il faudra supposer qu'on peut prendre les intervalles assez petits pour que chacune des différences $M_1 - m_1$, $M_2 - m_2$, ..., soit plus petite qu'un nombre arbitraire ε. Or on sait que cela est possible toutes les fois que la fonction est finie et continue.

Les deux démonstrations sont à peu près aussi simples; mais elles montrent que, pour qu'une fonction soit intégrable, il suffit qu'elle rentre dans l'un des deux cas qui permettent de faire l'un ou l'autre raisonnement. Il en résulte qu'une fonction est intégrable dans les deux cas suivants :

1° Si l'on peut partager l'intervalle de variation en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels la fonction est toujours croissante ou toujours décroissante;

2° Si l'on peut partager l'intervalle de variation en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels la fonction est finie et continue.

[L¹9a] SUR LES SEGMENTS DE CONIQUES LIMITÉS A UNE NORMALE;

Par M. Maurice d'OCAGNE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Considérons l'aire du segment compris entre une conique et une normale à cette conique, et cherchons la position de cette normale pour laquelle cette aire est minimum.

Ce problème a été traité par Ossian Bonnet, au moyen de calculs assez compliqués (*Nouvelles Annales*, 1re série, t. III, p. 64). Nous allons le résoudre ici par un procédé purement élémentaire en nous appuyant sur un théorème que nous avons donné dans ce Recueil (3e série, t. V, p. 298).

Supposons que la normale en M à la conique

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon b^2}=1 \qquad (\text{où } \varepsilon=\pm 1),$$

rencontre la courbe au point V.

Si l'aire comprise entre la courbe et la normale MV est minimum, sa différentielle est nulle. Par suite, les triangles formés avec la normale infiniment voisine sont égaux. On en déduit immédiatement que le centre de courbure ω situé sur MV est le milieu de ce segment de normale.

Le cercle osculateur en M, que nous représenterons par (ω), passe donc par le point V. Or, nous avons fait voir à l'endroit cité que la corde commune à ce cercle et à la conique passe par le point G dont les coordonnées η et ζ sont liées aux coordonnées α et β du centre de courbure ω par les équations

$$(2)\qquad \frac{\eta}{\alpha}+\frac{\zeta}{\beta}=1,$$

$$(3)\qquad \frac{\eta}{a^2\alpha}+\frac{\zeta}{\varepsilon b^2\beta}=0.$$

Ici, la corde commune n'étant autre que la normale MV, le point G doit être sur cette normale, ce qui exige, x et y étant les coordonnées du point M, que l'on ait

$$(4)\qquad a^2\frac{\eta}{x}-b^2\frac{\zeta}{y}=a^2-b^2.$$

Si, dans les équations (2) et (3), nous remplaçons α et β par leurs expressions

$$\alpha = x^3 \frac{a^2 - \varepsilon b^2}{a^4}, \qquad \beta = -y^3 \frac{a^2 - \varepsilon b^2}{b^4},$$

nous pouvons les écrire

$$(2') \qquad \frac{\eta a^4}{x^3} - \frac{\zeta b^4}{y^3} = a^2 - \varepsilon b^2,$$

$$(3') \qquad \frac{\eta a^2}{x^3} - \frac{\zeta \varepsilon b^2}{y^3} = 0.$$

L'élimination de η et ζ entre (2'), (3') et (4) est des plus faciles. Elle donne

$$(5) \qquad x^2 - y^2 = a^2 - \varepsilon b^2.$$

Les points M cherchés sont donc à la rencontre de la conique (1) et de l'hyperbole équilatère (5) qui a pour sommets sur l'axe des x les foyers de la conique (1).

De (1) et (5) on tire

$$(6) \qquad x = \frac{a^2}{\pm\sqrt{a^2 + \varepsilon b^2}}, \qquad y = \frac{\varepsilon b^2}{\pm\sqrt{a^2 + \varepsilon b^2}}.$$

Il est dès lors très facile de construire les points demandés. Remarquons que de (6) on tire

$$a^2 y = \pm \varepsilon b^2 x,$$

ce qui prouve que *la normale en* M, dont le coefficient angulaire est égal à $\frac{a^2 y}{\varepsilon b^2 x}$, *fait un angle de* 45° *avec l'axe des* x. Tel est le résultat qu'avait remarqué O. Bonnet.

Si de l'ellipse on passe à la parabole considérée comme sa limite, l'hyperbole équilatère, ayant pour sommets les foyers et qui détermine les points demandés, devient la perpendiculaire à l'axe élevée par le foyer.

[R8cβ]

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS GRAVE DE RÉVOLUTION SUSPENDU PAR UN POINT DE SON AXE (DER KREISEL) (1);

PAR M. FÉLIX KLEIN.

(Traduit de l'allemand par M. L. LAUGEL.)

La théorie des fonctions d'une variable complexe nous a depuis longtemps doté d'un système de formules particulièrement simple pour la représentation de la rotation d'un corps rigide autour d'un point fixe, système qui, autant que j'en ai connaissance, n'a pas encore été employé pour les applications de la Mécanique; il faut vraisemblablement croire que désormais l'on pourra en faire usage avec un avantage tout particulier.

Décrivons autour du point fixe O comme centre une sphère sur laquelle, à l'instar de Riemann, on interprétera une variable complexe ζ.

Les rotations autour de O sont alors simplement données par ces substitutions linéaires unimodulaires

$$\zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}, \tag{1}$$

où d'une part α et δ, et d'autre part β et $-\gamma$ sont imaginaires conjuguées (comparez par exemple mes *Leçons sur l'Icosaèdre*, p. 32). Dans le traitement d'un problème quelconque de rotation on est donc conduit à représenter les constantes en question α, β, γ, δ comme fonctions appropriées du temps t.

(1) Communication présentée à la Société Royale des Sciences de Göttingue, le 11 janvier 1896.

C'est ce que j'ai effectué pour le corps de révolution habituel (la toupie), c'est-à-dire le corps de révolution soumis aux lois de la pesanteur et fixé par un point de son axe.

Je désigne par $\zeta = \infty$ le pôle supérieur de la sphère décrite du point O comme centre dans l'espace fixe, par $Z = \infty$ la pointe (der Kreiselspitze); d'une manière générale Z représente la variable complexe sur la sphère congruente liée au corps grave de révolution. Le résultat est le suivant : α, β, γ, δ sont des fonctions elliptiques de deuxième espèce qui *au numérateur et au dénominateur renferment une seule fonction thêta.*

Comme le dénominateur est le même dans chacune des quatre expressions la courbe que nous tirons de (1) pour le mouvement de la pointe

$$\zeta = \frac{\alpha}{\gamma} \tag{2}$$

renferme également dans sa représentation un seul facteur thêta au numérateur et au dénominateur.

D'un autre côté, pour donner un nouvel exemple, on obtient pour le cône de la polhodie, outre $r = \text{const.}$,

$$p + iq = 2i\left(\beta \frac{d\delta}{dt} - \delta \frac{d\beta}{dt}\right), \tag{3}$$

expression qui renferme par conséquent deux facteurs thêta au numérateur et au dénominateur.

Il est bien intéressant d'examiner comment ces formules simples se vérifient partout indirectement sur les développements que l'on trouve dans la littérature du sujet, sans avoir été jusqu'ici présentées directement et sans que l'on ait songé à leur donner le premier rôle dans le traitement de ces questions. Ainsi, par exemple, au lieu de la courbe (2) tracée sur la sphère, on en a jusqu'ici toujours considéré la projection sur le plan horizontal ; mais pour celle-ci nous trouvons

$$x + iy = 2\alpha\beta; \tag{4}$$

alors il se présente deux facteurs thêta au numérateur et au dénominateur, ce qui, vu (2), est une complication inutile.

Note. — *Vorlesungen über das Icosaeder und die Auflösung der Gleichungen von 5ten Grade.* Felix Klein, Teubner, 1884, p. 32, § 2. — *Sur les transformations linéaires de $(x + iy)$ qui correspondent aux rotations autour du centre de la sphère.* (Résumé.)

L'équation de la sphère étant prise sous la forme (coordonnées rectangulaires)

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

on introduit la variable complexe $z = x + iy$ en la représentant, comme d'habitude, sur le plan des ξ, η, plan de l'équateur. Ce plan, à l'aide d'une projection stéréographique, sera représenté sur la surface de la sphère, de sorte que l'on a les formules

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \qquad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}, \qquad x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$$

ou

$$\xi = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2},$$

$$\eta = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2},$$

$$\zeta = \frac{-1 + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

On est alors conduit, par une suite de considérations et de formules que l'on trouvera dans le célèbre Ouvrage de M. Klein, à la formule suivante

$$(5) \quad e^{-\frac{i\alpha}{2}} \frac{z'(1+\zeta)+(\xi+i\eta)}{z'(1-\zeta)-(\xi+i\eta)} = e^{\frac{i\alpha}{2}} \frac{z(1+\zeta)+(\xi+i\eta)}{z(1-\zeta)-(\xi+i\eta)},$$

formule générale pour une rotation quelconque d'angle α.

Si l'on résout la formule (5) par rapport à z' il sera commode d'introduire les abréviations suivantes

$$\xi \sin\frac{\alpha}{2} = a, \qquad \eta \sin\frac{\alpha}{2} = b, \qquad \zeta \sin\frac{\alpha}{2} = c, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = d;$$

il est clair qu'on a aussi

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

et l'on obtient la formule très simple

$$(6) \qquad z' = \frac{(d+ic)z - (b-ia)}{(b+ia)z + (d-ic)},$$

formule qui a été donnée pour la première fois par Cayley : *Math. Annalen*, 1879 « Correspondence of homographies and rotations ». On voit aisément que cette formule revient à la formule (1) de la Note de M. Klein.

Remarquons que nous avons ainsi *deux* formules pour chaque rotation. En effet, la rotation reste inaltérée lorsque l'on augmente l'angle α de 2π; mais alors les quatre grandeurs a, b, c, d changent de signe. Cela tient à ce que le déterminant de la substitution (6) que j'écrirai

$$z' = \frac{Az + B}{Cz + D}$$

est égal à $AD - BC = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, c'est-à-dire par conséquent $= 1$, ce qui nous indique bien encore la double possibilité pour le choix des signes.

Remarquons encore que l'on a

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{A + D}{\sqrt{AD - BC}}.$$

Pour plus de détails il est indispensable de consulter Icosaeder.

Livres à consulter sur la rotation d'un corps grave de révolution :

LAGRANGE, *Mécanique analytique,* 3e édition, tome second.

JACOBI, *Œuvres complètes,* tome II.

HERMITE, *Applications des fonctions elliptiques,* Gauthier-Villars.

DARBOUX, *Notes au Cours de Mécanique de M. Despeyrous*, tome II, Hermann, 1886.

PUISEUX, *Note sur le mouvement d'un point matériel, etc.* (*Journal de Math.*, 1re série, tome VII).

HALPHEN, *Fonctions elliptiques,* tome II.

M. Klein en ce moment professe des leçons sur le sujet à l'Université de Göttingue; elles seront sans doute lithographiées prochainement, selon l'usage suivi depuis un certain nombre d'années.

---

[11] SUR LES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES;

PAR M. C.-E. BICKMORE M. A., New College, Oxford.

Dans le tome XIV des *Nouvelles Annales,* p. 115-117, on trouve un Tableau des facteurs de $10^k - 1$, dénominateur d'une fraction décimale qui a une période de k chiffres, pour des valeurs entières de k entre 0 et 61, ou plutôt des facteurs numériques du quotient de cette expression par le plus petit multiple commun de tous ses facteurs algébriques, $10^f - 1$, f étant sous-multiple de k.

A part quelques erreurs typographiques, on doit faire d'autres corrections dans le Tableau.

Pour trois valeurs de k : 45, 50, 60, l'auteur, le Dr Looff de Gotha, n'a pas divisé par tous les facteurs algébriques ; dans ces trois cas, il faut diviser les facteurs donnés dans le Tableau par 3, 9091, 10000000001, respectivement. En outre, le Dr Reuschle de Stuttgart, dans son Ouvrage : *Mathematische Abhandlung* de l'année 1856, a donné plusieurs facteurs numériques, non trouvés par le Dr Looff; et M. W. Shanks, dans les *Proceedings of the Royal Society of London*, t. XXII, p. 382-384, a publié un Tableau des facteurs de $10^k - 1$ continué jusqu'à $k = 100$.

Dans le *Messenger of Mathematics* de l'année 1895, j'ai donné quelques grands facteurs pour les valeurs de k, 60 et 100 ; et j'ai remarqué que, pour la valeur 90, il faut diviser par 19 le nombre donné dans le Tableau de M. Shanks.

Ce Tableau donne aussi une valeur incorrecte pour $k = 80$.

Le *Programm n° 67 des Königlichen Prinz-Heinrichs-Gymnasiums in Berlin* de 1895, par Herr Bork, contient, comme appendice, un Tableau calculé par le Dr Kessler de Wiesbade, qui donne toutes les valeurs de q plus grand que 2, $\frac{p-1}{q}$ étant la moindre valeur de x, qui satisfait à la congruence exponentielle

$$10^x \equiv 1 \pmod{p},$$

où p est un nombre premier moins grand que 100000.

A l'aide de ce Tableau, j'ai trouvé des facteurs additionnels pour les huit valeurs de k : 29, 55, 63, 72, 77, 87, 95, 100 ; mais on doit observer que tous ces facteurs (si l'on excepte 98641, facteur de $10^{72} - 1$) pourraient être déterminés à l'aide des calculs, qui n'ont jamais été publiés, de l'illustre Dr Salmon, Provost de *Trinity College*, Dublin.

Le Tableau suivant a été calculé d'après une comparaison de tous les autres Tableaux cités.

Les * indiquent que la résolution est complète, selon les calculs des auteurs des Tableaux.

Lorsque $k = 3, 9, 22, 42$, etc., on ajoute les facteurs 3, 11, 7, etc.; parce que ces nombres-ci divisent exactement le quotient de $10^k - 1$ par le plus petit multiple commun de tous ses facteurs algébriques. Si k est un nombre premier, on a, pour le facteur algébrique réduit de $10^k - 1$, le nombre formé en écrivant le chiffre 1 k fois successivement; ce nombre-ci est un nombre premier, si $k = 2$ et (selon le Dr Looff) si $k = 23$; on n'en a trouvé aucun facteur numérique pour les valeurs suivantes de k: 17, 19, 37, 47, 59, 67, 71, 73, 83, 89, 97.

Pour plus de renseignements on peut voir, dans le *Messenger of Mathematics*, l'essai *On the numerical factors of* $a^n - 1$ par l'auteur de cette Note.

Tableau des facteurs de $10^n - 1$.

n.	
*1	3^2.
*2	11.
*3	3.37.
*4	101.
*5	41.271.
*6	7.13.
*7	239.4649.
*8	73.137.
*9	3.333667.
*10	9091.
*11	21649.513239.
*12	9901.
*13	53.79.265371653.

n.	
*14	909091.
*15	31.2906161.
*16	17.5882353.
17	inconnu.
*18	19.52579.
19	inconnu.
*20	3541.27961.
*21	43.1933.10838689.
*22	11.23.4093.8779.
*23	nombre premier.
*24	99990001.
25	21401.25601.182521213001.
*26	859.1058313049.
27	3.757.440334654777631.
*28	29.281.121499449.
29	3191.16763.43031.62003.77843839397.
*30	211.241.2161.
31	2791.398105020104303515267327521.
*32	353.449.641.1409.69857.
33	67.134462821011329837 3.
*34	103.4013.21993833369.
35	71.12676184367477604353521.
*36	999999000001.
37	inconnu.
38	909090909090909091.
39	900900900900990990990991.
40	9999000099990001.
41	83.1231.1087480167080452870240778983793283 07.
*42	7.127.2689.459691.
43	173.6422607578676942838792549775208734746307.
44	89.1112470797641561909.
45	999000000999000999999001.
46	47.139.2531.549797184491917.
47	inconnu.
48	9999999900000001.
49	1000000100000010000001000000100000010000001.
50	251.5051.78875943472201.
51	613.14696588921711270961009949 5907.
52	521.1900381976777332243781.

n.

53 107.103842159916926272066458982346832814122533748701
973.

54 999999999000000001.

55 1321.62921.108280042752263116285790825177351.

56 7841.127522001020150503761.

57 21319.42258121905384910220507105914489.

58 59.154083204930662557781201849.

59 inconnu.

*60 61.4188901.39526741.

61 733.4637.3269011286555677849267785603463896663414981
13992973391.

62 909090909090909090909090909091.

63 10837.23311.45613.86697559786813408979911.

64 19841.504006854493221078070661761.

65 900009000090090900909009090990909909999099991.

66 109890109889010989011.

67 inconnu.

68 9900990099009900990099009901.

69 277.325234982274693466029209353758090220184083.

70 1099988890111109888900011.

71 inconnu.

72 3169.98641.3199044596370769.

73 inconnu.

74 7253.125339984708521865560332401639447.

75 151.4201.15763985553739191709164170940063151.

76 99009900990099009900990099009901.

77 5237.42043.40875801474309577279761650595719098173132
58268348801.

78 13.157.6397.841664969961118343.

79 317.6163.10271.5537239794645872039750752719266884636
0723201952048123892532615741471.

80 99999999000000000999999999000000001.

81 3.163.9397.21762155741738051978038502933429783207580
7163797.

82 9090909090909090909090909090909090909091.

83 inconnu.

84 1009998990000999899000101.

85 9000900009000090900909009090090909909099909099909990999
90999909991.

n.	
86	909090909090909090909090909090909090909091.
87	4003.72559.31017025165802975904515779323733949834276 3245483.
88	617.16205834846012967584927082656402106953.
89	inconnu.
90	29611.3380500486302384249 1.
91	547.14197.17837.64973585255824878623763722983867691 2 2282276937376982738038477.
92	1289.768114049574080759511172218851055004647o9.
93	9009009009009009009009009009009909909909909909909909 90990991.
94	6299.144323052721211159058436404046818398302760 9.
95	191.59281.63841.124508294126690272644968117968842143 0761010968594197505797881.
96	97.10309278350515462886597938144 33.
97	inconnu.
98	197.50761416243655329949187817263959390355 33.
99	199.397.34849.36321694092105780278465032647597861292 4967984251822936883.
100	60101.1680588011350901.99004980069800499001.

[D3g]

SUR LE NOMBRE DES PÉRIODES D'UNE FONCTION UNIFORME;

PAR M. A. ASTOR,

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

On connaît cet important théorème de Jacobi qu'une fonction uniforme d'une variable z ne peut avoir deux périodes dont le rapport soit réel ni plus de deux périodes dont le rapport soit imaginaire. On démontre ce théorème en s'appuyant sur le lemme suivant, où il n'est question que de fonctions homogènes à coefficients réels :

Si l'on considère une fonction linéaire de deux variables ou deux fonctions linéaires de trois varia-

bles, on peut toujours trouver pour les variables des valeurs entières ne s'annulant pas en même temps et telles que, pour ces valeurs des variables, les fonctions considérées soient en valeur absolue inférieures à une quantité donnée quelconque, si petite qu'elle soit.

Ce lemme est un cas particulier de la proposition suivante, que nous allons démontrer :

Étant données $n-1$ fonctions linéaires de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut rendre séparément chaque fonction inférieure en valeur absolue à une quantité quelconque donnée par des systèmes de valeurs entières des variables ne s'annulant pas toutes en même temps.

La proposition est bien connue dans le cas de deux variables, et, au surplus, la méthode que nous allons employer la démontre implicitement dans ce cas. Supposons-la donc vraie pour $n-2$ fonctions au plus de $n-1$ variables; il suffit de montrer qu'elle est encore vraie pour $n-1$ fonctions de n variables.

Soient

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{n-1} &= a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \ldots + a_{n-1,n}x_n, \end{aligned}$$

les $n-1$ fonctions linéaires; désignons, comme on le fait souvent, la valeur absolue d'une lettre par cette lettre placée entre parenthèses; nous voulons démontrer qu'on peut avoir, p variant de 1 à n

$$(X_p) < \eta,$$

pour des valeurs entières, non nulles en même temps, des variables, η étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra.

Considérons, à cet effet, la fonction quadratique

$$f = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_{n-1}^2.$$

Il nous suffira de montrer qu'on peut avoir, pour une pareille substitution,

$$f < \gamma_1^2.$$

Remarquant que f doit contenir les carrés de toutes les variables, sans quoi il n'en entrerait pas n dans les $n - 1$ fonctions X, nous pourrons décomposer f en carrés par la méthode de Lagrange sous la forme

$$f = Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_{n-1}^2,$$

Y_1 contenant x_1 qui n'entre pas dans $Y_2, Y_3, \ldots, Y_{n-1}$, et tous les carrés étant positifs. Dès lors, $Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ forment un système de $n - 2$ fonctions linéaires au plus de $n - 1$ variables; et nous pouvons, d'après l'hypothèse, les rendre séparément aussi petites que nous voudrons pour des valeurs entières, non nulles en même temps, de $x_2, x_3, \ldots, x_n$, et remarquons que, si quelques-unes de ces variables n'entraient pas dans Y_2, $Y_3, \ldots, Y_{n-1}$, auquel cas elles resteraient indéterminées, elles entreraient forcément dans Y_1.

Supposons donc, q variant de 2 à n,

$$(Y_q) < \frac{1}{N^2},$$

N étant un nombre entier tel, que l'on ait

$$\frac{1}{N} < \frac{\gamma_1}{\sqrt{n-1}}.$$

Si nous considérons les substitutions correspondantes et si nous multiplions tous les nombres entiers qui la composent par un même entier k positif, mais du reste indéterminé, la substitution de ces nouveaux nombres donnera évidemment l'inégalité

$$(Y_q) < \frac{k}{N^2}.$$

D'autre part, Y_1 prend la forme $A_1 x_1 + A_2 k$, ou $A_1(x_1 + Ak)$, en posant

$$\frac{A_2}{A_1} = A,$$

ce qu'on peut toujours faire, puisque A_1 n'est pas nul, et nous pouvons de plus le supposer positif.

Il suffit de démontrer que l'on peut avoir

$$(x_1 + Ak) < \frac{1}{A_1} \frac{\eta}{\sqrt{n-1}}, \qquad \frac{k}{N^2} < \frac{\eta}{\sqrt{n-1}},$$

car alors, quel que soit p de 1 à $n-1$, on aura

$$Y_p^2 < \frac{\eta^2}{n-1},$$

et, par suite,

$$f > \eta^2.$$

La démonstration n'a d'intérêt que lorsque A est incommensurable; car, dans le cas contraire, on pourrait annuler Y_1. Développons alors (A) en fraction continue; cette dernière sera indéfinie, et nous aurons

$$(A) = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}$$

Examinons d'abord le cas où a_2 serait supérieur à N. Écrivons alors, en désignant par la lettre ε affectée d'un indice, une quantité comprise entre -1 et $+1$

$$(A) = a_1 + \frac{\varepsilon_1}{a_2};$$

$\frac{Y_1}{A_1}$ devient

$$x_1 \pm k a_1 \pm \frac{k\varepsilon_1}{a_2};$$

si nous faisons $k = 1$, $x_1 = \mp a_1$, l'expression précédente se réduit à

$$\pm \frac{\varepsilon_1}{a_2},$$

et elle sera inférieure en valeur absolue à

$$\frac{1}{A_1} \frac{\eta}{\sqrt{n-1}},$$

pourvu que N soit suffisamment grand, puisque $a_2 > N$. Il suffirait même que a_2 fût dans un rapport fini avec N. Quant à $\frac{k}{N^2}$ il devient $\frac{1}{N^2}$ et l'on a déjà

$$\frac{1}{N} < \frac{\eta}{\sqrt{n-1}}.$$

Le cas précédent écarté, nous pouvons mettre (A) sous l'une des formes suivantes

$$a_1 + \frac{\varepsilon_1}{a_2}, \quad \frac{p_2}{a_2} + \frac{\varepsilon_2}{a_2 q_3}, \quad \frac{p_3}{q_3} + \frac{\varepsilon_3}{q_3 q_4}, \quad \ldots,$$

$$\frac{p_\alpha}{q_\alpha} + \frac{\varepsilon_\alpha}{q_\alpha q_{\alpha+1}}, \quad \ldots.$$

Remplaçant (A) par la dernière de ces expressions dans $x_1 + Ak$, nous obtenons

$$x_1 \pm k \frac{p_\alpha}{q_\alpha} \pm \frac{k \varepsilon_\alpha}{q_\alpha q_{\alpha+1}}.$$

Faisant $k = q_\alpha$, $x_1 = \mp p_\alpha$, cette quantité se réduit à

$$\frac{\varepsilon_\alpha}{q_{\alpha+1}}.$$

Or, $q_{\alpha+1} > q_\alpha$, et ces nombres croissent indéfiniment.

Il viendra donc un moment où, q_α étant inférieur à N, $q_{\alpha+1}$ lui sera supérieur, à moins que a_2 ne soit déjà plus grand que N, auquel cas la proposition est déjà démontrée; dès lors on aura

$$\frac{\varepsilon_\alpha}{q_{\alpha+1}} < \frac{1}{N}, \qquad \frac{k}{N^2} < \frac{1}{N},$$

et il suffira que $\frac{A_1}{N}$ soit inférieur à $\frac{\eta}{\sqrt{n-1}}$, puisque déjà $\frac{1}{N}$ lui est inférieur. La chose étant toujours possible, la proposition est démontrée dans toute sa généralité.

Comme conséquence on voit que toute fonction quadratique réelle et homogène, dont le hessien est nul, peut être rendue aussi petite que l'on veut pour des valeurs entières des variables.

[C1a] SUR UNE DIFFÉRENTIELLE EXACTE;

Par M. Léon AUTONNE,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lyon.

Les candidats à la Licence usent rarement des ressources qu'offrent, dans beaucoup de cas, les coordonnées homogènes dans l'espace. Cela m'engage à insérer l'exercice ci-dessous, lequel n'a, d'ailleurs, aucune prétention à la haute science.

Connaissant la position d'un point dans l'espace, on possède, non ses quatre coordonnées homogènes

$$x_j (j = 1, 2, 3, 4),$$

mais seulement leurs rapports. Pour fixer les valeurs absolues, on pose

$$\text{(o)} \qquad e = \sum_j e_j x_j = 1, \qquad e_j = \text{const. arbitr.}$$

Alors les points du plan e, $e = 0$, ont leurs coordonnées infinies. Ce plan joue le rôle du plan de l'infini avec les coordonnées ordinaires. Conservons au plan e son nom de *plan de l'infini*; les droites de e sont les *droites à l'infini*. Chaque plan possède une droite à l'infini.

Seulement alors une même expression

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

s'écrit d'une infinité de façons différentes, car les coefficients de F peuvent être considérés comme des fonctions arbitraires de la quantité e, laquelle est l'unité en vertu de (0). On doit donc, en toute généralité, écrire pour la dérivée partielle

$$(1) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial e} c_j, \qquad \frac{\partial F}{\partial e} = \text{quelconque}.$$

Voici maintenant le problème :

Sur la surface algébrique S

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

f forme quaternaire, indécomposable, on envisage l'expression différentielle

$$dU = \sum A_j \, dx_j,$$

A_j = fraction rationnelle homogène en x_j, de degré m.

En vertu des relations (0) et (2) les quatre variables x_j se réduisent à deux distinctes u et v, que l'on n'a pas besoin de spécifier plus exactement; u et v seront, par exemple, si l'on veut, deux combinaisons linéaires homogènes, à coefficients constants, des x_j.

Exprimons que dU est la différentielle exacte d'une fonction U de u et v.

Posons j ou $k = 1, 2, 3, 4$

$$A_{jk} = \frac{\partial A_j}{\partial x_k}; \qquad P_{jk} = -P_{kj} = A_{jk} - A_{kj}; \qquad p_j = \frac{\partial f}{\partial x_j};$$

$$u_j = \frac{\partial x_j}{\partial u}; \qquad v_j = \frac{\partial x_j}{\partial v}; \qquad [jk] = u_j v_k - u_k v_j;$$

$$(jk) = e_j p_k - e_k p_j.$$

Il viendra

$$dU = du \sum_j A_j u_j + dv \sum_j A_j v_j.$$

La condition d'intégrabilité est

$$\frac{\partial}{\partial v} \sum_j A_j u_j = \sum_j A_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial v \partial u} + \sum_j \sum_k A_{jk} u_j v_k$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} \sum_j A_j v_j = \sum_j A_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial u \partial v} + \sum_j \sum_k A_{jk} u_k v_j,$$

c'est-à-dire

$$\sum_j \sum_k P_{jk} [jk] = 0.$$

Les $[jk]$ sont les six coordonnées homogènes de la droite qui joint les deux points de coordonnées u_j et v_j respectivement. Or

$$0 = \frac{\partial f}{\partial u} = \sum_j p_j u_j = \frac{\partial e}{\partial u} = \sum_j e_j u_j,$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial v} = \sum_j p_j v_j = \frac{\partial e}{\partial v} = \sum_j e_j v_j.$$

La droite est la droite à l'infini du plan tangent à la surface S et l'on a

$$\frac{[12]}{(34)} = \frac{[34]}{(12)} = \frac{[23]}{(14)} = \frac{[14]}{(23)} = \frac{[31]}{(24)} = \frac{[24]}{(31)}.$$

La condition d'intégrabilité est donc que l'expression

$$\mathfrak{D} = P_{12}(34) + P_{34}(12) + P_{23}(14) + P_{14}(23) \\ + P_{31}(24) + P_{24}(31)$$

soit divisible par f.

Exprimons que la condition ne change pas par l'effet de la formule (1), c'est-à-dire quand on remplace

$$p_j \text{ par } p_j + e_j \frac{\partial f}{\partial e}, \qquad A_{jk} \text{ par } A_{jk} + \frac{\partial A_j}{\partial e} e_k.$$

Les (jk) ne changent pas; les P_{kj} s'augmentent du terme

$$[jk]' = e_k \frac{\partial A_j}{\partial e} - e_j \frac{\partial A_k}{\partial e};$$

$\mathfrak{D}$ s'augmente de l'expression

$$(12)[34]' + (23)[14]' + (31)[24]' \\ + [12]'(34) + [23]'(14) + [31]'(24),$$

laquelle est identique au déterminant

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e}\, e\, p\, e\right),$$

c'est-à-dire nulle.

$\mathfrak{D}$ est donc un invariant vis-à-vis de la formule (1).

La condition s'interprète géométriquement. Les P_{jk} sont les six coefficients d'un complexe linéaire $\mathfrak{C}$. La condition est celle-ci : *la droite à l'infini du plan tangent à la surface* S *est située sur le complexe* $\mathfrak{C}$.

Pour revenir aux coordonnées ordinaires, posons

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = 1;\ A_1 = A,\ A_2 = B,\ A_3 = C;$$

il viendra, puisque $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, $e_4 = 1$,

$$dU = A\,dx + B\,dy + C\,dz,$$

$$\mathfrak{D} = \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial y},$$

ce qui se vérifie directement sans peine.

On sait que M. Em. Picard a étudié d'une façon très approfondie l'expression

$$\int A\,dx + B\,dy + C\,dz,$$

intégrale de différentielle exacte, sur une surface algébrique.

[R7bβ]

REMARQUE SUR LES PROBLÈMES DE FORCES CENTRALES;

PAR M. ÉMILE BOREL.

On sait que les problèmes de forces centrales se ramènent aux équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} r^2\frac{d\theta}{dt} &= C,\\ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \varphi(r) + h.\end{aligned}\right.$$

Supposons que nous voulions reconnaître, sur ces équations, s'il est possible que le mobile décrive un cercle de rayon donné a ayant son centre à l'origine, avec une vitesse angulaire donnée ω. En remplaçant r par la constante a et $\frac{d\theta}{dt}$ par la constante ω ces équations deviennent

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} a^2\omega &= C,\\ a^2\omega^2 &= \varphi(a) + h\end{aligned}\right.$$

et sont par suite vérifiées, pourvu que C et h aient des valeurs convenables. Inversement, à un système quelconque de valeurs de C et h correspond en général, par les équations (2), un système de valeurs de a et ω. On est ainsi conduit à une série de conséquences absurdes qu'il est inutile d'énoncer.

Dans les Traités de Mécanique, pour rechercher avec quelle vitesse angulaire peut être décrit un cercle donné sous l'influence d'une force centrale donnée, on écrit que la projection de l'accélération sur la normale est égale à la force (la masse étant prise pour unité) ; il est inutile de refaire ce calcul. Mais je voudrais indiquer pourquoi, en se servant des équations (1) pour résoudre cette question, on obtient un résultat absurde ; cela tient simplement à ce que ces équations ont été déduites des équations du mouvement

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{X}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{Y}. \end{aligned} \right.$$

en les multipliant respectivement par y, $-x$ et par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$. Le système (1) n'est donc équivalent au système (3) que si le déterminant

$$\begin{vmatrix} y & \frac{dx}{dt} \\ -x & \frac{dy}{dt} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2)$$

est supposé différent de zéro, c'est-à-dire si x^2+y^2 n'est pas constant. On ne peut donc s'en servir dans le cas où le mouvement a lieu sur un cercle.

Des remarques analogues pourraient être faites sur d'autres problèmes de Mécanique ; par exemple, si un point matériel est soumis à une force dérivant d'un potentiel et rencontrant Oz, les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

avec la condition $y\frac{\partial U}{\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial y} = 0$. On ne peut remplacer les deux premières de ces équations par les intégrales des aires et des forces vives

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C, \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2U + h$$

que si $x^2 + y^2$ n'est pas constant; on ne pourra donc étudier ainsi le cas particulier où le point se meut sur un cylindre de révolution ayant pour axe Oz.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES. EXAMENS ORAUX.

QUESTIONS DE MÉCANIQUE POSÉES A LA SORBONNE, DE 1889 A 1895.

Abréviations.

A......	MM. Appell.	K......	MM. Kœnigs.
B......	Boussinesq.	P......	Poincaré.
D......	Darboux.	Pu.....	Puiseux.

Cinématique.

Composantes de l'accélération sur la tangente et la normale principale. — B. 89. — D. 90. — B. 91. —

Pu. 92. — K. 94. — Les déduire des composantes de l'accélération sur trois axes rectangulaires. — B. 95.

Composantes de l'accélération suivant le rayon vecteur et sa perpendiculaire. — Pu. 92.

Mouvement d'une figure plane dans son plan. Méthode géométrique. — A. 89. — A. D. 91. — K. 94. — Vitesse d'un point de la figure. — A. 90. — Application au tracé des tangentes aux roulettes. — B. 89.

Centre des accélérations. — K. 94.

Relation entre le rayon de courbure de la base et de la roulante. — Pu. 92.

Rayon de courbure de la trajectoire d'un point d'une figure plane dans son plan ; cercle des inflexions. — D. 90. — Construction de Savary. — K. 95.

Composition d'une translation et d'une rotation dont l'axe est perpendiculaire à la translation. — Pu. 92.

Composition d'un couple de rotation. — A. 89. — A. 90. — K. 94.

Composition de rotations concourantes. — A 89. — A. 90. — K. 94. — A. 95.

Axe instantané de rotation pour un corps ayant un point fixe. — A. 89.

Cône base et cône roulant. — K. 94.

Mouvement général d'un corps solide. — D. 90.

Détermination géométrique du moment hélicoïdal. — A. 89. — P. 91. — A. 92. — K. 94. — Pu. 95. — Détermination analytique de l'axe hélicoïdal. — Pu. 92.

Droites conjuguées. — Pu 95.

Théorème de Coriolis. — B. 89. — D. P. 90. — A. K. 92. — K. 94. — K. 95.

Théorie des engrenages plans. — K. 94. — A. 95.

Joint de Cardan. — K. 94.

Parallélogramme de Watt. — D. 90. — A. 95.

Inverseur de Peaucellier. — A. 95.

Statique.

Composition et représentation des couples. — D. 91.

Réduction des forces appliquées à un corps solide; conditions pour qu'il y ait une résultante unique. — A. 89. — A. 90.

Équations de l'équilibre d'un corps solide libre. — B. 89. — Pu. 94.

Équilibre d'un corps solide mobile autour d'un axe fixe. — A. 89.

Équilibre d'un fil soumis à des forces données. — P. 90. — K. 92.

Chaînette. — A. B. 89. — A. P. 90. — A. D. P. 91. — A. B. 92. — A. B. 95.

Lignes géodésiques, leur application en Statique. — K. 92.

Centre de gravité d'une zone sphérique. — D. 91.

Potentiel. — Moments d'inertie.

Potentiel, son interprétation. — B. D. 89. — B. 90. — B. 91.

Potentiel d'une couche sphérique. — B. 94. — B. 95.

Équations de Laplace et de Poisson. — B. 95.

Moments d'inertie, relations fondamentales. — A. 89. — P. 90. — K. 94. — A. 95.

Moments d'inertie par rapport à deux axes parallèles. — P. 90. — A. 93.

Ellipsoïde central. — D. 89. — A. 90. — A. P. 91. — A. 93.

Dans quel cas un axe d'inertie principal pour l'un de ses points, l'est-il encore pour un second? — A. 90.

Moment d'inertie d'un cercle homogène par rapport à un point de son plan. — K. 92.

Moments d'inertie d'un ellipsoïde homogène par rapport à ses axes. — P. 90.

Dynamique du point.

Mouvement rectiligne d'un point soumis à la force px^{n-1}. — Pu. 92.

Mouvement d'un projectile dans un milieu résistant. — D. 90. — D. 91. — A. 93. — K. 95.

Principe des aires. — D. 91. — Lorsque le principe des aires est applicable à un mouvement plan, la force est centrale. — K. 94.

Théorème des forces vives. — A. K. 92. — Pu. 94.

Qu'appelle-t-on intégrale du mouvement? — K. 92.

Mouvement d'un point soumis à une force centrale. — A. B. 89. — Cas de $\frac{\varphi(\theta)}{r^2}$. — A. 90. — Cas de l'attraction newtonienne. — A. 90. — P. 91. — Cas de $\frac{1}{r}$. — A. K. 92.

Équation de Binet. — A. 85. — A. Pu. 92. — Application aux coniques. — B. 91.

Mouvement relatif d'une planète autour du Soleil. — D. 90.

De la loi de Kepler déduire la loi de Newton. — A. 89. — D. 90. — A. B. D. 91. — A. 92. — K. 94.

Équations du mouvement sur une courbe. — B. 90. — Pu. 95. — Cas de la pesanteur. — D. 91.

Pendule simple. — A. 90. — A. 91. — Développement en série. — A. Pu. 92. — Pu. 95. — Dans un milieu résistant proportionnellement à la vitesse. — B. 89. — B. 91.

Mouvement d'un point pesant sur la cycloïde. — A. 89. — A. D. 90. — A. 92. — A. 95.

Tautochrone pour la pesanteur. — A. B. 89. — A. 90.

— A. B. D. 91. — A. Pu. 92. — B. 93. — K. 94. — B. 95.

Tautochrone en général. — Pu. 92. — A. 93.

Brachistochrone. — A. B. 89. — B. 90. — A. D. 91. A. 92. — A. 93. — K. 94. — Pu. 95.

Mouvement d'un point pesant dans le voisinage du point le plus bas d'une surface. — Pu. 95.

Mouvement sur un ellipsoïde d'un point simplement soumis à la réaction normale. — Pu. 92. — Pu. 94.

Mouvement d'un point pesant sur la sphère. — A. 92. — A. Pu. 95.

Équations du mouvement relatif. — A. 89. — A. 93. — A. 95.

La verticale d'un lieu est la résultante de l'attraction de la Terre et de la force centrifuge. — B. 89.

Mouvement relatif d'un point à la surface de la Terre. — A. 89. — P. 91. — A. 92. — P. 94. — A. 95. — Mouvement dans le plan tangent. — A. 85.

Pendule de Foucault. — P. 90. — K. 95.

Dynamique des systèmes.

Théorèmes généraux sur le mouvement des systèmes. — A. 89. — A. 92. — K. 94. — A. 95. — Quels sont ceux qui s'appliquent au mouvement relatif par rapport au centre de gravité. — A. 89.

Définition du centre de gravité d'un système. — B. 90. — B. 94.

Mouvement du centre de gravité. — B. 89. — A. 90. — A. Pu. 92.

Principe des moments de quantité de mouvement. — D. 89. — D. 91. — Pu. 92.

Principe des aires; plan maximum des aires. — B. 90.

Théorème des forces vives. — A. 89. — A. 90. — A.

91. — A. 92. — A. 94. — A. Pu. 95. — Travail des forces intérieures. — A. 91.

Mouvement de deux points s'attirant en raison inverse de la distance. — Pu. 94.

Mouvement d'une chaîne pesante sur une courbe. — A. 89.

Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe. — A. 90. — D. 91.

Propriétés mécaniques des axes principaux d'inertie. — D. 91.

Pendule composé. — A. 89. — A. 90. — A. 91. — A. 95.

Métronome. — B. 89. — B. 94. — B. 95.

Mouvement d'un corps solide ayant un point fixe. — A. 89. — A. 90. — A. 91. — A. K. Pu. 92. — Pu. 95.

Cas où la résultante des forces passe par le point fixe. — A. 85. — P. 91. — A. 93. — K. 94. — A. 95.

Cas d'un corps de révolution pesant suspendu par un point de son axe. — K. 92.

Équations générales de la Mécanique.

Principe des vitesses virtuelles. — A. 89. — A. 90. — A. 91. — A. Pu. 92. — A. 93.

Application aux conditions d'équilibre d'un solide libre. — A. 85.

Condition d'équilibre d'une machine simple : coin. — A. 89. — Vis dans son écrou. — A. 89. — A. 91. — A. 92.

Principe de d'Alembert. — K. 94.

Équations de Lagrange en général. — A. 89. — A. P. 90. — A 91. — K. Pu. 92. — K. 94. — A. K. 95. — Pour un point. — A. 90. — A. 92. — A. 93. — Pu. 94. Application au pendule conique. — A. 89. — A. 90. — A. 95.

Équation d'Hamilton. — A. 89. — A. P. 90. — Pu. 92. — A. 95.

Position d'équilibre stable d'un système. — Pu. 95.

Petites oscillations d'un système autour d'une position d'équilibre stable. — A. 95.

Frottement. — Percussion.

Frottement de glissement. — B. 89.

Percussion sur un solide mobile autour d'un axe fixe. — B. Pu. 94.

Pendule balistique. — B. D. 89. — K. 95.

Choc de deux sphères élastiques se mouvant sur une même droite. — D. 90.

Hydrostatique. — Hydrodynamique.

Pression sur un élément de fluide. — B. 89. — B. 90. — B. 91. — B. 93. — B. 94. — B. 95.

Équation générale de l'Hydrostatique. — B. 89. — B. 90. — Pu. 92. — A. 93. — K. 94. — A. Pu. 95.

Équilibre d'un liquide pesant dans un vase animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe. — B. 93. — B. 95.

Équation générale de l'Hydrodynamique. — B. 89. — B. 90. — B. 91. — Pu. 92. — B. 93. — B. 94. — B. 95.

Équation de continuité. — B. 90. — B. 91. — Pu. 92. — B. 95.

Principe de Bernoulli. — B. 89. — B. 94. — B. 95.

E. C.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Mannheim.

Je ne pense pas que la propriété, qui fait l'objet de la question 1711, ait été trouvée par Riccati, mort en 1754, et si connu par l'équation qui porte son nom.

Il a donc un homonyme qui a cru découvrir cette propriété. Ce dernier s'est trompé, car, en 1859, dans un Travail intitulé : *Recherches géométriques sur le lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (*Journal de Liouville*), j'ai non seulement démontré que *lorsque la courbe qui roule est une épicycloïde, ce lieu est une ellipse,* mais j'ai ajouté que *les axes de cette courbe ont pour longueurs la longueur de l'épicycloïde et la longueur de la développée de cette courbe.*

En outre, j'ai dit que *le lieu des positions successives des centres de courbure de la développée de l'épicycloïde est aussi une ellipse.*

Suivant une remarque faite dans le travail que je viens de citer, l'équation en coordonnées rectangles du lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite n'est autre, pour la courbe qui roule, que l'équation qu'on appelle maintenant *intrinsèque.*

BIBLIOGRAPHIE.

Exercices de Géométrie, comprenant *l'exposé des Méthodes géométriques et* 2000 *questions résolues,* par

F. J. (3^{me} édition, 1896. Tours et Paris, Mame et Poussielgue).

Les *Nouvelles Annales mathématiques,* par la plume autorisée de M. H. Faure, Commandant d'artillerie, ont rendu compte jadis de cet Ouvrage et en ont fait ressortir les grandes qualités (1883, p. 516); il nous suffira donc de consacrer quelques lignes à la troisième édition.

L'exposé des *Méthodes pour démontrer les théorèmes et résoudre les problèmes de Géométrie,* amélioré dans quelques détails, reste la partie la plus originale et la plus importante de l'Ouvrage; nous n'hésitons pas à dire que cet exposé, au moins restreint, devrait être entre les mains de tous les étudiants.

Le *Recueil d'exercices,* enrichi de plusieurs questions et de nouvelles démonstrations, a fait de nombreux emprunts à des Ouvrages français ou étrangers, à diverses publications périodiques et notamment aux *Nouvelles Annales* (120 citations); nous en félicitons l'auteur, car c'est la bonne manière de présenter une grande variété d'exercices intéressants; d'ailleurs bon nombre de questions et de démonstrations sont nouvelles ou, du moins, peu connues.

L'Ouvrage contient des notes très intéressantes et de nombreux renseignements bibliographiques et biographiques.

La *Géométrie moderne du triangle* a fourni une centaine d'exercices, bien choisis, où l'on trouve les noms de plusieurs géomètres contemporains et notamment ceux de MM. Lemoine, Brocard et Neuberg.

Enfin, l'Ouvrage se termine par diverses Tables, dont la simple énumération indiquera suffisamment l'utilité et l'intérêt: *Lexique géométrique, Problèmes et théorèmes historiques, Table des notes principales, Index bibliographique et biographique.*

ERRATA.

3^{e} série, t. XV, 1896, p. 144, ligne 14, *au lieu de* publiée, *lisez* publié.

Page 145, ligne 11 en remontant, *au lieu de* un cardioïde et une point, *lisez* une cardioïde et un point.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1671.

(1894, p. 3*.)

On considère une courbe quelconque, son centre de courbure C en un point M quelconque de la courbe, puis le centre de courbure C_1 correspondant au point C de la première développée, puis encore le centre de courbure C_2 correspondant au point C_1 de la seconde développée, et ainsi de suite jusqu'au centre C_n. On sait que si les coordonnées x et y de C sont des fonctions d'un paramètre t, il en est de même de coordonnées x_n et y_n d'un quelconque des centres de courbure. Montrer que l'expression

$$\frac{dx_n^2 + dy_n^2}{dx_n\, d^2y_n - dy_n\, d^2x_n}$$

conserve la même valeur pour les coordonnées de l'un quelconque des centres de courbure successifs.

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. G. Tzitzéica.

Considérons les centres C_p, C_{p+1}; soient R_p, R_{p+1} les rayons de courbure correspondants. On a

$$R_p = \frac{(dx_p^2 + dy_p^2)^{\frac{3}{2}}}{dx_p\, d^2y_p - dy_p\, d^2x_p},$$

$$R_{p+1} = \frac{(dx_{p+1}^2 + dy_{p+1}^2)^{\frac{3}{2}}}{dx_{p+1}\, d^2y_{p+1} - dy_{p+1}\, d^2x_{p+1}},$$

d'où

$$\frac{dx_p^2 + dy_p^2}{dx_p\, d^2y_p - dy_p\, d^2x_p} = \frac{R_p}{(dx_p^2 + dy_p^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{R_p}{ds_p}$$

et

$$\frac{dx_{p+1}^2 + dy_{p+1}^2}{dx_{p+1}\, d^2y_{p+1} - dy_{p+1}\, d^2x_{p+1}} = \frac{R_{p+1}}{ds_{p+1}}.$$

Le théorème énoncé revient à la démonstration de l'égalité

$$\frac{R_p}{ds_p} = \frac{R_{p+1}}{ds_{p+1}},$$

relation connue [*voir* E. PICARD ([1]), vol. I, p. 330].

QUESTIONS.

1728. Si p est un nombre premier qui ne divise pas x, et r un nombre entier quelconque, l'expression $x^{p^r - p^{r-1}} - 1$ est divisible par p. (J.-J. MILNE.)

1729. L'équation $xyz + kw^3 = 0$, où x, y, z représentent les coordonnées homogènes d'un point du plan,

$$w = ax + by + cz,$$

et k un paramètre arbitraire, représente un système de cubiques qui ont trois points d'inflexions réels situés sur la droite w; le lieu des autres points d'inflexion se compose de deux droites imaginaires A et B.

Démontrer qu'il existe deux cubiques du système tangentes à une droite donnée L, et que les deux points de contact sont conjugués harmoniques relativement aux deux points imaginaires conjugués où la droite L rencontre A et B.

(A. LEGOUX.)

1730. Si

$$x_1 = \sqrt{a-b}, \quad x_2 = -\sqrt{b-c}, \quad x_3 = \sqrt{c-d}, \quad x_4 = -\sqrt{d-a},$$

et si

$$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n,$$

montrer que

$$\frac{S_5}{5} + \frac{S_1^5}{1.2.3.4.5} + \frac{S_1^2}{1.2}\,\frac{S_3}{3} = \frac{S_1}{1}\,\frac{S_4}{4}.$$

(H.-J. GERRANS.)

([1]) *Traité d'Analyse.*

[C2j]

UNE LEÇON SUR LA MÉTHODE DE QUADRATURE DE GAUSS;

PAR M. LOUIS RAFFY,
Maître de Conférences à l'École Normale supérieure.

Le programme de l'agrégation des Sciences mathématiques pour 1896 porte comme épreuve pratique le calcul d'une intégrale par la méthode de Gauss. Il renvoie les candidats à un Ouvrage épuisé depuis bien des années et où, d'ailleurs, la question de l'approximation obtenue n'est pas posée. Pour ces raisons nous croyons utile de publier la présente Leçon.

1. Ayant à intégrer une fonction $F(x)$ entre deux limites *données* α et β, on remplace cette fonction par un polynome entier $G(x)$, de degré $n-1$, qui pour n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, comprises entre α et β, acquière les mêmes valeurs que $F(x)$, et l'on prend pour valeur de l'intégrale proposée l'intégrale du polynome $G(x)$. Tel est le principe des quadratures par interpolation (Newton, Cotes, Gauss).

On sait que le polynome $G(x)$ est unique et a pour expression

$$G(x)=\sum_{r=1}^{r=n}\gamma_r(x)\,F(x_r), \tag{1}$$

si l'on pose

$$\gamma_r(x)=\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\ldots(x-x_n)}{(x_r-x_1)\ldots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\ldots(x_r-x_n)}. \tag{2}$$

Les polynomes γ_r ne dépendent que des nombres x_r et nullement de la fonction $F(x)$. Leurs intégrales

$$g_r=\int_\alpha^\beta \gamma_r(x)\,dx \tag{3}$$

ne dépendront donc absolument que de ces mêmes nombres x_r, de α et de β, et l'on aura pour l'intégrale cherchée

$$(4)\qquad \int_\alpha^\beta G(x)\,dx = g_1\,F(x_1) + \ldots + g_r\,F(x_r) + \ldots + g_n\,F(x_n).$$

Il suffit que les intégrales g_r soient calculées une fois pour toutes.

2. Pour nous faire une idée de ce que Gauss appelle *le degré de précision* de la méthode précédente, supposons que la fonction à intégrer $F(x)$ soit développable entre α et β par la formule de Mac-Laurin,

$$(5)\qquad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots.$$

Le polynome $G(x)$ pourra être écrit

$$(6)\qquad G(x) = \sum_{r=1}^{r=n} \gamma_r(x)(a_0 + a_1 x_r + a_2 x_r^2 + \ldots + a_m x_r^m + \ldots).$$

Réunissons tous les termes en a_0, tous les termes en a_1, et ainsi de suite, ce qui donnera

$$(6)'\qquad G(x) = a_0\,\varphi_0(x) + a_1\,\varphi_1(x) + \ldots + a_m\,\varphi_m(x) + \ldots;$$

enfin formons la différence

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,dx - \int_\alpha^\beta G(x)\,dx.$$

Nous pourrons l'écrire

$$(7)\qquad \int_\alpha^\beta [F(x) - G(x)]\,dx = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_m \int_\alpha^\beta [x^m - \varphi_m(x)]\,dx.$$

Cette expression de l'erreur donne lieu à une remarque importante :

Quels que soient les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la sé-

rie (7) *ne contient aucun coefficient a d'indice moindre que n*; ou encore : *Les deux intégrales*

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{F}(x)\,dx, \qquad \int_\alpha^\beta \mathrm{G}(x)\,dx,$$

ordonnées suivant les coefficients a_r, *ont leurs n premiers termes communs.*

Voici comment on peut s'en assurer sans calcul. Les polynomes $\gamma_r(x)$ étant indépendants de la fonction $\mathrm{F}(x)$, les polynomes $\varphi_m(x)$ n'en dépendent pas non plus. Nous les déterminerons donc en attribuant à $\mathrm{F}(x)$ une forme particulière, celle d'un polynome entier de degré $n-1$,

$$(5)' \qquad \mathrm{F}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

Dans ce cas $\mathrm{G}(x)$, qui prend les mêmes valeurs que $\mathrm{F}(x)$ pour n valeurs de x, lui est identique, quels que soient les coefficients a_r, et l'on a

$$\varphi_m(x) \equiv x^m$$

pour les valeurs $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, ce qui prouve bien que la série (7) commence par un terme en a_n. Si donc nous appelons *degré de précision* de la méthode l'indice du premier coefficient de $\mathrm{F}(x)$ qui figure dans l'expression, nous dirons : *Les nombres* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *étant quelconques, le degré de précision de la méthode de quadrature par interpolation est égal à n.*

3. Théorème. — *Par un choix convenable des nombres* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *le même d'ailleurs quelle que soit la fonction à intégrer, on peut porter au double le degré de précision de la méthode.*

Cette proposition, due à Gauss, revient à ceci : *On peut choisir les nombres* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *de telle façon* *que dans la série* (7) *les intégrales qui multiplient les coefficients* $a_n, \ldots, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}$ *soient nulles.*

Pour établir ce résultat et retrouver en même temps le précédent, considérons le polynome

$$(8) \qquad \varphi_m(x) = \gamma_1(x)x_1^m + \gamma_2(x)x_2^m + \ldots + \gamma_m(x)x_n^m.$$

C'est évidemment, d'après la formule générale (1), le polynome de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui prend les mêmes valeurs que x^m pour n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En conséquence pour les valeurs $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, il est identique à x^m, ce qui prouve le théorème du n° 2.

Pour $m \geqq n$, en faisant la division de x^m par le produit

$$(9) \qquad \xi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

on trouve

$$x^m = \xi_n(x)Q_{m-n}(x) + \varphi_m(x),$$

car le reste est un polynome de degré inférieur ou égal à $n-1$, qui prend les mêmes valeurs que x^m pour les n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et qui, par suite, n'est autre que $\varphi_m(x)$. On a donc identiquement

$$(10) \qquad x^m - \varphi_m(x) = \xi_n(x)Q_{m-n}(x),$$

le polynome Q étant d'un degré marqué par son indice.

Exprimons maintenant l'énoncé. On veut que les n intégrales

$$(11) \qquad \int_\alpha^\beta [x^m - \varphi_m(x)]\,dx \qquad (m = n, n+1, \ldots, 2n-1)$$

soient nulles, ou, ce qui revient au même, en vertu de la formule (10), que l'intégrale

$$(12) \qquad \int_\alpha^\beta \xi_n(x)(a_nQ_0 + a_{n+1}Q_1 + \ldots + a_{2n-1}Q_{n-1})\,dx$$

soit nulle, quelles que soient les constantes $a_n, \ldots, a_{2n-1}$. Or il est aisé de voir qu'on peut déterminer *successivement* $a_{2n-1}, a_{2n-2}, \ldots, a_{n+1}, a_n$ de manière que le polynome

$$a_{2n-1}Q_{n-1} + a_{2n-2}Q_{n-2} + \ldots + a_{n+1}Q_1 + a_n Q_0,$$

dont les composants Q sont chacun du degré marqué par leur indice, soit identique à un polynome *arbitraire* du degré $n-1$. Il *faut* donc et il *suffit* que l'on ait

$$\int_\alpha^\beta \xi_n(x)\,V(x)\,dx = 0, \tag{13}$$

en désignant par $V(x)$ un polynome *arbitraire, du degré* $n-1$. S'il existe un polynome $\xi_n(x)$ de degré n, admettant n racines comprises entre α et β, et satisfaisant à cette condition, il est évident qu'il n'y aura qu'à prendre pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de ce polynome; on annulera ainsi les n intégrales (11), et cela *quelle que soit la fonction à intégrer* $F(x)$, puisque ces intégrales n'en dépendent pas.

Je dis qu'on peut prendre pour $\xi_n(x)$ le polynome

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-\alpha)^n(x-\beta)^n. \tag{14}$$

En effet, ce polynome est évidemment d'ordre n; d'après le théorème de Rolle, il admet n racines comprises entre α et β. Car si l'on pose pour abréger

$$\psi(x) = (x-\alpha)^n(x-\beta)^n,$$

on voit immédiatement que la dérivée $\psi'(x)$ admet $n-1$ fois les racines α et β, et de plus une racine comprise entre α et β. En appliquant encore le théorème de Rolle on reconnaît que toute dérivée $\psi^{(p)}(x) (p \leqq n)$ admet les deux racines α et β avec l'ordre de multiplicité $n-p$ et, en outre, p racines comprises entre α et β.

Pour établir la dernière propriété, rappelons une formule que donne l'intégration par parties,

$$\int V(x)\psi^{(n)}(x)\,dx = V\psi^{(n-1)} - V'\psi^{(n-2)} + V''\psi^{(n-3)} + \ldots$$
$$+ (-1)^n \int V^{(n)}(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Si l'on intègre entre α et β, les n premiers termes du second membre disparaissent, puisque les $n-1$ premières dérivées de ψ s'annulent pour α et β; le dernier s'évanouit également, puisque la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $V(x)$ se réduit à zéro. L'équation (13) est donc bien vérifiée par le polynome (14).

Il est d'ailleurs aisé de montrer que tout polynome $\zeta(x)$ de même degré que $\xi_n(x)$ et jouissant de la propriété qu'exprime l'équation (13) ne peut différer de $\xi_n(x)$ que par un facteur constant. En effet, si l'on a simultanément

$$\int_\alpha^\beta \xi_n(x)\,V(x)\,dx = 0, \qquad \int_\alpha^\beta \zeta(x)\,V(x)\,dx = 0,$$

on en conclura

$$(15)\qquad \int_\alpha^\beta [\zeta_n(x) - k\zeta(x)]\,V(x)\,dx = 0,$$

quelle que soit la constante k. Or on peut choisir cette constante de telle sorte que le polynome $\xi_n - k\zeta$ s'abaisse au degré $n-1$. Cela étant, comme la relation précédente est supposée avoir lieu quel que soit le polynome $V(x)$ de degré $n-1$, on pourra prendre pour $V(x)$ précisément $\xi_n - k\zeta$, ce qui réduira l'identité (15) à

$$\int_\alpha^\beta V^2(x)\,dx = 0;$$

par suite V est identiquement nul, ce qui prouve la proposition.

4. *Résumé; mode d'application.* — Pour appliquer la méthode de Gauss, il faut :

1° Connaître les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'équation

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-\alpha)^n(x-\beta)^n = 0;$$

2° Connaître les coefficients g_r définis au n° 1, savoir

$$(3) \qquad g_r = \int_\alpha^\beta \gamma_r(x)\,dx \qquad (r = 1, 2, \ldots, n);$$

3° Calculer l'intégrale cherchée en effectuant la somme

$$(4) \qquad g_1 F(x_1) + g_2 F(x_2) + \ldots + g_n F(x_n),$$

au moyen des valeurs que prend pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la fonction à intégrer $F(x)$.

Il convient d'ailleurs de remarquer que, une fois connus les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les intégrales $g_1, g_2, \ldots, g_n$ peuvent être calculées par la résolution de n équations du premier degré. En effet, en vertu de la formule (8), on a identiquement

$$(8)' \qquad x^m = \gamma_1(x)\,x_1^m + \gamma_2(x)\,x_2^m + \ldots + \gamma_n(x)\,x_n^m,$$

pour $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. On déduit de là par intégration

$$\frac{\beta^{m+1} - \alpha^{m+1}}{m+1} = g_1 x_1^m + g_2 x_2^m + \ldots + g_n x_n^m,$$

et donnant à m les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, on a n équations du premier degré propres à déterminer les n inconnues $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Il est avantageux de ramener les limites α et β de l'intégrale à être deux nombres fixes. On peut choisir, comme l'a fait Gauss, les nombres 0 et 1. A cet effet, dans l'intégrale proposée

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\,dt,$$

on opère le changement de variable

$$t = \alpha + (\beta - \alpha)x.$$

Alors l'équation $\xi_n(x) = 0$, dont les racines sont prises pour valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, devient

$$\frac{d^n}{dx^n} x^n (x-1)^n = 0.$$

Gauss a calculé avec seize décimales les racines de sept équations de cette forme ($n = 1, 2, \ldots, 7$) et les valeurs correspondantes des coefficients g_r.

On peut aussi ramener les limites de l'intégrale proposée

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\,dt$$

à être -1 et $+1$. Il suffit de poser

$$t = \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} x.$$

Alors le polynome $\xi_n(x)$, dont les racines sont prises pour valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n'est autre que

$$\frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

C'est, à un facteur constant près, le polynome X_n de Legendre.

5. *Limite de l'erreur.* — Nous allons maintenant traiter, d'après M. Markoff, dont nous simplifierons l'analyse, une question importante, entièrement négligée par Gauss : *Trouver une limite supérieure de l'er-*

reur commise quand on applique la méthode précédente. Établissons d'abord un résultat dont nous aurons à faire usage.

THÉORÈME. — *Si une fonction* $F(x)$ *et un polynome* $\Phi(x)$ *de degré* $2n-1$ *prennent les mêmes valeurs ainsi que leurs dérivées* $F'(x)$ *et* $\Phi'(x)$ *pour* n *valeurs* x_1, $x_2, \ldots, x_n$ *de la variable, et si l'on pose*

$$(16)\quad F(x)-\Phi(x)=[(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)]^2\,P(x),$$

on aura

$$(17)\qquad P(x)=\frac{F^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},$$

ξ *étant compris entre le plus grand et le plus petit des nombres* $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Pour le prouver, je dis que *si une fonction* $f(x)$ *et sa dérivée s'annulent pour* $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$, *on a*

$$(18)\quad f(x)=[(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)]^2\,\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},$$

ξ *étant compris entre le plus grand et le plus petit des nombres* $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En effet, il est visible que la fonction

$$f(z)-\left[\frac{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}\right]^2 f(x)$$

admet la racine simple $z=x$ et les n racines doubles

$$z=x_1,\ \ldots,\ x_n.$$

En appliquant à ses dérivées successives le théorème de Rolle, on reconnaît que celle d'ordre $2n$ s'annule pour un nombre ξ, compris entre la plus grande et la plus petite de ces $n+1$ valeurs; d'où résulte l'équation qu'il s'agissait d'établir.

La proposition annoncée est par là-même établie, car il suffit, dans l'équation (18), de remplacer $f(x)$ par $F(x) - \Phi(x)$ et de remarquer que la dérivée d'ordre $2n$ de $\Phi(x)$ est identiquement nulle pour trouver

$$F(x) - \Phi(x) = [(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)]^2 \frac{F^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},$$

d'où, par comparaison avec la formule (16),

$$P(x) = \frac{F^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.$$

6. Cela posé, convenons que les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient les racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée d'ordre n du polynome

(19) $$\psi(x) = (x^2 - 1)^n.$$

L'erreur ε commise en appliquant la méthode de Gauss avec ces valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$$

a évidemment pour expression

(20) $$\varepsilon = \int_{-1}^{+1} [F(x) - G(x)]\,dx.$$

Pour l'évaluer, substituons au polynome $G(x)$ un polynome $\Phi(x)$ de degré $2n - 1$

(21) $$\Phi(x) = G(x) + \psi^{(n)}(x)\,\theta_{n-1}(x)$$

qui prend évidemment les mêmes valeurs que $G(x)$ et, par suite, que $F(x)$ pour les racines $x_1, x_2 \ldots, x_n$ de $\psi^{(n)}(x)$; il en sera ainsi quel que soit le polynome θ_{n-1} de degré $n - 1$. Mais nous pouvons supposer ce polynome déterminé de telle manière que la dérivée de $\Phi(x)$ prenne les mêmes valeurs que celle de $F(x)$ pour ces mêmes nombres. Car, désignant l'un d'eux par x_r, on a

$$\Phi'(x_r) = F'(x_r) = G'(x_r) + \psi^{(n+1)}(x_r)\,\theta_{n-1}(x_r),$$

ce qui détermine le polynome θ_{n-1} par les valeurs qu'il acquiert pour les n valeurs considérées de x.

Le polynome $\Phi(x)$ que nous venons de définir peut être substitué à $G(x)$ dans l'évaluation de l'erreur ε, car on a visiblement

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} G(x)\,dx + \int_{-1}^{+1} \psi^{(n)}(x)\,\theta_{n-1}(x)\,dx.$$

Or, dans cette identité, la seconde intégrale du second membre est nulle, d'après la propriété caractéristique des polynomes de Legendre.

7. Nous sommes ainsi ramenés à évaluer l'intégrale

$$(22) \qquad \varepsilon = \int_{-1}^{+1} [F(x) - \Phi(x)]\,dx.$$

Mais, à raison des deux propriétés que nous avons données au polynome $\Phi(x)$, le théorème du n° 5 lui est applicable et l'on a

$$(16)' \quad F(x) - \Phi(x) = [(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)]^2 \frac{F^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},$$

ξ étant un nombre évidemment variable avec x, mais compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, et, par suite, compris entre -1 et $+1$ quand x varie entre ces limites. Par suite l'intégrale

$$(22)' \quad \varepsilon = \frac{1}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} [(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)]^2 F^{(2n)}(\xi)\,dx,$$

dont l'élément différentiel se compose de deux facteurs, dont l'un est essentiellement positif, pourra être écrite

$$(23) \quad \varepsilon = \frac{\mu}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} [(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)]^2\,dx,$$

μ désignant un nombre compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs que la fonction $F^{(2n)}(\xi)$ acquiert quand x varie entre -1 et $+1$. Mais comme ξ est une fonction de x dont la valeur est elle-même comprise dans ces conditions entre -1 et $+1$, on voit que μ est un nombre compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs que prend la dérivée $F^{(2n)}(x)$ quand x varie de -1 à $+1$. On peut donc le représenter par $F^{(2n)}(\xi_0)$, ξ_0 étant un certain nombre compris entre -1 et $+1$, ce qui donne

$$(24)\quad \varepsilon = \frac{F^{2n}(\xi_0)}{(2n)!}\int_{-1}^{+1}[(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)]^2\,dx.$$

L'intégrale qui figure au second membre est facile à calculer. En effet, le polynome X_n de Legendre ayant pour définition

$$X_n = \frac{1}{n!\,2^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont ses racines, on aura

$$X_n = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!\,2^n}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

d'où l'on tire

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = \frac{n!\,2^n\,X_n}{2n(2n-1)\ldots(n+1)}.$$

En conséquence,

$$\int_{-1}^{+1}[(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)]^2\,dx$$
$$= \frac{n!\,n!\,2^{2n}}{[2n(2n-1)\ldots(n+1)]^2}\int_{-1}^{+1}X_n^2\,dx.$$

Or on connaît la formule

$$\int_{-1}^{+1}X_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1};$$

on a donc cette expression finale de l'erreur,

$$(25) \qquad \varepsilon = \frac{n!\,2^{2n+1}}{[2n(2n-1)\ldots(n+1)]^3}\,\frac{F^{(2n)}(\xi_0)}{2n+1},$$

où ξ_0, on l'a vu, est compris entre -1 et $+1$.

Si l'on peut trouver la plus grande valeur absolue M de la dérivée $F^{(2n)}(x)$ entre -1 et $+1$, il suffira évidemment de substituer M à $F^{(2n)}(\xi_0)$ dans la formule précédente (25) pour avoir une limite supérieure de l'erreur ε que l'on commet en employant un polynome $G(x)$ d'un degré donné $n-1$, sans d'ailleurs en connaître le sens.

8. Mais si l'on assigne *a priori* l'approximation exigée, on n'a pas ainsi le moyen de déterminer d'avance le degré $n-1$ du polynome à employer. Rien ne prouve, en outre, que l'erreur diminue quand n augmente. Ajoutons que la méthode de Gauss exige de longs calculs pour la détermination approchée des racines x_r d'équations algébriques de degré élevé, pour la substitution de ces nombres, qui sont compliqués, dans la fonction à intégrer, enfin pour la détermination des intégrales auxiliaires g_r. Elle présente donc, avec un certain intérêt théorique, de graves défectuosités dans l'application.

Elle n'est d'un emploi commode que quand la fonction à intégrer $F(x)$ est une fraction rationnelle. On peut alors, se donnant n et par suite le polynome ξ_n, déterminer *algébriquement*, sans aucun calcul d'approximation, le polynome $G(x)$, du degré $n-1$, qui prend les mêmes valeurs que $F(x)$ pour les n racines x_r de l'équation $\xi_n = 0$. L'intégration de ce polynome fournira *exactement* la valeur approchée de l'intégrale. Mais l'évaluation de l'erreur sera toujours très laborieuse.

Exemple. — Soit à calculer l'intégrale

$$\pi = 2\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+1},$$

au moyen de quatre valeurs intermédiaires de x. Ici, n étant égal à 4, le polynome ξ_n est, à un facteur constant près, la dérivée quatrième de $(x^2-1)^4$, savoir

$$\xi_4 = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{35}.$$

L'identité algébrique

$$35\xi_4 - 68 = 5(x^2+1)(7x^2-13)$$

montre que l'on aura, pour les quatre racines de ξ_4,

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{5}{68}(13 - 7x^2).$$

On prendra donc pour valeur approchée de π

$$\frac{5}{34}\int_{-1}^{+1}(13-7x^2)\,dx = \frac{5.32}{3.34} = \frac{80}{51} = 3,137.$$

Comme on connaît la valeur de π on voit que l'erreur est $0,004$; mais si l'on voulait en déterminer une limite supérieure en appliquant la formule (25), on serait conduit à des calculs fort longs.

[F8f]

SUR UNE APPLICATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. X. STOUFF,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

Dans un ellipsoïde à trois axes inégaux, représenté par l'équation

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

on suppose que

$$(2) \qquad 2b^2 = a^2 + c^2,$$

on demande de trouver les lignes de cette surface qui, en chacun de leurs points, sont tangentes aux diagonales du rectangle des axes de l'indicatrice de ce point.

En désignant par λ et μ les deux racines, différentes de zéro, de l'équation

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2+\rho} + \frac{y^2}{b^2+\rho} + \frac{z^2}{c^2+\rho} - 1 = 0,$$

les lignes asymptotiques de l'ellipsoïde ont pour équation différentielle

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = \frac{\pm\, d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}}.$$

θ étant l'angle (imaginaire) que fait l'une de ces lignes asymptotiques avec une ligne de courbure, ω l'angle que fait une diagonale du rectangle des axes de l'indicatrice avec la même ligne de courbure, on a

$$\tan\omega = \pm i \tan\theta,$$

et l'équation différentielle des lignes cherchées est, par suite,

$$(4) \qquad \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = \frac{\pm\, i\, d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}}.$$

Nous pouvons poser

$$\begin{aligned}
b^2+\lambda &= (b^2-a^2)\,\mathrm{sn}^2 u, & b^2+\mu &= (a^2-b^2)\,\mathrm{sn}^2 v,\\
a^2+\lambda &= (a^2-b^2)\,\mathrm{cn}^2 u, & a^2+\mu &= (a^2-b^2)\,\mathrm{dn}^2 v,\\
c^2+\lambda &= (c^2-b^2)\,\mathrm{dn}^2 u, & c^2+\mu &= (c^2-b^2)\,\mathrm{cn}^2 v.
\end{aligned}$$

En effet, les fonctions sn, cn, dn ainsi définies vérifient les relations fondamentales en prenant pour module $k = i$. L'équation (4) devient alors

$$du = \pm dv,$$

d'où

$$u \pm v = \alpha,$$

α étant une constante

$$u = \int \frac{d \operatorname{sn} u}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^4 u}}, \qquad v = \int \frac{d \operatorname{sn} v}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^4 v}}.$$

On sait, d'après le *Calcul intégral* de Bertrand (p. 569) que la relation précédente équivaut à

$$(5) \quad \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 v + m \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v = m - 2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} v \sqrt{1 - m^2}.$$

On déduit aisément de (5) les équations en coordonnées rectilignes des courbes cherchées, d'après les relations faciles à vérifier

$$\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v = \frac{y}{b}, \qquad \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 v = \frac{\lambda - \mu}{b^2 - a^2}.$$

D'après (3), en tenant compte de (2) et en posant

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

on a

$$\lambda - \mu = \sqrt{\left(r^2 - \frac{a^2 + c^2}{2}\right)^2 + y^2 \frac{(a^2 - c^2)^2}{b^2}},$$

(5) devient alors

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(r^2 - \frac{a^2 + c^2}{2}\right)^2 = \frac{(a^2 - c^2)^2}{4} & \\ \times \left[m \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{y}{b} \left(\sqrt{1 - m^2} + 1\right) - m\right] & \\ \times \left[m \frac{y^2}{b^2} + 2 \frac{y}{b} \left(\sqrt{1 - m^2} - 1\right) - m\right] & . \end{aligned} \right.$$

L'équation (6) représente une surface de révolution : son second membre est le produit de quatre facteurs linéaires réels, et peut se mettre sous une forme remarquable et avantageuse pour la discussion. En posant $m = \sin\varphi$, $\frac{y}{b} = \operatorname{tang}\theta$, le second membre de (6) devient

$$\frac{(a^2-c^2)^2}{4}\sin^2\varphi\left(\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{4}\right)\left[\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\times\left[\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right]\left[\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)\right],$$

et, à l'aide d'identités trigonométriques élémentaires,

$$\frac{(a^2-c^2)^2}{4}\,\frac{\sin\varphi\sin(\varphi-4\theta)}{\cos^4\theta},$$

(6) donne alors

$$(7)\qquad r^2 = \frac{a^2+c^2}{2} \pm \frac{a^2-c^2}{2}\,\frac{\sqrt{\sin\varphi\sin(\varphi-4\theta)}}{\cos^2\theta},$$

Il est naturel de chercher à exprimer x, y, z en fonction de θ. Par un calcul facile et ne présentant pas de circonstances remarquables, on trouve

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{\cos 2\theta + \sqrt{\sin\varphi\sin(\varphi-4\theta)}}{2\cos^2\theta},$$
$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{\cos 2\theta - \sqrt{\sin\varphi\sin(\varphi-4\theta)}}{2\cos^2\theta};$$

$\frac{x^2}{a^2}$ et $\frac{z^2}{c^2}$ sont donc racines d'une équation du second degré

$$(8)\qquad Z^2\cos^4\theta - Z\cos 2\theta\cos^2\theta + \frac{\cos^2(2\theta+\varphi)}{4} = 0.$$

On ne devra donner à θ que des valeurs qui rendent réelles les racines de cette équation et toutes deux comprises entre 0 et 1. On voit de suite que les conditions relatives aux résultats de substitution et à la demi-somme sont toujours remplies. Donc il suffit que

$$\sin\varphi\sin(\varphi-4\theta) \geqq 0.$$

$\frac{y}{b}$ devant être compris entre -1 et $+1$, on devra avoir aussi

$$-1 \leqq \tang\theta \leqq 1.$$

L'angle φ variant de 0 à 2π on aura deux cas à distinguer. Si φ est moindre que π, θ devra varier de $\frac{\varphi}{4} - \frac{\pi}{4}$ à $\frac{\varphi}{4}$. Si φ est supérieur à π, on fera varier θ de $\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{2}$ à $\frac{\varphi}{4} + \frac{3\pi}{4}$. Cela donnera dans les deux cas toute la courbe. Pour $\varphi = 0$, on obtient les sections cycliques de la surface. Les autres courbes sont fermées, analogues aux sections cycliques et admettent les plans cycliques comme plans diamétraux.

[$M^3$6b]

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES BIQUARTIQUES GAUCHES;

PAR M. E. DUPORCQ,
Élève-Ingénieur des Télégraphes.

---

1. On sait que toutes les quadriques, qui passent par 7 points quelconques de l'espace, passent par un huitième point fixe. Il en résulte que, à 7 points arbitraires d'une biquartique gauche correspond un huitième point de cette courbe. Je me propose de mettre en évidence quelques propriétés de ces groupes de huit points *réciproques*.

2. Je commencerai par rappeler quelques propriétés simples des biquartiques gauches.

Soient a et b deux points quelconques d'une biquartique gauche C : il existe une quadrique Q qui passe par la courbe C et qui admet la droite ab pour génératrice. A tout point a' de la biquartique correspond sur cette courbe un point b', tel que la droite $a'b'$ est, dans la quadrique Q, une génératrice de même système que la génératrice ab. Je dirai que les couples ab et $a'b'$ sont *conjugués*.

3. Soient α, β, γ et δ quatre points quelconques d'une biquartique C; par $\beta\gamma$ menons un plan quelconque qui rencontre la courbe C en deux autres points b et c, et soient a et d les quatrièmes points d'intersection de la quartique avec les plans $\alpha\beta b$ et $c\gamma\delta$. Soient a', b', c' et d' quatre autres points obtenus de la même manière au moyen des points α, β, γ et δ.

Les droites ab et $a'b'$, rencontrant toutes deux $\alpha\beta$, sont évidemment des génératrices de système différent de $\alpha\beta$ dans la quadrique déterminée par cette droite et par la courbe C; autrement dit, ab et $a'b'$ forment deux couples conjugués sur la quadrique; il en est de même des couples bc et $b'c'$, cd et $c'd'$.

D'autre part, les droites $b\beta$ et $c\gamma$ sont deux génératrices de systèmes différents d'une quadrique passant par C; dans cette quadrique, $a\alpha$ et $b\beta$, $c\gamma$ et $d\delta$ forment de même deux couples de génératrices de systèmes différents; il en résulte que $a\alpha$ et $d\delta$ jouissent de la même propriété; autrement dit, les droites ad et $\alpha\delta$ sont dans un même plan. Pour la même raison, $a'd'$ rencontre aussi $\alpha\delta$. On voit donc que les couples ad et $a'd'$ sont conjugués.

On peut donc énoncer le théorème suivant, qui s'étendrait évidemment à des polygones gauches d'un nombre pair de côtés :

Si, sur une biquartique gauche, deux quadrilatères gauches $abcd$ et $a'b'c'd'$ sont tels que les couples ab, *bc et cd soient respectivement conjugués des couples a′b′, b′c′ et c′d′, les couples da et d′a′ seront conjugués, eux aussi.*

4. Ces préliminaires établis, soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 huit points réciproques sur une biquartique gauche C. Considérons la cubique gauche déterminée par les six premiers de ces points ; toutes les quadriques qui passent par cette courbe et par le point 7 ont en commun une génératrice, qui n'est autre que la droite 78, puisque toutes les quadriques envisagées, qui passent par les sept premiers points considérés, passent aussi par le point 8. Parmi ces quadriques, considérons en particulier celle qui passe par la biquartique C ; elle admet la droite 78 pour génératrice. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Toutes les quadriques qui passent par six points fixes d'une biquartique gauche coupent cette courbe en deux autres points : les droites déterminées par ces couples de points sont des génératrices de la quadrique qui passe par la biquartique en même temps que par la cubique gauche définie par les six points fixes. Elles constituent le système des génératrices qui coupent en deux points la cubique gauche.

5. Parmi les couples de points 78, on peut considérer, par exemple, celui que fournissent les quatrièmes points d'intersection de la biquartique C avec les plans 123 et 456. Par suite :

Huit points réciproques d'une biquartique sont tels que deux quelconques d'entre eux sont conjugués des quatrièmes points où la courbe rencontre les deux plans déterminés par les six autres points, pris trois à trois d'une manière quelconque.

6. On voit que si cinq de ces points sont fixes, le plan des trois autres passe par un point fixe de la biquartique.

7. Étant donnés, sur une biquartique C, huit points réciproques 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8, supposons que par les quatre premiers on fasse passer une quadrique qui coupe la courbe en quatre autres points, $1'$, $2'$, $3'$, $4'$. Soient de même $5'$, $6'$, $7'$ et $8'$ quatre points de la courbe formant un octuple réciproque avec les points 5, 6, 7 et 8. Désignons par α, β, α' et β' les points où la courbe C rencontre les plans 123, 567, $1'2'3'$ et $5'6'7'$. D'après (5), les couples $\alpha\beta$, $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ sont respectivement conjugués des couples 48, $44'$ et $88'$; il en est donc, d'après (3), de même des couples $\alpha'\beta'$ et $4'8'$. Par suite (5), les huit points $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$ et $8'$ sont réciproques. D'où le théorème suivant :

Si, sur une biquartique gauche

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1' & 2' & 3' & 4' \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 5' & 6' & 7' & 8' \end{matrix}$$

sont trois octuples réciproques, il en est de même de l'octuple

$$1'\ 2'\ 3'\ 4'\ 5'\ 6'\ 7'\ 8'.$$

8. Parmi les nombreux cas particuliers de ce théorème, je me contenterai d'énoncer le suivant :

Soient $a_1 a_2 a_3 a_4$, $b_1 b_2 b_3 b_4$ *et* $c_1 c_2 c_3 c_4$ *les points où une biquartique gauche coupe trois plans* P_a, P_b, P_c. *Les plans* P_1, P_2, P_3 *et* P_4, *définis respectivement par les triples* $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$ *et* $a_4 b_4 c_4$, *coupent la courbe en quatre autres points* $d_1 d_2 d_3$ *et* d_4 *situés dans un même plan* P_d.

9. Je me bornerai à signaler l'analogie de ces propriétés des biquartiques gauches avec des propriétés correspondantes des cubiques planes.

[D1b]

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE x^k EN SÉRIE ORDONNÉE SUIVANT LES PUISSANCES DU SINUS DE LA VARIABLE;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,
Directeur de l'Académie polytechnique de Porto.

Dans un article *Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable,* publié dans le *Journal de Crelle-Fuchs* (t. CXVI, p. 14), nous avons donné, pour le développement des fonctions x^{2m} et x^{2m+1} suivant les puissances de $\sin x$, les formules suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x^{2m} = \sin^{2m} x & \\ \times\Big[1 &+ \frac{S^{(1)}_{2m+2}}{(2m+1)(2m+2)}\sin^2 x \\ &+ \frac{S^{(2)}_{2m+4}}{(2m+1)\ldots(2m+4)}\sin^4 x \\ &+ \frac{S^{(3)}_{2m+6}}{(2m+1)\ldots(2m+6)}\sin^6 x + \ldots\Big], \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} x^{2m+1} = \sin^{2m+1} x & \\ \times\Big[1 &+ \frac{S^{(1)}_{2m+3}}{(2m+2)(2m+3)}\sin^2 x \\ &+ \frac{S^{(2)}_{2m+5}}{(2m+2)\ldots(2m+5)}\sin^4 x \\ &+ \frac{S^{(3)}_{2m+7}}{(2m+2)\ldots(2m+7)}\sin^6 x + \ldots\Big], \end{aligned}\right.$$

qui ont lieu quand on a $|\sin x| < 1$. Dans ces formules,

$S_{2a}^{(b)}$ représente la somme des combinaisons des nombres

$$2^2, \quad 4^2, \quad 6^2, \quad \ldots, \quad (2a-2)^2,$$

pris b à b, et $S_{2a+1}^{(b)}$ la somme des combinaisons des nombres

$$1^2, \quad 3^2, \quad 5^2, \quad (2a-1)^2,$$

pris aussi b à b.

Nous avons employé pour obtenir ces formules une méthode fondée sur la théorie des intégrales prises entre des limites imaginaires. Ici nous allons voir comment on peut les vérifier au moyen d'une méthode élémentaire.

Je remarque, en premier lieu, qu'on démontre, d'une manière très simple, la possibilité du développement de x^{2m} et x^{2m+1} en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$ en partant de l'égalité connue

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5}\sin^5 x + \ldots,$$

où $|\sin x| < 1$.

On sait, en effet, par un théorème bien connu, relatif à la multiplication des séries, que le second membre de l'égalité

$$x^k = \left(\sin x + \frac{1}{2.3}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5}\sin^5 x + \ldots\right)^k$$

peut être développé en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$.

Cela posé, je suppose que la formule (1) ait lieu quand l'exposant de x est égal à $2(m-1)$ et je vais démontrer qu'elle a encore lieu quand l'exposant est égal à $2m$. Dans ce but, je pose

$$x^{2m} = A_{2m}\sin^{2m} x + A_{2m+2}\sin^{2m+2} x + \ldots,$$

relation où l'on n'écrit pas les termes de degré impair, parce que la valeur de x^{2m} ne varie pas quand on change x en $-x$, et je dérive deux fois les deux membres de cette égalité. Il vient

$$\begin{aligned}
&2m(2m-1)x^{2m-2}\\
&\quad=-[2m\mathrm{A}_{2m}\sin^{2m}x+(2m+2)\mathrm{A}_{2m+2}\sin^{2m+2}x\\
&\qquad\qquad+(2m+4)\mathrm{A}_{2m+4}\sin^{2m+4}x+\ldots]\\
&\quad+(1-\sin^2 x)[2m(2m-1)\mathrm{A}_{2m}\sin^{2m-2}x\\
&\qquad\qquad+(2m+2)(2m+1)\mathrm{A}_{2m+2}\sin^{2m}x+\ldots].
\end{aligned}$$

Si l'on pose dans cette identité

$$x^{2m-2}=\mathrm{A}'_{2m-2}\sin^{2m-2}x+\mathrm{A}'_{2m}\sin^{2m}x+\ldots,$$

on trouve les égalités

$$\begin{aligned}
&2m(2m-1)\mathrm{A}_{2m}=2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m-2},\\
&-2m\mathrm{A}_{2m}+(2m+2)(2m+1)\mathrm{A}_{2m+2}-2m(2m-1)\mathrm{A}_{2m}\\
&\quad=2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m},\\
&-(2m+2)\mathrm{A}_{2m+2}+(2m+4)(2m+3)\mathrm{A}_{2m+4}\\
&\qquad-(2m+2)(2m+1)\mathrm{A}_{2m+2}\\
&\qquad\qquad=2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

qui donnent

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_{2m}=\mathrm{A}'_{2m+2},\\
&-(2m)^2\mathrm{A}_{2m}+(2m+2)(2m+1)\mathrm{A}_{2m+2}\\
&\quad=2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m},\\
&-(2m+2)^2\mathrm{A}_{2m+2}+(2m+4)(2m+3)\mathrm{A}_{2m+4}\\
&\quad=2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m+2},\\
&-(2m+4)^2\mathrm{A}_{2m+4}+(2m+6)(2m+5)\mathrm{A}_{2m+6}\\
&\quad=2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m+4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&-(2m+2\nu)^2\mathrm{A}_{2m+2\nu}\\
&\quad+(2m+2\nu+2)(2m+2\nu+1)\mathrm{A}_{2m+2\nu+2}\\
&\qquad\qquad=2m(2m-1)\mathrm{A}'_{2m+2\nu},
\end{aligned}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mais, comme nous supposons que la formule (1) a lieu quand l'exposant de x est égal à $2(m-1)$, nous avons

$$A'_{2m-2} = 1,$$

$$A'_{2m+2\nu} = \frac{S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu}}{(2m-1)\,2m(2m+1)\ldots(2m+2\nu)},$$

et nous pouvons donc calculer A_{2m}, A_{2m+2}, A_{2m+4}, ... au moyen des formules antérieures.

Les valeurs qu'on obtient de cette manière pour les coefficients A_m, A_{2m+2}, A_{2m+4}, ... coïncident avec les valeurs des coefficients de la formule (1). Pour nous rendre compte de cette circonstance dans toute sa généralité, supposons qu'elle ait lieu pour le coefficient $A_{2m+2\nu}$, c'est-à-dire que l'on ait

$$A_{2m+2\nu} = \frac{S^{(\nu)}_{2m+2\nu}}{(2m+1)(2m+2)\ldots(2m+2\nu)}.$$

La formule (3) donne alors

$$A_{2m+2\nu+2} = \frac{1}{(2m+1)\ldots(2m+2\nu+2)}\left[S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu} + (2m+2\nu)^2\, S^{(\nu)}_{2m+2\nu}\right].$$

Mais si l'on a égard à la signification des symboles $S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu}$ et $S^{(\nu)}_{2m+2\nu+2}$, on voit que

$$S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu} + (2m+2\nu)^2\, S^{(\nu)}_{2m+2\nu} = S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu+2}.$$

Donc on a

$$A_{2m+2\nu+2} = \frac{S^{(\nu+1)}_{2m+2\nu+2}}{(2m+1)\ldots(2m+2\nu+2)},$$

et l'on voit que la valeur de $A_{2m+2\nu+2}$ coïncide encore avec la valeur du coefficient de $\sin^{2m+2\nu+2} x$ dans la formule (1).

Au moyen de l'analyse qui précède, on voit que la formule (1) a lieu pour l'exposant $2m$ si elle a lieu pour l'exposant $2(m-1)$, et, par conséquent, si elle a lieu pour la fonction x^2. Mais cette formule, en y posant $m=1$ et en remarquant que

$$S_4^{(1)}=2^2,\qquad S_6^{(2)}=2^2.4^2,\qquad S_8^{(3)}=2^2.4^2.6^2,\qquad \ldots,$$

donne la formule *connue*

$$x^2=\sin^2 x+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin^4 x+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{3}\sin^6 x+\ldots.$$

La formule (1) est donc démontrée. De la même manière, on vérifie la formule (2).

On tire de l'égalité (1), en la dérivant par rapport à x,

$$\begin{aligned}\frac{x^{2m-1}}{\cos x}=\sin^{2m-1}x\Bigg[1&+\frac{S_{2m+2}^{(1)}}{2m+1}\sin^2 x\\ &+\frac{S_{2m+4}^{(2)}}{(2m+1)\ldots(2m+3)}\sin^4 x+\ldots\Bigg].\end{aligned}$$

De l'égalité (2), on tire aussi

$$\begin{aligned}\frac{x^{2m}}{\cos x}=\sin^{2m}x\Bigg[1&+\frac{S_{2m+3}^{(1)}}{2m+2}\sin^2 x\\ &+\frac{S_{2m+5}^{(2)}}{(2m+2)\ldots(2m+4)}\sin^4 x+\ldots\Bigg].\end{aligned}$$

[L¹10b, L¹10c]

SUR LES CORDES NORMALES DE LA PARABOLE;

PAR M. M. D'OCAGNE.

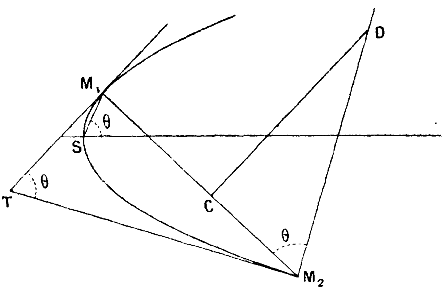
---

1. Soit M_1M_2 une corde d'une parabole que nous supposons normale en M_1 à cette courbe. Proposons-nous d'abord de voir comment les coordonnées x_2 et y_2 du point M_2 sont liées aux coordonnées x_1 et y_1 du point M_1.

La parabole étant supposée rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, on a

$$y_1^2 = 2px_1, \tag{1}$$

$$y_2^2 = 2px_2. \tag{2}$$



Le point (x_2, y_2) étant sur la normale en (x_1, y_1), on a, en outre,

$$p(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1) = 0. \tag{3}$$

Éliminant x_1 et x_2 entre ces trois équations, on a

$$(y_2^2 - y_1^2)\frac{y_1}{2p} + p(y_2 - y_1) = 0,$$

ou, en supprimant la solution $y_2 - y_1 = 0$ qui donne le point M_1,

$$(y_2 + y_1)\frac{y_1}{2p} + p = 0,$$

d'où

$$y_2 = -\frac{y_1^2 + 2p^2}{y_1}, \tag{4}$$

ou, eu égard à (1),

$$y_2 = -\frac{2p(x_1 + p)}{y_1}. \tag{4'}$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\frac{y_2}{2p} = -\frac{x_1+p}{y_1},$$

ou, en vertu de (2),

$$\frac{x_2}{y_2} = -\frac{x_1+p}{y_1};$$

d'où, en remplaçant y_2 par sa valeur tirée de (4'),

$$(5) \qquad x_2 = \frac{2p(x_1+p)^2}{y_1^2},$$

ou, eu égard à (1),

$$(5') \qquad x_2 = \frac{(x_1+p)^2}{x_1}.$$

2. Calculons maintenant l'angle θ que font les tangentes en M_1 et en M_2 à la parabole. Ces tangentes faisant avec l'axe de la courbe des angles dont les tangentes sont respectivement $\frac{p}{y_1}$ et $\frac{p}{y_2}$, on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\frac{p}{y_1} - \frac{p}{y_2}}{1 + \frac{p^2}{y_1 y_2}} = \frac{p(y_2 - y_1)}{y_1 y_2 + p^2}.$$

Or, la formule (4') donne

$$y_2 - y_1 = -\frac{2p(x_1+p)}{y_1} - y_1 = -\frac{2px_1 + 2p^2 + y_1^2}{y_1},$$

ou, eu égard à (1),

$$y_2 - y_1 = -\frac{2p(2x_1+p)}{y_1}$$

et

$$y_1 y_2 + p^2 = -2p(x_1+p) + p^2 = -p(2x_1+p).$$

Donc

$$\tag{6} \operatorname{tang}\theta = \frac{2p}{y_1}.$$

Remarquons qu'en vertu de (1) cette formule peut s'écrire

$$\tag{6'} \operatorname{tang}\theta = \frac{y_1}{x_1},$$

ce qui montre que *l'angle des tangentes en* M_1 *et* M_2 *à la parabole est égal à l'inclinaison sur l'axe de la droite qui joint le point* M_1 *au sommet.*

3. Cherchons la longueur l de la corde M_1M_2. Nous avons

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

ou, en vertu des formules (4) et (5'),

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{\left[x_1 - \frac{(x_1+p)^2}{x_1}\right]^2 + \left[y_1 + \frac{y_1^2 + 2p^2}{y_1}\right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{p^2(2x_1+p)^2}{x_1^2} + \frac{4(y_1^2+p^2)^2}{y_1^2}}, \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (1),

$$l = (2x_1+p)\sqrt{\frac{p^2}{x_1^2} + \frac{2p}{x_1}} = \frac{2x_1+p}{x_1}\sqrt{p^2+y_1^2},$$

ou encore

$$\tag{7} l = \frac{(p^2+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{px_1}.$$

Si l'on rapproche cette formule de l'expression connue du rayon de courbure R en M_1,

$$R = \frac{(p^2+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2},$$

on arrive à cette curieuse relation

$$\frac{R}{l} = \frac{x_1}{p}. \tag{8}$$

Le rapport du rayon de courbure en M_1 *à la corde normale correspondant à ce point est égal au rapport de l'abscisse du point* M_1 *au paramètre.*

4. A titre d'applications des formules précédentes, nous allons traiter divers problèmes de minimum relatifs aux cordes normales de la parabole. D'abord celui-ci :

Trouver la corde normale de longueur minimum?

Si la normale en M_2 à la parabole coupe en D la perpendiculaire élevée à $M_1 M_2$ par le centre de courbure C, c'est-à-dire la normale à la développée, on a, d'après une formule connue, en appelant ε l'angle de contingence en M_1,

$$dl = \mathrm{CD}.\varepsilon.$$

Pour la corde minimum, on doit donc avoir

$$\mathrm{CD} = 0.$$

Or, la normale en M_2 ne pouvant coïncider avec la normale $M_1 M_2$ en M_1, CD ne peut être nul que si le point C coïncide avec le point M_2 [1], c'est-à-dire si $R = l$. La formule (8) donne, dès lors,

$$x_1 = p.$$

Le point M_1 *correspondant a pour abscisse le para-*

---

[1] Cette propriété est, on le voit, absolument générale. Elle peut s'énoncer ainsi : *Si la normale en* M_1 *à une courbe quelconque rencontre, en outre, cette courbe au point* M_2, *le segment* $M_1 M_2$ *est minimum si le point* M_2 *est un des points de rencontre de la courbe et de sa développée.*

mètre. Autrement dit : *Le point* M_1 *se trouve sur la perpendiculaire à l'axe menée par le centre de courbure répondant au sommet.*

5. Résolvons maintenant cet autre problème :

Trouver la corde normale qui détache sur la parabole l'arc de longueur minimum ?

En appelant $d\sigma$ la différentielle de cet arc, ds_1 et ds_2 les différentielles des arcs comptés d'une origine quelconque aux points M_1 et M_2, on a

$$\begin{aligned} d\sigma &= ds_1 - ds_2 \\ &= (M_1 C - M_2 D)\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour l'arc minimum, on doit avoir

$$M_1 C = M_2 D,$$

ou, puisque l'angle CM_2D est égal à l'angle M_1TM_2, ou θ, comme ayant ses côtés perpendiculaires,

$$R = \frac{l - R}{\cos\theta},$$

c'est-à-dire

$$\frac{l - R}{R} = \cos\theta.$$

Tirant la valeur de $\frac{l - R}{R}$ de la formule (8), celle de $\cos\theta$ de la formule (6), on a

$$\frac{p - x_1}{x_1} = \frac{y_1}{\sqrt{4p^2 + y_1^2}},$$

ou, en tenant compte de (1),

$$\frac{(p - x_1)^2}{x_1^2} = \frac{x_1}{2p + x_1}.$$

Toutes réductions faites, cette équation devient

$$3x_1 - 2p = 0,$$

d'où

$$x_1 = \frac{2}{3}p.$$

Le point M_1 *correspondant a pour abscisse les* $\frac{2}{3}$ *du paramètre.*

La formule (1) donne

$$y_1 = \frac{2p}{\sqrt{3}},$$

puis la formule (6)

$$\tang\theta = \sqrt{3}.$$

Dans ce cas, l'angle θ est égal à 60°. On peut donc dire, puisque l'angle $M_1 M_2 T$, sous lequel la corde $M_1 M_2$ coupe la parabole en M_2, est le complément de θ, que *la corde normale détachant sur la parabole l'arc de longueur minimum rencontre la courbe sous un angle de* 30°.

En vertu de la remarque qui termine le n° 2, on voit aussi que, dans ce cas, *la droite joignant le point* M_1 *au sommet est inclinée à* 60° *sur l'axe.*

6. Occupons-nous enfin de ce problème :

Trouver la corde normale qui détermine, avec la parabole, le segment d'aire minimum.

Si Σ est cette aire, on a, en appelant $M'_1 M'_2$ la corde normale infiniment voisine, qui passe (aux infiniment petits d'ordre supérieur près) par le centre de courbure C,

$$\begin{aligned} d\Sigma &= \text{aire}\, M_1 M_2 C - \text{aire}\, M'_1 M'_2 C \\ &= \frac{1}{2}\left(\overline{CM}_1^2 - \overline{CM}_2^2\right)\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour le segment d'aire minimum,

$$CM_1 = CM_2,$$

ou

$$l = 2R.$$

Dès lors, la formule (8) donne

$$x_1 = \frac{p}{2},$$

ce qui montre que *le point* M_1 *est sur la perpendiculaire menée à l'axe par le foyer.*

Nous retrouvons ainsi un théorème que nous avons, dans une précédente Note ([1]), obtenu par une tout autre voie.

CORRESPONDANCE.

M. M., (*Paris*). — « Dans un article, qui vient de paraître page 215, M. d'Ocagne trouve, pour un point M d'une conique, un cercle osculateur qui coupe cette courbe au même point V que la normale en M; il démontre alors, après Ossian Bonnet, que MV fait avec les axes de la conique des angles de 45°.

On arrive à ce résultat en quelques mots et sans calculs de la manière suivante :

La corde MV et la tangente en M à la conique sont également inclinées sur les axes de cette courbe, et, comme ces droites sont rectangulaires, elles font avec ces axes des angles de 45°.

On peut ajouter que, réciproquement : *lorsque la normale d'une conique fait des angles de 45° avec les*

([1]) *N. A.*, 3e série, t. XV, p. 215.

axes de cette courbe, le centre de courbure correspondant à son pied est le milieu de la corde interceptée par la conique sur cette normale. »

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Il Nuovo Cimento, Giornale di Fisica; rédigé par MM. *R. Felici*, *A. Battelli* et *V. Volterra*, 4e série, t. III. Pise, 1896.

Giornale di Matematiche di Battaglini, rédigé par le professeur *A. Capelli*, vol. XXXIV. Naples, 1896.

Atti della reale Accademia dei Lincei, année CCXCIII. Rome, 1896.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par MM. *G. Darboux et J. Tannery*; 2e série, t. XX. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

Bulletin astronomique, publié par M. *F. Tisserand*; t. XIII. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par MM. *E. Humbert* et *G. Papelier*, 6e année. Paris, Nony, 1896.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par M. *H. Vuibert*; 20e année. Paris, Nony, 1896.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. *de Longchamps*; 4e série, 20e année. Paris, Charles Delagrave, 1896.

Journal de Mathématiques spéciales, publié sous la direction de M. *de Longchamps*; 4e série, 20e année. Paris, Charles Delagrave, 1896.

Bulletin de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. *B. Niewenglowski*. Paris, Société d'Éditions scientifiques, 1896.

Bulletin de Mathématiques spéciales, publié sous la direction de M. *B. Niewenglowski*; 2e année. Paris, Société d'Éditions scientifiques, 1896.

Bulletin de la Société philomathique de Paris, 8e série, t. VII. Paris, 7, rue des Grands-Augustins, 1896.

Revue de Mathématiques, publiée par M. *G. Peano*; t. VI. Turin, Bocca frères, 1896.

The Educational Times, vol. XLIX. Londres, 1896.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXII. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO, janvier-avril 1896.

LES TABLETTES DU CHERCHEUR, journal des jeux d'esprit et de combinaison, 7e année. Paris, 18 *bis*, rue des Martyrs, 1896.

A.-C. Crehore et *G.-O. Squier*. — Note on a photographic methode of determining the complete motion of a gun during recoil. Fort Monroë, Virginie, 1895.

G. Lemoine. — L'action chimique de la lumière comparée à celle de la chaleur. Paris, 1895.

E. Lebon. — Sur la division d'un cercle en deux parties équivalentes et sur le volume du segment de sphère. Paris, Ch. Delagrave, 1895.

Compte rendu du bureau local du Comité Lobatchesfky; Kasan, 1895.

C. Störmer. — Solution complète en nombres entiers m, n, x, y, k de l'équation $m \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}$. Christiania, 1895.

P. Mansion. — Notice sur les travaux mathématiques de Eugène-Charles Catalan. Bruxelles, F. Hayez, 1896.

C. Burali Forti. — Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles et leurs applications à la limite d'un ensemble variable (Extrait des *Math. Annalen*); 1895.

F. Gomes Teixeira. — Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable (Extrait du *Journal de Crelle*); 1896.

F. Klein. — Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire. Rédaction française par *J. Griess*. Paris, Nony, 1896.

M. Frolov. — Démonstration de l'axiome XI d'Euclide. Paris, 1895.

J. de Rey-Pailhade. — Projet d'éphémérides astronomiques et géographiques dans le système décimal. Toulouse, 1896.

A.-E. Salazar i *K. Newman*. — Kosto comparatibo en Chile del gaz i de la Elektricidad komo sistemas de distribuzion de energia. Santiago de Chile, 1896.

M. Pieri. — Un sistema di postulati per la Geometria projettiva estratta degli iperspazi (Extrait de la *Riv. di Matem.*). Turin, 1896.

R. Bettazzi. — Sulla catena di un ente in un gruppo. Turin, 1896.

R. Bettazzi. — Gruppi finiti ed infiniti di enti. Turin, 1896.

M. Pieri. — Sui principi che reggono la Geometria di posizione. Turin, 1895-1896.

F. Gomes Teixeira. — Curso de Analyse Infinitesimal; Calculo differencial, 3e édition. Porto, 1896.

M. d'Ocagne. — Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

B. Niewenglowski. — Cours de Géométrie analytique, t. III. Géométrie dans l'espace, avec une Note par *Em. Borel.* Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

F. Ritter. — François Viète, inventeur de l'Algèbre moderne. Notice sur sa vie et son œuvre. Paris, 1895.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 662.

(1863, p. 336.)

2S *étant l'aire d'un quadrilatère sphérique inscrit; a, b, c, d les côtés; 2p le périmètre; on a*

$$\sin\frac{S}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}\sin\frac{p-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}},$$

$$\cos\frac{S}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a-b}{2}\cos\frac{p-a-c}{2}\cos\frac{p-a-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}}.$$

(GRUNERT).

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Il existe, comme on sait, des relations remarquables entre les côtés a, b, c, d et les diagonales m, n d'un quadrilatère plan inscriptible. On a ainsi

$$mn = ac + bd$$

et

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

La première a été découverte par Ptolémée; la seconde a été signalée en 1831 par Ernest-Guillaume Grebe dans son Ouvrage: *De quadrilatero circulari observationes quædam.*

On a étendu ces formules aux quadrilatères sphériques inscriptibles, et pour y parvenir, on a profité des propriétés des projections stéréographiques. C'est ainsi que M. Collète a obtenu les formules

$$\sin\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2} = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2},$$

$$\frac{\sin\frac{m}{2}}{\sin\frac{n}{2}} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} + \sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}},$$

qu'il a énoncées et démontrées dans les *Nouvelles Annales*, 1849, p. 440.

La première de ces formules trigonométriques nous servira dans ce qui va suivre.

Considérons sur la sphère un quadrilatère inscrit ABCD dont les côtés AB, BC, CD, DA sont respectivement représentés par a, b, c, d et les diagonales AC, BD par m, n. Faisons la projection stéréographique de ce quadrilatère en prenant pour point de vue l'extrémité I du diamètre AaI du sommet A. Nous aurons ainsi un quadrilatère mixtiligne $abcd$ dont les côtés ab, ad sont des droites et les côtés bc, cd des arcs de cercle convexes. Les points A, B, C, D étant sur une circonférence, il en sera de même des quatre points a, b, c, d. Il est essentiel aussi de rappeler que les angles sont conservés. Considérons à part ce quadrilatère inscriptible $abcd$. Prolongeons les arcs de cercle cb, cd jusqu'à leur rencontre en g qui se fait d'ailleurs sur la diagonale ac et joignons bd, bg, dg, cb et cd. Menons aux arcs bc, cd des tangentes à leurs extrémités. On déterminera ainsi deux points e, f. Posons

$$A + B + C + D - 4^d = 2S.$$

Nous aurons, dans l'hexagone $abecfd$,

$$A + B + e + C + f + D = 2^d(6 - 2) = 8^d;$$

par suite

$$2S = 4^d - (e + f).$$

Remarquons maintenant que dans les triangles isoscèles ebc et dfc, on a

$$2^d - e = 2\widehat{ebc} = 2\widehat{bgc} \quad \text{et} \quad 2^d - f = 2\widehat{dcf} = 2\widehat{dgc}.$$

Par conséquent, $4^d-(e+f)=2\widehat{bgd}$; il en résulte $S=\widehat{bgd}$.

La question est ainsi ramenée à calculer $\sin\frac{\widehat{bgd}}{2}$ et $\cos\frac{\widehat{bgd}}{2}$. Or, dans le triangle rectiligne bgd, on a

$$\overline{bd}^2=\overline{bg}^2+\overline{dg}^2-2\,bg.dg\cos\widehat{bgd}.$$

Remplaçant $\cos\widehat{bgd}=\cos S$ par $1-2\sin^2\frac{S}{2}$, on en tire

$$\sin^2\frac{S}{2}=\frac{\overline{bd}^2-(bg-dg)^2}{4\,bg.dg}=\frac{(bd+dg-bg)(bd+bg-dg)}{4\,bg.dg}.$$

Pour calculer bd, bg et dg, et avoir leurs expressions en fonction de a, b, c, d, m et n, rappelons que, par suite de la relation géométrique des deux figures, on a

$$bd=\frac{\sin\frac{n}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{d}{2}},\qquad bg=\frac{\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{a}{2}\sin\frac{m}{2}},\qquad dg=\frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{d}{2}\sin\frac{m}{2}}.$$

On multipliera haut et bas les valeurs de ces trois lignes, respectivement par $\sin\frac{m}{2}$, $\cos\frac{d}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$ pour établir l'égalité des dénominateurs, et l'on substituera dans l'expression de $\sin^2\frac{S}{2}$ qui deviendra ainsi

$$\sin^2\frac{S}{2}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(\sin\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2}+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2}\right)\\ \times\left(\sin\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2}+\cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2}-\cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}\right)\end{array}\right\}}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}.$$

Mais le quadrilatère étant inscriptible, on peut éliminer $\sin\frac{m}{2}\sin\frac{n}{2}$ en profitant de la relation énoncée au commencement de cet article. Le premier facteur deviendra ainsi

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2}+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2}\\
&=\cos\frac{a-c}{2}-\cos\frac{b+d}{2}\\
&=2\sin\frac{a-c+b+d}{4}\sin\frac{b+d-a+c}{4}\\
&=2\sin\frac{p-c}{2}\sin\frac{p-a}{2},
\end{aligned}$$

en posant $a+b+c+d=2p$.

On aura de même, pour l'autre facteur, $2\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-d}{2}$. On en conclut

$$\sin^2\frac{S}{2}=\frac{\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}\sin\frac{p-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}.$$

C. Q. F. D.

Pour établir la seconde formule énoncée, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{S}{2}=1-\sin^2\frac{S}{2}&=\frac{(bg+dg)^2-\overline{bd}^2}{4bg.dg}\\
&=\frac{(bg+dg+bd)(bg+dg-bd)}{4bg.dg}.
\end{aligned}$$

Mais d'après les développements ci-dessus, on trouve, à un facteur près,

$$\begin{aligned}
bg+dg+bd&=\cos\frac{a-c}{2}+\cos\frac{b-d}{2}\\
&=2\cos\frac{a+b-c-d}{2}\cos\frac{a+d-c-b}{2}\\
&=2\cos\frac{p-c-d}{2}\cos\frac{p-c-b}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
bg+dg-bd&=\cos\frac{a-c}{2}+\cos\frac{b+d}{2}\\
&=2\cos\frac{a+b+c+d}{2}\cos\frac{a+c-b-d}{2}\\
&=2\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-b-d}{2}.
\end{aligned}$$

On a donc en définitive

$$\cos^2\frac{S}{2} = \frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-b-d}{2}\cos\frac{p-c-d}{2}\cos\frac{p-c-b}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}},$$

formule qui ne diffère pas de la proposée, car, en vertu de la relation $2p = a+b+c+d$, on peut, sous le signe cosinus, remplacer les angles $p-c-d$, $p-c-b$, $p-b-d$ respectivement par $-(p-a-b)$, $-(p-a-d)$, $-(p-a-c)$.

C. Q. F. D.

Question 1032.

(1871, p. 335.)

Trouver trois nombres en progression géométrique tels que chacun d'eux, augmenté d'une unité, donne un carré.

(A. Martin.)

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Les équations du problème sont

$$x = a^2 - 1, \tag{1}$$

$$xy = b^2 - 1, \tag{2}$$

$$xy^2 = c^2 - 1. \tag{3}$$

On en déduit

$$\frac{c^2-1}{a^2-1} = y^2,$$

c'est-à-dire que $\frac{c^2-1}{a^2-1}$ doit être un carré.

Les valeurs de c, a et y, qui vérifient cette équation, sont faciles à trouver. Il suffit d'écrire la suite des nombres (c^2-1), 3, 8, 15, 24, 35, ..., et, au-dessous de chacun d'eux, les quotients de leur division par les précédents. Les carrés qui se trouvent parmi ces quotients ont pour valeurs 16, 36, ..., d'où l'on déduit $y = 4$, 6, ... Les diviseurs correspondants ayant pour valeurs a^2-1, expriment les valeurs de x. Nous avons donc un système de solutions des équations (1) et (2) : $x = 3$,

$y = 4$; $x = 8$, $y = 6$. Or, de l'équation (2) on tire

$$xy = (b+1)(b-1) = l(l+2).$$

Ainsi la différence entre x et y doit être égale au moins à 2. On en conclut que le premier groupe de valeurs ne saurait convenir. Le second vérifie l'équation (3) comme on peut s'en assurer, et l'on a

$$\begin{aligned} x &= 8 = 3^2 - 1, \\ xy &= 48 = 7^2 - 1, \\ xy^2 &= 288 = 17^2 - 1. \end{aligned}$$

Notons en passant que le produit de ces trois nombres est un cube : $x^3y^3 = 48^3$.

On peut remarquer que xy et xy^2 sont de même parité que x. Si donc, par exemple, x est pair, on en déduira

$$x = 2p = a^2 - 1,$$

d'où

$$a = 2n + 1,$$

et par suite

$$x = 4n(n+1) = 8m.$$

Les valeurs paires de x sont donc toutes renfermées parmi les multiples de 8. La question revient donc à résoudre les trois équations

$$\begin{aligned} 8m &= a^2 - 1, \\ 8my &= b^2 - 1, \\ 8my^2 &= c^2 - 1, \end{aligned}$$

ou à chercher les multiples de 8 qui répondent au type général $8m = a^2 - 1$, car cela a lieu pour les deux premières équations, et la troisième peut s'écrire $8uy = c^2 - 1$.

Ces multiples ont pour valeurs

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{array}{cccccccc} 8, & 16, & 24, & 32, & 40, & 48, & 56, & 64, \\ 3^2-1, & & 5^2-1, & & & 7^2-1, & & \\ 72, & 80, & 88, & 96, & 104, & 112, & 120, & 128, \\ & 9^2-1, & & & & & 11^2-1, & \\ 136, & 144, & 152, & 160, & 168, & 176, & \ldots, & \ldots, \\ & & & & 13^2-1. & & & \end{array} \right.$$

Comme on l'a vu plus haut, on a pour tous les nombres impairs, $(2n+1)^2 - 1 = M8$, et pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, on a, pour les valeurs de m, les nombres

(B) 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...

Ainsi les seuls multiples de 8 à considérer et qui soient les valeurs de x sont les suivants :

(C) 0, 8, 24, 48, 80, 120, 168, ...

Il en résulte que y et y^2 doivent se trouver parmi les nombres (B). Mais les valeurs de $8my$ se trouvent nécessairement dans la série (A). Il faut donc chercher ceux de ces nombres dont les carrés se trouvent dans la même série. Cela a lieu, par exemple, pour le nombre 6 dont le carré est 36. Ainsi $x = 8$, $y = 6$ satisfont à ces équations.

Lorsque x est impair, xy et xy^2 sont impairs; a, b, c sont donc pairs. Soit donc $a = 2n$; on aura $x = 4n^2 - 1$. x se trouve donc dans la série des nombres

(D) 3, 15, 35, 63, 99, 143, 195, 255, 323, ...,

parmi lesquels doivent figurer également xy et xy^2, mais ces nombres sont tous le produit de deux nombres impairs consécutifs qui ne peuvent avoir de diviseur commun. Par conséquent, il n'existe pas de solution dans l'hypothèse de x impair.

Question 1641.

(1892, pp. 31* et 46*.)

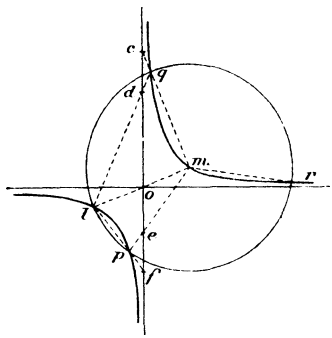
Si un cercle a pour centre un point d'une hyperbole équilatère et passe par le symétrique de ce point par rapport au centre de l'hyperbole, il coupe cette courbe en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral. LEMAIRE.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE ET TRANSFORMATION

Par M. MANNHEIM.

Le numéro de mars 1896 renferme une bonne vérification analytique de ce joli théorème, mais elle ne permet pas de voir pourquoi il est particulier à l'hyperbole équilatère. Nous ajoutons alors une solution géométrique ayant l'avantage de montrer que ce théorème existe pour cette courbe parce qu'elle jouit de cette propriété : ses diamètres conjugués sont également inclinés sur ses asymptotes. Cette solution n'emploie, en effet, que cette seule propriété.

Soient m le point de l'hyperbole pris pour centre de la circonférence, l le point diamétralement à m par lequel passe



cette courbe, p, q, r les points de rencontre de cette circonférence avec l'hyperbole. Les droites ql, qm étant deux cordes supplémentaires, sont également inclinées sur les asymptotes; les angles en c et d sont alors égaux.

De même, les angles en e et f sont égaux. L'angle def est le supplément de la somme des angles en f et d, et l'angle cme est le supplément de la somme des angles en c et e. Comme, d'après ce qui précède, la somme des angles en f et d est égale à la somme des angles en c et e, il en résulte que l'angle qlp est égal à l'angle qmp. Si l'on prend sur la circonférence les arcs qui mesurent ces angles égaux, on voit que l'angle qmp est le tiers de quatre droits. De même pour l'angle pmr; donc, etc.

La proposition en question, transformée par polaires réciproques, par rapport à la circonférence qui conduit à son énoncé, conduit au théorème suivant :

On donne une parabole dont le foyer est f. D'un point c de la directrice de cette courbe, pris comme centre, on décrit un cercle qui a pour rayon la distance de c au point e *milieu de cf. En plus de la tangente en e à la circonférence, il y a trois tangentes communes à ce cercle et à la parabole : ces droites forment un triangle équilatéral.*

La démonstration géométrique de cette propriété peut paraître plus difficile à établir que celle du théorème proposé. Elle est pourtant tout aussi simple, puisqu'elle n'est autre que la transformée de la démonstration précédente. Pour obtenir cette transformation de démonstration, on doit avoir soin de transformer préalablement le théorème sur lequel elle est basée. Voici la propriété qui résulte de cette transformation :

La droite, qui joint un point c de la directrice d'une parabole à un point arbitraire m de cette courbe, et la droite qui joint le point c au point de rencontre de la polaire de ce point et de la tangente en m, sont également inclinées sur les tangentes à la parabole qui sont issues de c.

La démonstration directe de cette propriété est des plus simples.

Question 1674.

(1894, p. 4*.)

On considère tous les cercles tangents en un même point à une conique donnée. Lieu du pôle de la seconde corde d'intersection du cercle et de la conique par rapport à la conique. (André Cazamian.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. Mannheim.

Quel que soit le cercle, on sait que cette seconde corde a toujours même direction. Donc son pôle est sur le diamètre conjugué à cette direction.

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

Prenons pour axe des x la tangente, et pour axe des y la normale au point donné de la conique donnée. L'équation de la conique peut donc s'écrire

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0.$$

L'équation d'un cercle tangent à la conique à l'origine est

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2ky = 0.$$

Multiplions l'équation (2) par A, et retranchons-la de (1), on trouve

$$y[2Bx + (C - A)y + 2(E + Ak)] = 0.$$

Cette dernière équation représente donc deux droites passant par le point d'intersection de la conique (1) et du cercle (2). L'une des droites est l'axe des x.

La seconde corde d'intersection a donc pour équation

$$(3) \qquad 2Bx + (C - A)y + 2(E + Ak) = 0.$$

La polaire d'un point (α, β) par rapport à la conique (1) a pour équation

$$(4) \qquad (A\alpha + B\beta)x + (B\alpha + C\beta + E)y + E\beta = 0.$$

Identifiant (3) et (4), on obtient

$$\frac{A\alpha + B\beta}{2B} = \frac{B\alpha + C\beta + E}{C - A} = \frac{E\beta}{2(E + Ak)}.$$

On aura le lieu du point (α, β) en éliminant k entre ces deux dernières équations.

Or, les deux premiers rapports étant indépendants de k, l'élimination se trouve toute faite. Le lieu est donc la droite ayant pour équation

$$(5) \qquad \alpha[A(A - C) + 2B^2] + B(A + C)\beta + 2EB = 0.$$

Si $A + C = 0$, c'est-à-dire si la conique donnée est une hyperbole équilatère, l'équation (5) devient

$$\alpha = -\frac{EB}{A^2 + B^2}.$$

C'est une droite parallèle à l'axe des y.

Question 1701.

(1895, p. 38*.)

Le lieu géométrique des points milieux des cordes d'un limaçon de Pascal, qui sont vues du point double réel sous un angle droit, est une circonférence. (A. Droz.)

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

Considérons l'équation polaire du limaçon de Pascal

$$r = a + b\cos\theta.$$

Soit OA un rayon vecteur passant par le point double O. Alors

$$\mathrm{OA} = a + b\cos\theta.$$

Le rayon vecteur perpendiculaire OB a pour expression

$$\mathrm{OB} = a - b\sin\theta.$$

De sorte que les coordonnées $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ des points A et B sont

$$\begin{cases} x_1 = (a + b\cos\theta)\cos\theta, & x_2 = -(a - b\sin\theta)\sin\theta, \\ y_1 = (a + b\cos\theta)\sin\theta, & y_2 = (a - b\sin\theta)\cos\theta. \end{cases}$$

Les coordonnées du milieu de AB sont, par suite,

$$2\mathrm{X} = x_1 + x_2 = a(\cos\theta - \sin\theta) + b,$$
$$2\mathrm{Y} = y_1 + y_2 = a(\cos\theta + \sin\theta),$$

ou

$$2\mathrm{X} - b = a(\cos\theta - \sin\theta),$$
$$2\mathrm{Y} = a(\cos\theta + \sin\theta).$$

Élevons au carré et ajoutons ces deux équations; on trouve immédiatement que le lieu du milieu de AB est le cercle qui a pour équation

$$(2\mathrm{X} - b)^2 + 4\mathrm{Y}^2 = 2a^2.$$

Autre solution de M. A. Dardès.

Question 1702.

(1895, p. 38*.)

Soient AB *et* A′B′ *deux diamètres d'une hyperbole équilatère et* C *un point quelconque de cette dernière : les deux triangles* AA′C *et* BB′C *sont orthocentriques.*

(A. Droz.)

SOLUTION

par M. E.-N. Barisien.

Cette propriété est la conséquence de la suivante, bien connue :

L'orthocentre de tout triangle inscrit dans une hyperbole équilatère est situé sur cette courbe.

Or, la hauteur du triangle CAA′ issue de C se confond avec la hauteur du triangle CBB′ issue de C, puisque AA′ et BB′ sont parallèles.

Le point H, orthocentre commun aux deux triangles, est donc situé au second point d'intersection de la hauteur commune aux deux triangles avec l'hyperbole.

Autre solution de M. A. Dardès.

QUESTIONS.

1731. Soient n et $k \leqq n$ deux nombres entiers positifs et posons, en désignant par $\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right)$ le plus grand nombre qui ne surpasse pas $\frac{n}{k}$,

$$\frac{n}{k} = \mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right) + \theta_k,$$

en sorte que

$$0 \leqq \theta_k < 1.$$

Démontrer que l'expression

$$\sqrt[n]{(1-\theta_1)(1-\theta_2)(1-\theta_3)\ldots(1-\theta_n)},$$

converge vers une limite déterminée pour $n = \infty$, limite qu'on peut exprimer par le produit infini

$$\prod_2^\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

et dont la valeur numérique est

$$0,4545101352\ldots.$$

1732. Étant donné un triangle ABC, rectangle en A ; sur les trois côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, pris comme diamètres, on décrit les circonférences πa, πb, πc. Les trois demi-circonférences supérieures comprennent entre elles deux lunules, que nous désignons par l et l' ; les trois demi-circonférences inférieures forment entre elles un triangle curviligne et un segment biconvexe, que nous représentons par t et s.

Prouver que :

1° La somme $l + l'$ des deux lunules est équivalente à la surface $\frac{1}{2}bc$ du triangle rectangle (théorème connu d'Hippocrate de Chio) ;

2° La différence $t - s$ entre le triangle curviligne et le segment biconvexe est aussi équivalente à la même surface $\frac{1}{2}bc$;

3° Les centres de gravité des deux surfaces $l + l'$, $t - s$ sont situés sur la perpendiculaire élevée par le milieu de l'hypoténuse a, symétriquement placés par rapport à cette droite, et à une distance d'elle égale au huitième $\frac{1}{8}\pi a$ de la circonférence décrite sur l'hypoténuse comme diamètre.

(G. Dostor.)

ERRATA.

3ᵉ série, t, XII, 1893, Table spéciale des Exercices. Les questions 1569 et 1659 sont indiquées comme résolues toutes deux à la page 53*. Or la question 1569 figure seule à cette page, et la question 1659 n'a été proposée qu'en 1894, page 1*.

3ᵉ série, t. XV, 1896, p. 96, ligne 9 en remontant, *au lieu de* $<$, *lisez* $\geqq$.

Page 151, ligne 16 en remontant, *au lieu de* $f(v)$, *lisez* $f(o)$.

Page 199, *remplacez* les signes $+$ *par* $\times$.

[125b] SUR LES NOMBRES PARFAITS;

Par M. C. BOURLET,
Professeur au lycée Henri IV.

J'ai fait le présent Travail sans connaître les travaux qui ont paru sur ce sujet; je savais, seulement, qu'on avait démontré que tous les nombres parfaits pairs étaient compris dans la formule

$$2^n(2^{n+1}-1).$$

C'est en cherchant à retrouver ce résultat, que j'ai été amené à faire cette petite étude.

Vérifications faites, j'avais retrouvé presque toutes les propriétés connues des nombres parfaits. De plus, j'étais amené à augmenter les restrictions dans la recherche des nombres parfaits impairs. Mes démonstrations sont nouvelles, à ce que je crois du moins, et, comme cette étude a été faite d'un seul jet, il y a une certaine unité d'exposition qu'on n'obtient pas lorsqu'on rapproche les démonstrations connues jusqu'à ce jour. Pour ces raisons, j'ai pensé qu'il pouvait être intéressant de publier cette Note.

Comme le dit Édouard Lucas, « l'étude des nombres parfaits semble archaïque, mais il ne faut pas oublier qu'elle a donné naissance aux travaux de Fermat sur l'Arithmétique supérieure ». Un sujet qui a passionné des mathématiciens comme Euclide, Fermat, Descartes, Frenicle, le P. Mersenne et bien d'autres, peut mériter encore quelque attention, ne serait-ce qu'au point de vue historique.

1. On appelle nombre *parfait* un nombre égal à la somme de ses parties aliquotes (c'est-à-dire de ses diviseurs plus petits que lui). Un nombre est dit *abondant* (redundans) ou *déficient* (deficiens) suivant qu'il est plus petit ou plus grand que la somme de ses parties aliquotes.

Dans la suite, nous désignerons toujours par $\sigma(n)$ la somme des diviseurs du nombre n (y compris lui-même). On a donc

$2n = \sigma(n)$ pour un nombre *parfait*,
$2n < \sigma(n)$ » *abondant*,
$2n > \sigma(n)$ » *déficient*.

2. Je rappellerai d'abord quelques propriétés de la somme $\sigma(n)$.

1° Si n, décomposé en facteurs premiers, est égal à $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, on a

$$\sigma(n) = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\,\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\,\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\cdots.$$

2° p et q étant deux nombres *premiers entre eux*, on a

$$\sigma(pq) = \sigma(p)\,\sigma(q).$$

3° $a, b, c, \ldots$ étant les facteurs premiers distincts du nombre n, on a

$$1 > \frac{n}{\sigma(n)} > \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots.$$

La première inégalité est évidente, car on a évidemment

$$\sigma(n) > n.$$

Pour prouver la seconde, écrivons

$$\sigma(n) = a^\alpha b^\beta c^\gamma \frac{a-\frac{1}{a^\alpha}}{a-1}\,\frac{b-\frac{1}{b^\beta}}{b-1}\,\frac{c-\frac{1}{c^\gamma}}{c-1};$$

on en conclut, sans conteste,

$$\sigma(n) < n \frac{a}{a-1} \frac{b}{b-1} \frac{c}{c-1} \cdots,$$

d'où

$$\frac{n}{\sigma(n)} > \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots.$$

3. Ces propriétés rappelées, nous établirons, d'abord, quelques propositions générales sur les nombres parfaits, abondants et déficients.

THÉORÈME I. — *Un nombre est abondant, parfait ou déficient suivant que la somme des inverses de ses diviseurs est plus grande que* 2, *égale à* 2, *ou plus petite que* 2.

Soit, en effet, n un nombre et soient

$$1, \quad d_1, \quad d_2, \quad \ldots, \quad d_{k-2}, \quad d_{k-1}, \quad n$$

les diviseurs rangés par ordre de grandeur croissante. On a, comme on sait,

$$d_1 d_{k-1} = n, \qquad d_2 d_{k-2} = n, \qquad \ldots;$$

on a donc

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{1}{n} + \frac{d_1}{n} + \frac{d_2}{n} + \ldots + \frac{d_{k-2}}{n} + \frac{d_{k-1}}{n} + 1,$$

ce qui s'écrit, à cause des relations précédentes,

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{d_{k-1}} + \frac{1}{d_{k-2}} + \ldots + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{1}.$$

Or $\frac{\sigma(n)}{n}$ est plus grand que 2, égal à 2 ou plus petit que 2 suivant que le nombre n est abondant, parfait, ou déficient.

THÉORÈME II. — *Tout nombre divisible par un nombre qui n'est pas déficient est abondant.*

Supposons, en effet, que le nombre n admette comme diviseur un nombre p, abondant ou parfait. Soient 1, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{h-1}$, p les diviseurs de p. On aura, d'après le théorème I,

$$\frac{\sigma(p)}{p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} + \ldots + \frac{1}{\delta_{h-1}} + \frac{1}{p} \geqq 2.$$

Or n, admettant p pour diviseur, admet tous les diviseurs de p. La somme des inverses des diviseurs de n est donc plus grande que la somme des inverses des diviseurs de p, puisqu'elle est égale à cette somme augmentée de la somme des inverses des diviseurs de n qui ne divisent pas p.

On a donc

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(p)}{p}$$

et, par suite, certainement

$$\frac{\sigma(n)}{n} > 2.$$

Corollaires. — *Un nombre parfait ne peut pas être divisible par un nombre parfait, autre que lui-même.*

Un nombre parfait ne peut admettre que des diviseurs déficients autres que lui-même.

Théorème III. — *a, b, c, ... étant les facteurs premiers distincts d'un nombre n qui n'est pas déficient, on a*

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots < \frac{1}{2}.$$

Car, si le nombre n est abondant ou parfait, on a

$$\frac{n}{\sigma(n)} \leqq \frac{1}{2}.$$

Or on a aussi (2, 3°)

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots<\frac{n}{\sigma(n)}$$

donc

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots<\frac{1}{2}.$$

Application. — Ce théorème limite la recherche des nombres parfaits ou abondants ayant un nombre *donné* de facteurs premiers distincts.

D'abord, si l'un des facteurs premiers est égal à 2 l'inégalité précédente a toujours lieu. Ceci nous conduira donc, d'abord, à chercher les nombres abondants et parfaits qui sont pairs.

Mais, si aucun facteur premier n'est égal à 2, il n'y aura qu'un nombre limité de combinaisons d'un nombre *donné* de facteurs premiers satisfaisant à l'inégalité. Ainsi :

1° *Parmi les nombres de la forme* $a^\alpha b^\beta$ *il n'y a que les nombres pairs qui puissent être parfaits ou abondants*, car l'inégalité

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)<\frac{1}{2},$$

n'étant pas vérifiée pour $a=3$, $b=5$, n'est, *a fortiori*, vérifiée pour aucun couple de nombres premiers a, b impairs, puisque, quand on augmente a ou b, l'expression $\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$ augmente.

2° *Parmi les nombres impairs de la forme* $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ *il n'y a que ceux qui admettent l'un des trois groupes suivants de facteurs premiers*

$$\begin{array}{ccc}3, & 5, & 7,\\ 3, & 5, & 11,\\ 3, & 5, & 13,\end{array}$$

qui puissent être parfaits ou abondants.

En effet, a, b, c doivent vérifier l'inégalité

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)<\frac{1}{2}.$$

Comme on a

$$\left(1-\frac{1}{5}\right)^3>\frac{1}{2},$$

il faut, nécessairement, qu'un des facteurs soit plus petit que 5, donc égal à 3. Soit $a=3$; on aura, pour b et c,

$$\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)<\frac{1}{2},$$

$$\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)<\frac{3}{4}.$$

Or on a

$$\left(1-\frac{1}{11}\right)^2>\frac{3}{4}.$$

L'un des facteurs b ou c doit donc être plus petit que 11, donc égal à 5 ou 7. Soit $b=5$, on devra avoir

$$\frac{4}{5}\left(1-\frac{1}{c}\right)<\frac{3}{4},$$

ce qui donne

$$c<16,$$

et c ne peut prendre que les valeurs 7, 11 ou 13.

Si l'on prenait $b=7$, on trouverait qu'on doit avoir $c<8$, ce qui donnerait $c=5$ et l'on retrouverait la combinaison 3, 5, 7.

3° Si, en suivant la même marche, on cherchait à déterminer toutes les combinaisons de 4 nombres premiers impairs a, b, c, d, ... vérifiant l'inégalité

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{1}{d}\right)<\frac{1}{2},$$

on trouverait un nombre *limité* mais *considérable* de combinaisons possibles. Il en serait de même si l'on prenait un nombre plus grand de facteurs premiers distincts.

4. Théorème IV. — *Tout nombre de la forme a^α, a étant premier, est déficient.*

On a, en effet,

$$\sigma(a^\alpha) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1},$$

et l'on a, évidemment,

$$2a^\alpha > \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1},$$

ou

$$2a^{\alpha+1} - 2a^\alpha > a^{\alpha+1} - 1,$$

ou encore

$$a^{\alpha+1} > 2a^\alpha - 1.$$

Car, a étant un nombre premier,

$$a \geqq 2,$$

donc

$$a^{\alpha+1} \geqq 2a^\alpha,$$

et, par suite,

$$a^{\alpha+1} > 2a^\alpha - 1.$$

Corollaire. — *Il n'y a pas de nombre parfait n'admettant qu'un facteur premier.*

Théorème V. — *Tous les nombres parfaits ou abondants de la forme $a^\alpha b^\beta$ sont pairs et, de plus :*

1° *Ceux qui sont parfaits sont de la forme*

$$2^n(2^{n+1} - 1),$$

$2^{n+1} - 1$ *étant premier absolu;*

2° *Ceux qui sont abondants sont de la forme*

$$2^n a^\alpha,$$

a étant premier absolu et au plus égal à $2^{n+1} - 1$.

La première partie de cette proposition résulte d'une Remarque faite plus haut (3, *App.*).

Nous n'avons donc qu'à rechercher les nombres parfaits ou abondants de la forme

$$2^n a^\alpha.$$

Or

$$\sigma(2^n a^\alpha) = (2^{n+1} - 1)\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1},$$

et, pour que le nombre ne soit pas déficient, il faut avoir

$$2^{n+1} a^\alpha \overline{\overline{<}} (2^{n+1} - 1)\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}$$

ou

$$a^{\alpha+1} - 2^{n+1} a^\alpha + 2^{n+1} - 1 \overline{\overline{<}} 0.$$

Considérons, maintenant, le polynome entier

$$\varphi(x) = x^{\alpha+1} - 2^{n+1} x^\alpha + (2^{n+1} - 1).$$

Remarquons que ce polynome, n'ayant que 2 variations, ne peut avoir au plus que 2 racines positives. Or, ces 2 racines existent et sont faciles à séparer. L'une de ces racines est d'abord, évidemment, $x = 1$, puisque

$$\varphi(1) = 0.$$

L'autre est comprise entre $2^{n+1} - 1$ et 2^{n+1}.

On a, en effet,

$$\begin{aligned}\varphi(2^{n+1} - 1) &= -(2^{n+1} - 1)^\alpha + (2^{n+1} - 1)\\ &= -(2^{n+1} - 1)[(2^{n+1} - 1)^{\alpha-1} - 1].\end{aligned}$$

La quantité entre crochets est positive; sauf dans le cas où $\alpha = 1$, où elle est nulle. On a donc

$$\varphi(2^{n+1} - 1) \leqq 0.$$

D'ailleurs,

$$\varphi(2^{n+1}) = 2^{n+1} - 1 > 0.$$

On en conclut que l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

a une racine positive x' telle que

$$2^{n+1} - 1 \leqq x' < 2^{n+1}.$$

Puisque $\varphi(x)$ ne s'annule que pour les deux valeurs 1 et x', il en résulte que :

1° Le nombre $2^n a^\alpha$ ne peut être parfait que si l'on a

$$a = x',$$

et, comme a est un nombre *entier* et *premier*, ceci ne peut arriver que si

$$x' = 2^{n+1} - 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha = 1.$$

Les seuls nombres parfaits, admettant 2 facteurs premiers distincts, sont donc de la forme

$$2^n(2^{n+1} - 1),$$

où $(2^{n+1} - 1)$ est premier absolu.

2° Le nombre $2^n a^\alpha$ ne peut être *abondant* que si

$$a < x'.$$

Comme a est un nombre entier ceci ne peut arriver que si

$$a \overline{\overline{<}} 2^{n+1} - 1.$$

Théorème VI. — *Tous les nombres parfaits pairs sont compris dans la formule*

$$2^n(2^{n+1} - 1),$$

où $(2^{n+1} - 1)$ est premier absolu.

Soit, en effet, 2^nB un nombre pair, B étant un nombre impair premier ou non.

2^n et B étant premiers entre eux, on a (2, 2°)

$$\sigma(2^n B) = \sigma(2^n)\sigma(B) = (2^{n+1} - 1)\sigma(B).$$

Pour que le nombre $2^n B$ soit parfait, il faut donc avoir

$$2^{n+1} B = (2^{n+1} - 1)\sigma(B).$$

De cette égalité on conclut d'abord que $2^{n+1} - 1$ doit être premier. Car si $2^{n+1} - 1$ admettait un diviseur premier a, plus petit que lui, ce diviseur diviserait B (car il ne peut diviser 2^{n+1}, qui est premier, avec $2^{n+1} - 1$). Le nombre $2^n B$ admettrait, alors, le diviseur $2^n a$, qui est abondant, d'après le théorème V, et $2^n B$ serait lui-même abondant, d'après le théorème II. $(2^{n+1} - 1)$, étant premier, divise B. Le nombre $2^n B$ admet, alors, le diviseur $2^n(2^{n+1} - 1)$ qui est *parfait,* d'après le théorème V. Par suite, le nombre $2^n B$ est égal à son diviseur $2^n(2^{n+1} - 1)$, car, d'après le théorème II et son corollaire, un nombre parfait ne peut admettre d'autre diviseur parfait que lui-même.

5. Résumé. — De ce qui précède il résulte que la formule

$$2^n(2^{n+1} - 1),$$

où $(2^{n+1} - 1)$ est premier, comprend tous *les nombres parfaits pairs et tous ceux qui admettent moins de trois facteurs premiers distincts.*

S'il existe donc des nombres parfaits non compris dans cette formule, ces nombres sont, nécessairement, impairs et admettent au moins trois facteurs premiers distincts.

Jusqu'ici, on n'a pas trouvé d'exemple de nombre parfait impair. Nous allons encore montrer qu'il ne peut pas exister de nombre parfait de la forme

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma.$$

Il faudra donc chercher les nombres parfaits impairs, s'il en existe, parmi les nombres admettant au moins *quatre* facteurs premiers distincts [1].

6. Théorème VII. — *Tous les nombres parfaits impairs, s'il en existe, sont de la forme*

$$(4k+1)^{4\mu+1}A^2,$$

où $4k+1$ *désigne un nombre premier et* A *un nombre non divisible par* $4k+1$ [2].

Soit, en effet, $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ un nombre parfait impair, on devra avoir

$$2a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots = \sigma(a^\alpha) \times \sigma(b^\beta) \times \sigma(c^\gamma) \times \ldots;$$

le premier membre étant *simplement* pair, *un seul* des facteurs $\sigma(a^\alpha)$, $\sigma(b^\beta)$, ... doit être pair. Supposons que ce soit le premier, on devra avoir

$$\sigma(a^\alpha) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha = \textit{mult. de } 2;$$

a étant impair, ceci nécessite d'abord que α soit impair

$$\alpha = 2\alpha' + 1,$$

et l'on aura

$$\sigma(a^\alpha) = (a+1)(a^{2\alpha'} + a^{2\alpha'-2} + \ldots + a^2 + 1).$$

Mais, $\sigma(a^\alpha)$ devant être *simplement* pair, $a+1$ doit être simplement pair et le second facteur impair, ce qui entraîne

$$a = 4k+1, \qquad \alpha' = 2\mu, \qquad \alpha = 4\mu + 1.$$

D'ailleurs, tous les autres facteurs $\sigma(b^\beta)$, $\sigma(c^\gamma)$, ...

---

[1] Cette proposition se trouve énoncée comme exemple (n° 229, Exemple VII) dans la *Théorie des nombres* d'Édouard Lucas.

[2] Cette proposition a été énoncée par Lionnet dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1879, p. 306) et démontrée par Lucas dans sa *Théorie des nombres* (t. I).

doivent être impairs, ce qui nécessite que les exposants $\beta, \gamma, \ldots$ soient pairs. Le produit $b^\beta c^\gamma \ldots$ est donc un carré parfait A^2 et le nombre est de la forme annoncée.

Remarque. — Il résulte de là que si un nombre parfait impair admet un facteur premier qui n'est pas de la forme $4k+1$, l'exposant de ce facteur est nécessairement pair.

Théorème VIII. — *Il n'existe aucun nombre parfait de la forme $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, a, b, c étant premiers.*

D'après la remarque faite au n° 3 (*Application*), il ne peut y avoir que les nombres admettant l'un des trois groupes

$$\begin{array}{lll} 3, & 5, & 7, \\ 3, & 5, & 11, \\ 3, & 5, & 13 \end{array}$$

comme facteurs premiers, qui puissent être parfaits.

1° Prenons le groupe 3, 5, 7. Nous remarquerons, d'abord, que le nombre $3^3 \times 5 \times 7$ est abondant ([1]). Il suffit de le vérifier. Si donc un nombre parfait admet les diviseurs 3, 5 et 7, il contient le facteur 3 à un exposant inférieur à 3; car, sans cela, il serait divisible par le nombre abondant $3^3 \times 5 \times 7$ et serait abondant.

D'ailleurs, d'après la remarque précédente, il devrait contenir 3 à une puissance paire et, par suite, con-

---

([1]) Je relève, en passant, une faute d'impression dans la *Théorie des nombres* d'Édouard Lucas : on trouve dans le tome I, p. 380, l'exemple V qui propose de démontrer que

$$3^3 \times 5 \times 79$$

est le plus petit des nombres abondants impairs.

Il faut, évidemment, lire

$$3^3 \times 5 \times 7.$$

tiendrait 3 à la puissance 2. Mais, alors, il serait divisible par

$$\sigma(3^2) = 13,$$

ce qui n'est pas possible, s'il n'a que les trois facteurs 3, 5 et 7.

Ceci nous prouve, en passant, qu'*il ne peut exister aucun nombre parfait admettant à la fois les facteurs premiers* 3,5 *et* 7. Car, d'après ce qui précède, ce nombre admettrait encore le facteur 13, par suite, serait divisible par

$$3^2 \times 5 \times 7 \times 13,$$

qui est un nombre abondant, comme il est facile de le vérifier.

2° Considérons le groupe 3, 5, 11. Nous remarquerons encore que le nombre $3^3 \times 5^2 \times 11$ est abondant. On voit d'abord qu'un nombre parfait, admettant seulement les facteurs 3, 5 et 11, ne peut admettre le facteur 5 à une puissance supérieure à 2; car, alors, il devrait admettre le facteur 3 à la puissance 2 (pour ne pas être divisible par le nombre abondant $3^3 \times 5^2 \times 11$) et serait divisible par $\sigma(3^2) = 13$.

Le nombre cherché, s'il existe, ne peut donc être que de la forme

$$5 \times 3^{2\alpha} \times 11^{2\beta} \quad \text{(en vertu du th. VII)}$$

et l'on devrait avoir l'égalité

$$2^2 \times 5^2 \times 3^{2\alpha-1} \times 11^{2\beta} = (3^{2\alpha+1} - 1)(11^{2\beta+1} - 1).$$

Or, cette égalité est impossible; car, le premier membre étant divisible par 3, il faudrait que $(11^{2\beta+1} - 1)$ soit divisible par 3. Ceci n'est pas, car la plus petite puissance de 11, qui donne 1 pour reste de division par 3, est 11^2 et, par suite, d'après la loi de périodicité des restes des divisions des puissances d'un nombre par un diviseur premier avec lui, il n'y a que des puissances paires de 11 qui donnent 1 pour reste de division par 3.

3° Prenons, enfin, le dernier groupe 3, 5, 13. D'abord, d'après la remarque qui suit le théorème VII, 3 devra figurer avec un exposant pair. Le nombre parfait, s'il existe, est donc de la forme

$$3^{2\alpha} \times 5^{\beta} \times 13^{\gamma},$$

et l'on devrait avoir l'égalité

$$2^6 \times 3^{2\alpha+1} \times 5^{\beta} \times 13^{\gamma} = (3^{2\alpha+1} - 1)(5^{\beta+1} - 1)(13^{\gamma+1} - 1).$$

5 ne peut pas diviser le facteur $(3^{2\alpha+1} - 1)$, car la plus petite puissance de 3, qui donne 1 pour reste de division par 5, est 3^4; une puissance impaire de 3 ne peut donc donner 1 pour reste de division par 5. Le facteur 5, qui figure dans le premier membre, devrait donc diviser $(13^{\gamma+1} - 1)$. Or, la plus petite puissance de 13, qui donne 1 pour reste de division par 5, est 13^4. Le second membre de l'égalité devrait être divisible par

$$13^4 - 1 = 2^4 \times 5 \times 3 \times 7 \times 17,$$

ce qui est impossible, puisque les facteurs 7 et 17 ne figurent pas dans le premier membre.

Ceci nous montre, en passant, qu'*un nombre parfait, qui admet les facteurs* 3 *et* 5, *ne peut admettre le facteur* 13 *à une puissance impaire*; car, sans cela, il admettrait le facteur 7 qui divise $13^2 - 1$ et, par suite, admettrait, à la fois, les facteurs 3, 5 et 7, ce qui n'est pas possible.

7. La recherche des nombres parfaits impairs est donc circonscrite à celle des nombres impairs admettant, au moins, quatre facteurs premiers distincts. Cette re-

cherche peut encore être restreinte, lorsqu'on connaît des nombres abondants.

Ainsi, nous avons déjà vu qu'un nombre parfait ne peut admettre *à la fois* les facteurs premiers 3, 5 et 7. En remarquant que les nombres :

$$3^2 \times 5 \times 11 \times 13,$$
$$3^2 \times 5 \times 11 \times 17,$$
$$3^2 \times 5 \times 11^2 \times 19^2$$

sont abondants; on en conclut, immédiatement, qu'*un nombre parfait impair ne peut admettre à la fois les facteurs*

$$3, \quad 5, \quad 11, \quad 13$$

ou

$$3, \quad 5, \quad 11, \quad 17$$

ou encore

$$3, \quad 5, \quad 11, \quad 19.$$

Le nombre

$$17 \times 5^2 \times 3^2 \times 13^2$$

étant abondant, et un nombre parfait ne pouvant admettre le facteur 13 qu'à une puissance paire, un nombre parfait ne peut admettre les facteurs 5, 3, 13 et 17, sans que 5 soit à la puissance 1 et 17 à une puissance paire.

On pourrait multiplier les exemples de cette nature.

De ce qui précède, il résulte, évidemment, que tout nombre parfait impair est certainement plus grand que le nombre

$$5 \times 3^2 \times 13^2 \times 17^2 = 2197845;$$

on voit, par suite, que, s'il existe des nombres parfaits impairs, ces nombres sont très grands.

On peut assurer que, dans les deux premiers millions de nombres entiers, il n'y a pas d'autres nombres parfaits que les nombres pairs.

Ceci suffit à montrer la difficulté qu'il peut y avoir à trouver des nombres parfaits impairs, *s'il en existe.*

[M²3f]

THÉORÈME SUR LA DÉTERMINATION D'UNE SURFACE DU TROISIÈME ORDRE GÉNÉRALE PAR SA HESSIENNE;

PAR M. F. DUMONT (1),
Professeur au lycée d'Annecy.

C'est un théorème bien connu qu'une courbe plane du troisième ordre donnée est la courbe hessienne de trois cubiques du même plan.

La hessienne d'une surface cubique est du quatrième ordre, elle n'est pas générale de son degré puisqu'elle possède 10 points doubles, sommets d'un pentaèdre. La question analogue à se poser pour l'espace à 3 dimensions est donc la suivante : Une surface du quatrième ordre à 10 points doubles, sommets d'un pentaèdre étant donnée, peut-elle être la hessienne d'une surface ou de plusieurs surfaces du troisième ordre?

La réponse est fournie par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Une surface du troisième ordre est*

---

(1) L'auteur de cette Note profite de l'occasion qui se présente à lui pour reconnaître que les théorèmes relatifs aux polygones tracés sur les surfaces du troisième ordre, théorèmes qu'il a donné dans une théorie élémentaire de ces surfaces, ont déjà été publiés en 1883 par M. Rudolf Sturm, dans un petit Mémoire paru dans les *Mathematische Annalen,* lequel ne lui a été communiqué que récemment.

déterminée sans ambiguïté quand on donne une surface du quatrième ordre à 10 points doubles, sommets d'un pentaèdre pour sa hessienne.

Soit la surface

$$A_{111}x^3 + A_{222}y^3 + \ldots + 3A_{112}x^2y + \ldots + 6A_{234}yzt = 0$$

(les indices 1, 2, 3, 4 se rapportent respectivement à x, y, z et t).

L'équation de la quadrique polaire de x_1, y_1, z_1, t_1, est

$$\begin{aligned}
&x_1[A_{111}x^2 + A_{122}y^2 + \ldots + 2A_{112}xy + \ldots + 2A_{134}zt]\\
+&y_1[A_{211}x^2 + A_{222}y^2 + \ldots + 2A_{212}xy + \ldots + 2A_{234}zt]\\
+&z_1[A_{311}x^2 + A_{322}y^2 + \ldots + 2A_{312}xy + \ldots + 2A_{334}zt]\\
+&t_1[A_{411}x^2 + A_{422}y^2 + \ldots + 2A_{412}xy + \ldots + 2A_{434}zt] = 0,
\end{aligned}$$

où l'on suppose $A_{ijk} = A_{ikj} = A_{kij} = \ldots$.

L'équation du plan polaire de x_1, y_1, z_1, t_1 s'obtient en permutant dans la précédente les coordonnées courantes x, y, z, t et celles du point x_1, y_1, z_1, t_1.

On sait que chaque point double A de la hessienne a pour quadrique polaire un système de 2 plans ayant pour axe celle des 10 arêtes du pentaèdre qui n'est dans aucune des 3 faces du pentaèdre passant par A et formant, avec les deux faces du pentaèdre qui passent par cette arête, un faisceau harmonique.

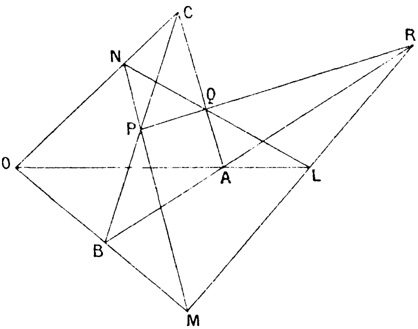
Par suite le plan polaire de A, qui est aussi le plan plan polaire par rapport à cette quadrique dégénérée, passe par cette même arête.

Cherchons la forme que prendra l'équation de la surface, si les 4 sommets du tétraèdre de référence, ainsi que les 6 intersections de ses arêtes avec le plan

$$V \equiv l_1x + l_2y + l_3z + l_4t = 0,$$

sont les 10 points de la hessienne, c'est-à-dire les 10 points satisfaisant à la condition que leur plan polaire passe par l'arête qui leur est opposée dans le pentaèdre ($X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $T = 0$, $V = 0$).

Supposons que O, A, B, C, L, M, N, P, Q, R dé-



signent respectivement les sommets

$$X = Y = Z = 0, \qquad Y = Z = T = 0,$$
$$X = Z = T = 0, \qquad X = Y = T = 0,$$
$$Y = Z = V = 0, \qquad X = Z = V = 0, \qquad X = Y = V = 0,$$
$$X = T = V = 0, \qquad Y = T = V = 0, \qquad Z = T = V = 0.$$

Nous avons :

Conditions pour que le plan polaire : 1° De O passe par PQR :

$$\frac{A_{144}}{l_1} = \frac{A_{244}}{l_2} = \frac{A_{344}}{l_3};$$

2° De A passe par MPN :

$$\frac{A_{211}}{l_2} = \frac{A_{311}}{l_3} = \frac{A_{411}}{l_4};$$

3° De B passe par LQN :

$$\frac{A_{322}}{l_3} = \frac{A_{422}}{l_4} = \frac{A_{122}}{l_1};$$

4° De C passe par MLR :

$$\frac{A_{433}}{l_4} = \frac{A_{133}}{l_1} = \frac{A_{233}}{l_2};$$

5° De L passe par BPC :

$$A_{211}\, l_4^2 + A_{244}\, l_1^2 - 2A_{124}\, l_1 l_4 = 0,$$
$$A_{311}\, l_4^2 + A_{344}\, l_1^2 - 2A_{134}\, l_1 l_4 = 0;$$

6° De M passe par CQA :

$$A_{122}\, l_4^2 + A_{144}\, l_2^2 - 2A_{124}\, l_2 l_4 = 0,$$
$$A_{322}\, l_4^2 + A_{344}\, l_2^2 - 2A_{234}\, l_2 l_4 = 0;$$

7° De N passe par BAR :

$$A_{233}\, l_4^2 + A_{244}\, l_3^2 - 2A_{234}\, l_3 l_4 = 0,$$
$$A_{133}\, l_4^2 + A_{144}\, l_3^2 - 2A_{134}\, l_3 l_4 = 0;$$

8° De P passe par OAL :

$$A_{122}\, l_3^2 + A_{133}\, l_2^2 - 2A_{123}\, l_2 l_3 = 0,$$
$$A_{422}\, l_3^2 + A_{433}\, l_2^2 - 2A_{234}\, l_2 l_3 = 0;$$

9° De Q passe par OBM :

$$A_{211}\, l_3^2 + A_{233}\, l_1^2 - 2A_{123}\, l_1 l_3 = 0,$$
$$A_{411}\, l_3^2 + A_{433}\, l_1^2 - 2A_{134}\, l_1 l_3 = 0;$$

10° De R passe par ONC :

$$A_{311}\, l_2^2 + A_{322}\, l_1^2 - 2A_{123}\, l_1 l_2 = 0,$$
$$A_{411}\, l_2^2 + A_{422}\, l_1^2 - 2A_{124}\, l_1 l_2 = 0.$$

On déduit aisément de ce Tableau, le suivant

$$\left\{\begin{array}{lll} A_{122} = \dfrac{l_2}{l_3} A_{123}, & A_{211} = \dfrac{l_1}{l_3} A_{123}, & A_{322} = \dfrac{l^2}{l_1} A_{123}, \\ A_{133} = \dfrac{l_3}{l_2} A_{123}, & A_{311} = \dfrac{l_1}{l_2} A_{123}, & A_{233} = \dfrac{l_3}{l_1} A_{123}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} A_{122} = \dfrac{l_2}{l_4} A_{124}, & A_{211} = \dfrac{l_1}{l_4} A_{124}, & A_{422} = \dfrac{l_2}{l_1} A_{124}, \\ A_{144} = \dfrac{l_4}{l_2} A_{124}, & A_{411} = \dfrac{l_1}{l_2} A_{124}, & A_{244} = \dfrac{l_4}{l_1} A_{124}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} A_{144} = \dfrac{l_4}{l_3} A_{134}, & A_{411} = \dfrac{l_1}{l_3} A_{134}, & A_{344} = \dfrac{l_4}{l_1} A_{134}, \\ A_{133} = \dfrac{l_3}{l_4} A_{134}, & A_{311} = \dfrac{l_1}{l_4} A_{134}, & A_{433} = \dfrac{l_3}{l_1} A_{134}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} A_{422} = \dfrac{l_2}{l_3} A_{234}, & A_{244} = \dfrac{l_4}{l_3} A_{234}, & A_{322} = \dfrac{l_2}{l_4} A_{234}, \\ A_{433} = \dfrac{l_3}{l_2} A_{234}, & A_{344} = \dfrac{l_4}{l_2} A_{234}, & A_{233} = \dfrac{l_3}{l_4} A_{234}. \end{array}\right.$$

En égalant les deux valeurs de A_{122} de ce Tableau puis les deux de A_{133}, les deux de A_{233}, on a les conditions

$$A_{234}\, l_1 = A_{341}\, l_2 = A_{412}\, l_3 = A_{123}\, l_4.$$

Soit λ la valeur commune des quatre membres.

En transportant les valeurs

$$A_{234} = \frac{\lambda}{l_1}, \qquad A_{341} = \frac{\lambda}{l_2}, \qquad A_{412} = \frac{\lambda}{l_3}, \qquad A_{123} = \frac{\lambda}{l_4}$$

dans les équations précédentes, on déduit

$$\begin{array}{lll} A_{122} = \dfrac{l_2}{l_3 l_4}\lambda, & A_{133} = \dfrac{l_3}{l_2 l_4}\lambda, & A_{144} = \dfrac{l_4}{l_2 l_3}\lambda, \\ A_{233} = \dfrac{l_3}{l_4 l_1}\lambda, & A_{244} = \dfrac{l_4}{l_1 l_3}\lambda, & A_{211} = \dfrac{l_1}{l_3 l_4}\lambda, \\ A_{344} = \dfrac{l_4}{l_1 l_2}\lambda, & A_{311} = \dfrac{l_1}{l_2 l_4}\lambda, & A_{322} = \dfrac{l_2}{l_4 l_1}\lambda, \\ A_{411} = \dfrac{l_1}{l_2 l_3}\lambda, & A_{422} = \dfrac{l_2}{l_3 l_1}\lambda, & A_{433} = \dfrac{l_3}{l_1 l_2}\lambda. \end{array}$$

Posons, pour éviter les dénominateurs, $\lambda = l_1 l_2 l_3 l_4 \mu$. l'équation générale de la surface devient

$$\begin{aligned} &A_{111} x^3 + A_{222} y^3 + A_{333} z^3 + A_{444} t^3 \\ &\quad + \mu[3 l_1^2 l_2 x^2 y + 3 l_1^2 l_3 x^2 z + \ldots + 6 l_1 l_2 l_3 xyz + \ldots]. \end{aligned}$$

Or, en posant $A_{iii} = \alpha_i + l_i^3 \mu$, elle prend la forme

$$\alpha_1 x^3 + \alpha_2 y^3 + \alpha_3 z^3 + \alpha_4 t^3 + \mu(l_1 x + l_2 y + l_3 z + l_4 t)^3 = 0.$$

La hessienne de cette surface est, si

$$v \equiv l_1 x + l_2 y + l_3 z + l_4 t$$

$$\frac{1}{\mu} xyzt + \frac{l_1^2}{\alpha_1} yztv + \frac{l_2^2}{\alpha_2} xztv + \frac{l_3^2}{\alpha_3} xytv + \frac{l_4^2}{\alpha_4} xyzv = 0.$$

L'équation d'une surface du quatrième ordre, ayant 10 points doubles en O, A, B, C, L, M, N, P, Q, R, est de la forme

$$\mathrm{A}xyzt + \mathrm{B}yztv + \mathrm{C}xztv + \mathrm{D}xytv + \mathrm{E}xyzv = 0.$$

Si l'on identifie les deux équations, on a les conditions

$$\alpha_1 = \frac{l_1^2 \mathrm{A}}{\mathrm{B}} \mu, \qquad \alpha_2 = \frac{l_2^2 \mathrm{A}}{\mathrm{C}} \mu, \qquad \alpha_3 = \frac{l_3^2 \mathrm{A}}{\mathrm{D}} \mu, \qquad \alpha_4 = \frac{l_4^2 \mathrm{A}}{\mathrm{E}} \mu,$$

qui montrent que A, B, C, D, E étant donnés, on a pour les rapports de 4 des quantités α_1, α_2, α_3, α_4, μ à la cinquième des valeurs déterminées, ce qui démontre le théorème.

Il est bon de remarquer que la donnée des 10 points doubles de la hessienne, seule, n'équivaut qu'à 15 conditions simples car les rapports $\frac{\alpha_1}{\mu}$, $\frac{\alpha_2}{\mu}$, $\frac{\alpha_3}{\mu}$, $\frac{\alpha_4}{\mu}$ restent alors indéterminés. Si l'on donnait 10 points quelconques avec la condition que leurs plans polaires passent respectivement par 10 droites quelconques, on obtiendrait un système de $10 \times 2 = 20$ équations linéaires par rapport aux coefficients de l'équation de la surface générale du troisième ordre, c'est-à-dire que l'on aurait une équation de trop en général.

[M²3b]

SUR LA REPRÉSENTATION DE LA SURFACE CUBIQUE GÉNÉRALE SUR UN PLAN;

PAR M. F. DUMONT,
Professeur au lycée d'Annecy.

Les divers modes de représentation (1, 1) d'une surface sur un plan ont, en général, une assez grande importance, chacun d'eux pouvant devenir, par une transposition convenable des propriétés des lignes du plan représentatif, la source d'un grand nombre de propositions relatives à la surface représentée.

Pour les surfaces cubiques, les deux plus connus sont :

1° Celui dans lequel, la surface étant supposée engendrée à l'aide de trois gerbes de plans deux à deux homographiques, on rapporte corrélativement chacune d'elles à un système plan, de telle sorte qu'à trois plans homologues P_1, P_2, P_3 des trois gerbes, corresponde un même point du plan. Ce point correspond alors à un point unique de la surface, savoir (P_1, P_2, P_3) et réciproquement. (*voir* REYE, *Géométrie de position*, trad. Chemin, p. 208 et suiv.).

2° Celui dans lequel les points correspondants de la surface cubique S et du plan P sont donnés par les intersections de la surface et du plan avec une droite mobile l assujettie à s'appuyer sur deux droites d, d' de la surface, ne se coupant pas (*voir* SALMON, *Géométrie à trois dimensions* (trad. Chemin), 3e Partie, p. 133).

En traduisant ces deux modes par des formules, on s'assure aisément que, si x, y, z, t désignent les coordonnées d'un point de la surface, X, Y, Z les coordonnées homogènes du point correspondant du plan, les formules

$$(1) \qquad \frac{x}{P} = \frac{y}{Q} = \frac{z}{R} = \frac{t}{S},$$

où P, Q, R, S représentent des fonctions homogènes en X, Y, Z, sont du troisième degré dans le premier cas, du quatrième dans le second.

Pour que les formules (1), P, Q, R, S étant du quatrième degré, traduisent une représentation (1, 1) de la surface générale du troisième ordre, il faut que les courbes $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$, aient treize points fixes en commun, afin que les deux courbes

$$\begin{aligned} \alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S &= 0, \\ \alpha' P + \beta' Q + \gamma' R + \delta' S &= 0 \end{aligned}$$

n'aient plus que trois points d'intersection variables, lesquels représenteront alors les trois points d'intersection de la surface avec la droite

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t &= 0, \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' t &= 0. \end{aligned} \right.$$

Il faut de plus que les courbes $\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S = 0$ soient du genre 1 afin de pouvoir représenter les sections planes de la surface, qui sont des cubiques générales. Par suite, $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ doivent avoir en commun deux points doubles. Ces points devant être comptés en tant que points d'intersection, chacun pour quatre points simples, les courbes $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ doivent avoir encore cinq points simples en commun.

Si l'on se reporte au mode de représentation 2°, on voit immédiatement que les deux points doubles communs aux biquadratiques du plan P qui représentent les sections planes de la surface, sont les deux points (d, P) et $d', P)$ et que les cinq points simples sont les cinq points (s_i, P), s_i étant l'une des cinq droites de la surface S coupant à la fois d et d'.

Il existe des modes de représentation (1, 1) de la surface cubique, dans lesquels les fonctions P, Q, R, S sont d'un degré supérieur à 4 et qui, cependant, ont une définition géométrique simple.

Soit n le degré de ces fonctions (supposé > 4). On s'assure aisément que les quatre courbes ne peuvent pas n'avoir que des points simples en commun. Supposons qu'elles aient d points doubles communs; pour que les deux courbes

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S = 0,$$
$$\alpha' P + \beta' Q + \gamma' R + \delta' S = 0$$

n'aient que trois points d'intersection variables, il faut que P, Q, R, S aient encore en commun $n^2 - 4d - 3$ points simples.

Chaque point double, comptant pour 3, en tant que point servant à la détermination, le degré d'indétermination du système de biquadratiques planes représentant les sections planes de la surface est donné par

$$\frac{n(n+3)}{2} - 3d - (n^2 - 4d - 3),$$

ou

$$d + \frac{3n - n^2 + 6}{2}.$$

Or ces sections planes constituent un système triplement indéterminé (l'équation d'un plan a trois paramètres). Donc, on doit avoir

$$d + \frac{3n - n^2 + 6}{2} = 3,$$

d'où

$$d = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1,$$

résultat qui nous montre que ces biquadratiques seront alors du genre 1.

Si $n = 5$, on a $d = 5$ et le nombre des points simples est $25 - 20 - 3 = 2$.

Si $n \geqq 6$, on a $d \geqq 9$, mais on trouve pour le nombre de points simples un résultat négatif.

C'est qu'en effet, pour $n = 6$, par exemple, les neuf points doubles communs équivalent à trente-six points simples et les biquadratiques ne forment plus un réseau pouvant représenter les sections planes. Ainsi, à partir de $n = 6$, les courbes du plan $P = 0$, ... doivent avoir en commun un ou plusieurs points triples.

Les quatre courbes peuvent déjà, pour le cas $n = 5$, avoir en commun un point triple. En recommençant le raisonnement précédent et tenant compte de ce qu'un point triple équivaut à six simples, en tant que point déterminatif, et à neuf simples, en tant que point d'intersection de deux courbes l'ayant toutes deux pour point triple, on trouve que, si P, Q, R, S sont des quintiques ayant en commun un point triple, elles doivent avoir encore en commun cinq points simples.

On a un exemple de représentation de ce genre, si l'on imagine une droite mobile l s'appuyant sur une conique C de la surface et une droite d de cette surface, coupant la conique. Les intersections de l avec la surface S et le plan P ont évidemment une correspondance (1, 1).

Soit s la droite de la surface située dans le plan de C. Le double [1] (d, s) de la surface S a cinq sécantes com-

---

[1] Système de deux droites non situées dans un même plan.

plètes (c'est-à-dire coupant à la fois d et s), donc les cinq autres sécantes à d, situées sur la surface, coupent la conique C, puisqu'elles coupent nécessairement la section plane (C, s).

Les pieds de ces cinq droites sur le plan P représentent chacun tous les points d'une droite de la surface. Par suite, toute courbe du plan P représentant une section plane de S passe par ces cinq points qui en sont, d'ailleurs, des points simples.

Soient A et B les points (C, P) et I le point (d, P); toute courbe représentative d'une section plane aura A et B pour point double, I pour point triple. En effet, soit Π le plan d'une section plane (Π). La droite d'intersection des plans Π et (A, d) coupe la section (Π) en trois points, dont l'un est le point (Π, d); les deux autres M_1 et M_2 sont des points de la courbe, qui sont tous les deux représentés par A, et les points voisins de M_1 et M_2 sur la section (Π) fournissent les deux branches de la courbe représentative qui passent par A.

Considérons maintenant le cône de sommet I et ayant (C) pour directrice. Son intersection avec le plan Π est une conique rencontrant la section (Π) en six points, dont trois sont les points (d, Π) et [(C), (Π)]. Les trois autres sont des points de la cubique plane représentés par I et les points voisins de ces trois points sur (Π) fournissent sur la courbe représentative trois branches passant par I.

On voit aisément qu'il n'y a pas d'autres points multiples sur cette courbe. Elle est donc du genre

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 2 - 3$$

(le point triple équivaut à trois doubles).

Or ce genre est égal à celui de (Π), c'est-à-dire est 1.

On a donc

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 6$$

ou

$$n^2 - 3n - 10 = 0,$$

d'où

$$n = 5.$$

Ainsi les fonctions P, Q, R, S seraient du cinquième degré; mais les quatre courbes, au lieu d'avoir deux points simples en commun, comme dans le cas où elles ont cinq points doubles et aucun point triple, ont ici cinq points communs simples, deux doubles et un triple.

Il a déjà été dit que, si $n \gtreqless 6$, il est nécessaire que les nombres P, Q, R, S aient en commun des points triples. Supposons qu'elles en aient t et de plus d points doubles. Il faut alors qu'elles aient encore en commun

$$n^2 - 9t - 4d - 3$$

points simples.

Le degré d'indétermination est alors

$$\frac{n(n+3)}{2} - 6t - 3d - (n^2 - 9t - 4d - 3)$$

ou

$$d + 3t + \frac{3n - n^2 + 6}{2}.$$

Pour qu'il soit 3, on doit avoir

$$d + 3t = \frac{n^2 - 3n}{2}.$$

Supposons alors $n = 6$, on a

$$d + 3t = 9,$$

et alors, suivant que l'on aura $t = 1$, 2 ou 3, on aura $d = 6$, 3 ou 0, et il faudra, en outre, un nombre de points simples égal à 0, 3 ou 6.

On a un exemple de ce dernier cas dans le mode de représentation dans lequel, une droite l mobile étant assujettie à rester constamment corde d'une cubique gauche Γ de la surface S, on fait correspondre le point (l, P), P étant le plan de la représentation avec le troisième point d'intersection de l avec la surface.

Cette représentation est évidemment de l'espèce (1,1), puisque d'un point de l'espace passe une seule corde de Γ.

On sait qu'il y a sur la surface six sécantes doubles (ou cordes) de la cubique. L'intersection de chacune avec le plan P représente la sécante entière et par suite, les six intersections sont des points communs à toutes les courbes de P représentant des sections planes.

Chacun des trois points (Γ, P) est un point triple de toutes ces courbes représentatives. En effet, soit I l'un d'eux, considérons le cône quadratique de sommet I, ayant Γ pour directrice. La conique suivant laquelle il rencontre le plan Π d'une section (Π) a six points d'intersection avec (Π). Trois de ces points sont sur la cubique gauche Γ; les trois autres A, B, C fournissent chacun une branche de courbe passant par I, chacun d'eux étant représenté par ce point.

Les courbes représentatives n'ont d'ailleurs pas d'autres points multiples. Ainsi, leur genre est

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 3 \times 3.$$

Il est égal à celui de (Π), c'est-à-dire égal à 1. On a donc

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 10$$

ou

$$n^2 - 3n - 18 = 0,$$

d'où l'on tire $n = 6$.

Les fonctions P, Q, R, S sont donc bien du sixième ordre et l'on est dans le cas où les quatre courbes ont en commun trois points triples, o double et six points simples.

[C1a] [H12aα]

SUR LA DÉRIVÉE DES FONCTIONS INTERPOLÉES;

Par M. E.-M. LÉMERAY.

Considérons une fonction définie par les valeurs qu'elle prend pour une infinité de valeurs de la variable différant entre elles d'une unité. Je supposerai la fonction développable, dans tout le plan, par la série de Taylor. Soit x une des valeurs de la variable pour lesquelles on connait celle de la fonction, et proposons-nous d'obtenir la valeur de la dérivée correspondante. Désignons par f_p la valeur de la fonction quand la variable a pour valeur $x+p$, p pouvant être positif ou négatif. On a en général

$$f_p = f_0 + p\frac{f'_0}{1} + p^2\frac{f''_0}{1.2} + \ldots,$$

$$f_{-p} = f_0 - p\frac{f'_0}{1} + p^2\frac{f''_0}{1.2} - \ldots.$$

Si l'on pose

$$\frac{f_p - f_{-p}}{2p} = \mathrm{K}_p, \qquad \frac{f_0^n}{n!} = \mathrm{A}_n$$

et

$$f'_0 = \mathrm{K}_0,$$

on obtient, en donnant à p la suite des valeurs 1, 2, 3, ..., les équations suivantes

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_1 &= \mathrm{K}_0 + \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_5 + \ldots,\\
\mathrm{K}_2 &= \mathrm{K}_0 + 2^2\mathrm{A}_3 + 2^4\mathrm{A}_5 + \ldots,\\
\mathrm{K}_3 &= \mathrm{K}_0 + 3^2\mathrm{A}_3 + 3^4\mathrm{A}_5 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si nous voulons avoir une valeur approchée de K_0, nous considérerons les m premières équations et nous y supposerons nulles les quantités A_i d'indices égaux ou supérieurs à $2m+1$; en éliminant entre ces m équations $A_3, A_5, \ldots, A_{2m-1}$ il restera

$$K_0 = \frac{\begin{vmatrix} K_1 & 1 & \ldots & 1 \\ K_2 & 2^2 & \ldots & 2^{2m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ K_m & m^2 & \ldots & m^{2m-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2^2 & \ldots & 2^{2m-2} \\ . & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 1 & m^2 & \ldots & m^{2m-2} \end{vmatrix}}.$$

Si l'on développe le numérateur par rapport à la première colonne, le coefficient de K_r sera le déterminant mineur obtenu en supprimant dans le dénominateur la première colonne et la $r^{\text{ième}}$ ligne. Soit $\Delta_{m-1,r}$ ce déterminant mineur. D'après une propriété que j'ai signalée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (mars 1896), on a

$$\frac{\Delta_{m-1,r}}{\Delta_{m-1,m}} = C_{2m}^{m-r}.$$

Il s'ensuit que l'on aura entre $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_m$ une relation telle que le coefficient de K_0 étant proportionnel au coefficient central du développement du binome de puissance $2m$, ceux de $K_1, K_2, \ldots, K_m$ seront proportionnels aux doubles coefficients successifs, et que cette relation pourra être représentée symboliquement par l'équation

$$(K-1)^{2m} = 0,$$

où, après développement, il faudra :

1° Remplacer chaque exposant par sa différence avec m en valeur absolue;

2° Remplacer les exposants par des indices.

La valeur de la dérivée est ainsi fournie par l'équation symbolique

$$\lim(K - 1)^{2m} = 0,$$

pour m infini.

On pourra se servir de cette méthode pour les fonctions définies par la relation qui existe entre deux valeurs de la fonction correspondant à deux valeurs de la variable différant d'une unité.

On ramènerait aisément à ce cas celui où la raison de la progression arithmétique des valeurs de x serait autre que l'unité.

La formule proposée n'a pas d'intérêt pour les fonctions, dont on connaît une expression analytique de la dérivée; mais elle pourra être utile dans le cas contraire qui se présentera souvent quand la fonction sera définie de la manière à laquelle il est fait allusion plus haut.

[D2d]

SUR UNE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DU DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE ORDINAIRE (1);

PAR M. FÉLIX KLEIN.

(Traduit de l'allemand par M. L. LAUGEL.)

Soit ω une grandeur réelle que, pour simplifier, je suppose irrationnelle; soit ensuite le développement en fraction continue ordinaire,

$$\omega = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cfrac{1}{\mu_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

---

(1) *Göttinger Nachrichten,* 19 octobre 1895.

Je désignerai les réduites successives par $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots,$ où les p, q doivent être définis comme des nombres sans diviseur commun, qui, du reste, peuvent être affectés, d'une manière quelconque, du signe $+$ ou du signe $-$. Je considère maintenant le système habituel de coordonnées X, Y et je forme le réseau correspondant de points nombres entiers; parmi eux, je recherche ceux pour lesquels $x, y = p_\nu, q_\nu$. On sait que ces *points d'approximation* (*näherungspunckte*) sont situés alternativement du côté droit et du côté gauche de la ligne droite $\frac{x}{y} = \omega$.

Mais il est extrêmement facile, comme je l'ai découvert, de présenter à ce sujet une courte interprétation géométrique.

J'envisagerai ici seulement celui des deux quadrants de notre système de coordonnées qui est partagé en deux parties par la droite ω. Ce quadrant sera décomposé, par ladite droite, en deux secteurs dont l'un est limité par l'axe X, l'autre par l'axe Y. Je les désignerai, pour abréger, sous les noms de *secteur* X et *secteur* Y.

On considérera maintenant les points nombres entiers de chaque secteur pris séparément.

Il est évident que nous pouvons les entourer par un contour polygonal rectiligne, par exemple en concevant que les points nombres entiers aient été marqués par des épingles, et que l'on ait alors entrelacé un fil entourant le tout. *Les points* p_1, q_1; p_3, q_3; ... *ne sont alors autre chose que les sommets du contour polygonal appartenant au secteur* Y; *les points* p_2, q_2; p_4, q_4; ... *appartiennent de même au secteur* X. Chaque côté du contour polygonal, par exemple le côté allant de $(p_{2\nu-1}, q_{2\nu-1})$ à $(p_{2\nu+1}, q_{2\nu+1})$ (pour nous en tenir au secteur Y), envisagé séparément, peut en outre, c'est possible, contenir des points nombres entiers. Le nombre des parties en lesquels ledit côté est ainsi décomposé, par ces points, est exactement égal à $\mu_{2\nu}$.

Telle est l'interprétation simple des quotients incomplets μ qui se présentent dans un développement en fraction continue.

En s'appuyant sur la représentation ci-dessus, l'on a une vue géométrique claire de toutes les propriétés du développement en fraction continue ordinaire et des méthodes analytiques qui en dérivent.

A ce point de vue, je vais ici donner quelques éclaircissements relatifs aux formes quadratiques binaires indéfinies [1].

Soit $f = ax^2 + bxy + cy^2$ une telle forme dont le discriminant $b^2 - 4ac$ n'est pas un nombre carré parfait. Alors $f = 0$ fournit deux valeurs réelles irrationnelles de $\frac{x}{y}$, que je désignerai par ω', ω''. Dans notre système de coordonnées, je mène alors les deux lignes droites considérées, et je construis ce que je nomme les *encadrements polygonaux naturels* correspondants, c'est-à-dire les contours polygonaux à sommets points nombres entiers qui sont chacun renfermés dans les secteurs ayant pour limites ω' et ω''. Chaque polygone de cette nature, envisagé séparément, peut, dans tout son cours, être comparé à une branche complète d'hyperbole (qui s'étend de *deux* côtés à l'infini). L'on peut maintenant affirmer en toute rigueur que *la théorie des formes f, due à Lagrange et Gauss, revient à l'étude de ces polygones,* et nous trouvons que *l'on peut encore, de différentes manières, simplifier cette*

---

[1] Dont les coefficients, bien entendu, sont des nombres entiers. (*Note du Traducteur.*)

théorie par l'introduction explicite de ces polygones.

Il est en outre avantageux, en s'appuyant sur la *détermination projective de la mesure* « Maasbestimmung » de Cayley ([1]), de désigner $\sqrt{f}$ comme étant la *distance* du point x, y à l'origine des coordonnées et de parler des *déplacements* correspondants (j'ai fait déjà allusion à ceci dans une Communication de janvier 1893). Je ne poursuivrai pas ce sujet plus longtemps; j'attirerai seulement encore l'attention sur le rôle que joue, dans cette théorie, le développement en fraction continue des racines ω', ω'' ([2]). Ici, cela revient à dire : les contours polygonaux dépendant des axes des coordonnées et tirant leur origine des développements en fraction continue, finissent nécessairement, après un nombre fini de côtés, par s'emboîter (ein-münden) en les contours polygonaux *naturels* dont nous venons de parler.

Jusqu'ici, nous avons indiqué seulement une interprétation géométrique ou encore une simplification de méthodes de traitement connues. Mais, ce qui est beau, c'est que notre indication s'étend à des cas plus élevés, non encore traités ainsi. Je considérerai ici par exemple deux types de formes ternaires. Soit $f(xyz)$ une forme quadratique indéfinie, tandis que $F(xyz)$ désignera une forme cubique décomposable en trois facteurs linéaires réels. Je construirai, dans le système habituel de coordonnées, le cône $f = 0$ et le triplet de plans $F = 0$; je considère alors tous les points nombres entiers ren-

---

([1]) Cayley, *Sixth Memoir on quantics. Collected math. Papers*, t. II, n° 158 et note *Ibid.*, p. 604. — Klein, *Math. Ann.*, t. IV; 1871, et *Bulletin* de M. Darboux, p. 341 : *Sur la Géométrie dite non euclidienne.* (*Note du Traducteur.*)

([2]) Dirichlet-Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4e édition, p. 174 et suivantes. (*Note du Traducteur.*)

fermés soit dans une moitié du cône $f = 0$, ou dans un des demi-quadrants de l'espace (octanten) formés par $F = 0$. Il est clair que, pour ces points nombres entiers, on peut, d'une façon analogue, construire un *encadrement polyédral à faces planes*. La considération de cet encadrement polyédral fournit une nouvelle théorie simple des formes f et F. Relativement à F un travail de M. Furtwangler paraîtra bientôt; quant aux formes f, elles seront traitées de la manière indiquée dans un Ouvrage sur les fonctions automorphes que je prépare en collaboration avec M. Fricke.

[K14d]

SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE RELATIVE AUX POLYÈDRES;

PAR M. R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

La mesure de la surface du triangle s'établit, en Géométrie plane, à l'aide de considérations très simple. Il n'en est pas de même pour la question analogue de la Géométrie de l'espace, relative au volume du tétraèdre. On sait en effet que l'on démontre l'équivalence de deux tétraèdres ayant même hauteur et des bases de même surface, en les décomposant en tranches parallèles infiniment minces, équivalentes deux à deux. Cette démonstration ressortit en réalité au Calcul infinitésimal.

On peut se demander si cette décomposition est nécessaire et s'il serait possible de montrer l'équivalence des deux tétraèdres en question par une voie plus élémentaire, ce qui serait intéressant au point de vue de la doctrine. L'étude de cette dernière question, que nous avons entreprise sur le conseil de notre ami M. Hoffbauer, lieutenant d'Artillerie, mène à cette conclusion qu'il faut se prononcer pour la négative.

Posons-nous le problème général suivant :

Étant donnés deux polyèdres équivalents, peut-on toujours décomposer l'un d'eux en un nombre fini *de polyèdres, qui, assemblés d'une manière différente, reconstituent le second polyèdre?*

Soit P un polyèdre quelconque, et p_1, p_2, p_3, ... les polyèdres en lesquels on le décompose par un certain nombre de plans arbitrairement tracés.

Les polyèdres p, assemblés différemment, constituent un nouveau polyèdre P'.

Dans le premier mode d'assemblage, ceux des dièdres des polyèdres p qui ont une arête commune ont pour somme un dièdre de P, ou π ou 2π. Dans le deuxième mode, la même somme a pour valeur un dièdre de P', π ou 2π.

En partant de cette remarque, on arrivera facilement à établir la congruence

$$mA + nB + \ldots + m'A' + n'B' + \ldots \equiv 0 \pmod{\pi},$$

A, B, ..., A', B', ... désignant les dièdres des polyèdres P et P', et m, n, ..., m', n', ... des entiers qui ne sont pas tous nuls. Cette conclusion subsiste si, parmi les polyèdres p, quelques-uns sont extérieurs aux polyèdres P et P', de manière que ces derniers soient égaux à leur somme algébrique.

Ainsi, pour que deux polyèdres soient susceptibles d'être transformés l'un en l'autre par une décomposition de chacun en un nombre fini de polyèdres, superposables deux à deux, il faut qu'une certaine fonction linéaire de leurs dièdres, à coefficients entiers, soit un multiple de deux angles droits.

Or l'équivalence de deux polyèdres n'entraîne en aucune façon une relation de ce genre. Le fait est à peu près évident; on peut s'en convaincre, si l'on veut, par l'examen d'un cube et d'un tétraèdre régulier équivalents ([1]).

La transformation en question sera donc impossible dans le cas général. Il en résulte que l'on ne peut établir l'équivalence de deux tétraèdres ayant même base et même hauteur, et ne satisfaisant pas à d'autre condition particulière, sans avoir recours à la décomposition en éléments infiniment petits.

Le problème analogue relatif à deux polygones équivalents est au contraire toujours possible. C'est un fait connu et dont la démonstration est aisée. Dans ce cas, le succès tient à ce que les sommes des angles de deux polygones diffèrent toujours d'un multiple de deux angles droits.

Pour les polyèdres, la relation que nous avons trouvée est nécessaire, mais elle n'est sans doute pas suffisante. Ce serait un problème intéressant, mais difficile, que de rechercher les conditions précises permettant la transformation qui nous occupe, et le moyen de réaliser cette transformation dans les cas où elle est possible.

Nous terminerons en montrant qu'elle peut se faire dans le cas de deux tétraèdres symétriques et par consé-

---

([1]) Le dièdre du tétraèdre régulier, dont le cosinus est égal à $\frac{1}{3}$, est en effet incommensurable avec π. S'il en était autrement, il existerait une équation binome ayant une racine égale à $\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{8}}{3}$, et dont le premier membre admettrait comme facteur le polynome $3x^2 - 2x + 3$, ce qui est impossible.

quent dans celui de deux polyèdres symétriques, que l'on peut décomposer en tétraèdres symétriques deux à deux.

Soient ABCD, A'B'C'D' deux tétraèdres symétriques. Décomposons le premier en 12 tétraèdres, au moyen de droites joignant le centre de la sphère circonscrite aux sommets et aux centres des cercles circonscrits aux faces. Effectuons la même décomposition sur le tétraèdre A'B'C'D'. Deux éléments correspondants de ABCD et A'B'C'D' sont superposables en même temps que symétriques, car ils possèdent un plan de symétrie.

BIBLIOGRAPHIE.

C. Bourlet, Docteur ès Sciences, professeur au lycée Henri IV. — *Leçons d'Algèbre élémentaire* (collection d'Ouvrages de Mathématiques élémentaires publiée sous la direction de M. Darboux). 1 vol. in-8°, XII-548 pages. Paris, A. Colin et Cie. Prix : 7fr 50c.

Les *Leçons d'Algèbre* de M. Bourlet forment le troisième Volume de la collection d'Ouvrages élémentaires, publiée sous la haute direction de M. Darboux, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences de Paris. Elles s'adressent aux élèves de la classe de Mathématiques élémentaires et contiennent, avec les Appendices, toutes les matières dont la connaissance est exigée pour l'admission à l'École de Saint-Cyr.

L'auteur a fait, dans ce Volume, quelques innovations. Il débute par l'exposition directe, détaillée, de la théorie des nombres négatifs. Cette théorie est précédée de quelques notions sur les segments portés par un axe, notions qui lui servent à alléger les démonstrations et à leur donner une forme plus concrète.

Dans l'étude des équations du premier degré, il a introduit quelques rudiments de Géométrie analytique qui sont d'une utilité incontestable pour éclairer la discussion de la résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues et qui préparent le lecteur à la représentation graphique de la variation d'une fonction.

Ce qu'il y a de plus caractéristique dans ce Livre, c'est l'exclusion systématique des méthodes dites *élémentaires,* pour étudier la variation d'une fraction rationnelle. M. Bourlet, fort de l'assentiment de M. Darboux, a résolument exposé la méthode des *dérivées.* Il s'est d'ailleurs borné, comme cela se conçoit, aux polynomes entiers, fractions rationnelles et irrationnelles du second degré, et il est parvenu ainsi à donner, en trois Chapitres assez brefs, tout ce qui est nécessaire pour étudier *avec rigueur* la variation d'une fonction simple de la nature de celles qu'on étudie en Élémentaires.

Il n'est pas parlé, dans le corps du Volume, des nombres *imaginaires.* L'auteur a considéré, avec juste raison, que la connaissance de ces nombres n'était nullement nécessaire aux élèves de Mathématiques élémentaires, proprement dits. Il a réservé l'Appendice I à cette étude et a adopté la belle méthode de M. Méray qui, quoiqu'un peu abstraite, est, sans nul doute, celle qui satisfait le mieux l'esprit au point de vue de la logique pure.

Ajoutons, en terminant, que le Livre contient de nombreux exercices, choisis avec un très grand soin et signés, pour la plupart, de noms célèbres dans la Science.

Exercices de Géométrie descriptive, par F. J., 3e édition. Tours et Paris, Mame et Poussielgue.

Après avoir rendu compte des *Exercices de Géométrie élémentaire* (1896, p. 245), nous croyons utile de dire aussi quelques mots des *Exercices de Géométrie descriptive,* car ce dernier Ouvrage, de degré plus élevé que le premier, est remarquable à plusieurs titres.

Dans une magistrale introduction de 120 pages, sous le nom de *Compléments et méthodes de Géométrie descriptive,* l'auteur passe en revue une foule de notions qu'on trouverait difficilement ailleurs, et dont plusieurs nous paraissent inédites; ne pouvant tout citer, bornons-nous à signaler le Chapitre IV : *Généralisation des solutions* (p. 68 à 112); les problèmes classiques relatifs aux quadriques, pour déterminer les points d'intersection d'une droite et les plans tangents menés par une droite, y sont traités dans toute leur généralité, et par diverses méthodes dont plusieurs sont d'une rare élégance. Les Exercices proprement dits sont très variés et bien classés; plusieurs sont enrichis de notes fort intéressantes. Les questions nouvelles ou peu connues sont nombreuses et se trouvent notamment dans le *Chapitre complémentaire* de la droite et du plan (p. 313) et dans la seconde Partie de l'Ouvrage : *Sections planes* et autres *Intersections des surfaces* (p. 492, 614).

Une Table analytique très complète facilite les recherches et montre la richesse de l'Ouvrage; enfin, la partie matérielle, gravures et impression, si importante en Géométrie descriptive, ne laisse rien à désirer; en un mot, elle répond aux autres qualités du remarquable Travail que nous venons d'analyser.

Gino Loria, Professeur à l'Université de Gênes. — *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche.* 1 vol. in-8°, 346 pages. Torino, Carlo Clausen. Prix : 8 fr.

Cet Ouvrage considérable et d'une profonde érudition rappelle l'*Aperçu historique* de Chasles, et il en est, en quelque sorte, le prolongement. D'une lecture extrêmement captivante, il fourmille de renseignements précieux sur tout ce qui concerne, ainsi que son titre l'indique, le passé et le présent de la Géométrie. A ce titre, il mérite de figurer dans les bibliothèques de ceux qui s'intéressent aux progrès de la Géométrie moderne et qui tiennent à être exactement renseignés sur l'état actuel de cette Science.

Nous signalons particulièrement à l'attention de nos lecteurs le Chapitre I intitulé : « Coup d'œil sur les origines et le développement de la Géométrie jusque vers 1850. » Ce coup d'œil est donné de main de maître et la lecture du Chapitre est tout ce qu'il y a de plus attrayant. Voici, du reste, l'énumération des autres Chapitres :

Théorie des courbes planes algébriques. — Théorie des surfaces algébriques. — Théorie des courbes algébriques à double courbure. — Géométrie différentielle. — Recherches sur la forme des courbes, des surfaces et des autres figures géométriques. Analysis situs. Configurations. — Géométrie de la droite dans l'espace. — Correspondances, représentations et transformations. — Géométrie énumérative. — Géométrie non euclidienne. — Géométrie des espaces à autant de dimensions que l'on veut. — Épilogue. X. A.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, SECTION DES SCIENCES. CONCOURS DE 1896.

Mathématiques.

I. On considère une courbe plane telle que les coordonnées rectangulaires d'un quelconque de ses points s'expriment au moyen du paramètre t par les formules

$$x = at^3 + bt^2 + ct, \qquad y = t^2.$$

Quels doivent être les coefficients a, b, c pour que les cosinus directeurs de la tangente en un point quelconque de la courbe soient des fonctions rationnelles de t? Démontrer que toutes les courbes que l'on obtient ainsi sont semblables et semblablement placées.

II. Évaluer, pour l'une d'elles, la longueur de la boucle située au-dessous du point double.

III. Considérant, en particulier, la courbe (C) que représentent les formules

$$x = t - \frac{t^3}{3}, \qquad y = t^2,$$

on lui mène deux tangentes parallèles, de coefficient angulaire m : Déterminer, en fonction de m, les coordonnées du point où la courbe (C) est rencontrée par la droite qui joint les points de contact de ces deux tangentes, et trouver l'enveloppe (E) de cette même droite, variable avec m.

IV. Former les équations des tangentes menées à la courbe (E) par un point A_0 de la courbe (C), correspondant à la valeur t_0 du paramètre t. Quelle est celle de ces droites qui rencontre la courbe (C), abstraction faite de A_0, en deux points où les tangentes sont parallèles?

V. Dans l'espace, on considère la courbe (K) définie par les équations

$$x = z - \frac{z^3}{3}, \qquad y = z^2,$$

ainsi que les cylindres (S) et (S') qui la projettent respectivement sur les plans des xy et des xz. Ces deux cylindres se coupent suivant une autre courbe (K'). Former l'équation du cylindre qui projette (K') sur le plan des yz.

VI. Trouver le lieu des points d'intersection des tangentes à la courbe (K') en deux points situés sur une même génératrice du cylindre (S'). On figurera la projection de ce lieu sur le plan des yz.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE. — CONCOURS DE 1896.

Composition de Mathématiques.

On donne un cercle C qui a pour équations, en coordonnées rectangulaires, $x = a$ et $y^2 + z^2 = a^2$. On considère : 1° le cône S qui a pour base ce cercle et pour sommet le point de l'axe Oz qui est à la distance λa de l'origine; 2° la surface S_1 engendrée par des droites parallèles au plan des xy, et qui s'appuient sur l'axe Oz et sur le cercle donné.

On demande :

I. De former les équations des deux surfaces S et S_1 ;

II. De trouver l'expression du sinus de l'angle des plans tangents aux deux surfaces en un point du cercle qui a pour côté $z = \mu a$ et de calculer ce sinus, avec 3 décimales seulement, pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

III. De déterminer l'intersection des deux surfaces; d'en construire deux projections pour $\lambda = \frac{1}{2}$; d'en suivre les principales transformations quand λ varie de o à l'infini.

Épure.

On donne : 1° un paraboloïde de révolution à axe vertical, ayant son foyer à 57^{mm} au-dessous du sommet, lequel a ses projections horizontale et verticale à 170^{mm} et à 375^{mm} au dessus du bord inférieur de la feuille, et à 220^{mm} du bord gauche; 2° un cône de révolution, dont une section méridienne se compose de deux lignes droites : l'une, parallèle aux deux plans de projection et passant par le sommet du paraboloïde; l'autre verticale se projetant à 100^{mm} du bord gauche de la feuille. On ne considérera que la nappe de ce cône qui se projette verticalement au-dessous de la première des deux lignes indiquées et à droite de la seconde.

La courbe d'intersection de ce cône et du paraboloïde sert de directrice à un second cône ayant même sommet que le paraboloïde.

On demande de représenter, par ses projections, le solide commun aux deux cônes supposés pleins, et limités inférieurement par un plan horizontal H, situé à 54^{mm} au-dessous de leurs sommets.

On tracera en traits pleins noirs les lignes d'intersection des deux cônes et du plan H.

On indiquera en traits rouges le contour apparent vertical du paraboloïde et la construction : 1° des points les plus hauts et les plus bas de la courbe d'intersection des deux cônes limitée au plan H; 2° d'un point de la trace du cône de révolution sur le plan H et de la tangente en ce point.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1707.

(1896, p. 55).

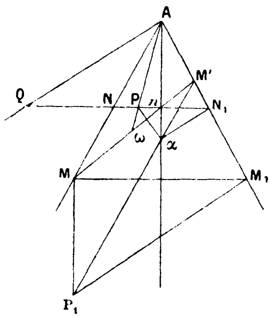
Les courbes (M) *et* (M′) *sont caustiques réciproques par rapport à la courbe* (A), *c'est-à-dire que les tangentes* MA *et* M′A *aux courbes* (M) *et* (M′) *font des angles égaux avec la normale* Aα *en* A *à la courbe* (A), α *étant le centre de* *courbure correspondant. La perpendiculaire abaissée de* M *sur* $A\alpha$ *coupe* AM' *en* M_1. *Démontrer que la perpendiculaire élevée en* M *à* MM_1 *et la perpendiculaire élevée en* M_1 *à* AM_1 *se coupent sur la droite* $\alpha M'$, *ce qui permet de construire le point* M' *lorsque* M *et* α *sont connus.*

Corollaire. — *Si la courbe* (A) *est une conique de foyers* M *et* M', *ce théorème fait connaître le centre de courbure* α *répondant au point* A *de la conique.* (M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. E. Duporcq.

Si l'on remplace la courbe (A) par une autre courbe osculatrice à la première au point A, le point M' ne changera évi-



demment pas sur la droite AM' : en choisissant comme courbe (A) la conique de foyer M qui passe par A et admet α comme centre de courbure correspondant, on voit que la démonstration de la question revient à celle du corollaire qui en termine l'énoncé.

Soit donc P_1 le point où se coupent la perpendiculaire élevée en M à MM_1 et la perpendiculaire élevée en M_1 à AM_1 : nous voulons montrer que la droite P_1M' et la perpendiculaire $A\alpha$ à MM_1 ont pour point de concours α, le centre de courbure répondant au point A de la conique de foyers M et M' normale en A à $A\alpha$. Soient ω le milieu de MM', n le point où $A\alpha$ coupe MM', enfin N, N_1, P et Q les points où la parallèle à MM_1 menée par n coupe respectivement les droites AM, AM_1, $A\omega$ et la parallèle menée par A à MM'. Les triangles MP_1M_1 et $n\alpha N_1$

étant homothétiques par rapport au point M′, on voit que N_1 est la projection de α sur AM_1. D'ailleurs, les points P et Q sont conjugués harmoniques par rapport aux points N et N_1; on a donc

$$\overline{nP}\,\overline{nQ} = \overline{nN}\,\overline{nN_1} = -\overline{nN_1}^2 = \overline{n\alpha}\,\overline{nA}.$$

L'égalité des termes extrêmes montre que P est l'orthocentre du triangle $A\alpha Q$. Par suite, αP est perpendiculaire à MM′. La détermination du point α au moyen des droites ωA, nP et $P\alpha$ est une construction connue du centre de courbure de la conique de centre ω, d'axe MM′, normale en A à An. Le théorème en résulte.

Remarque. — La construction du point M′ se simplifie ainsi : N étant la projection de α sur AM, et n celle de N sur $A\alpha$, la droite MM′ passe par n.

Question 1708.

(1896, p. 55.)

Soit M *le pied de la perpendiculaire abaissée du point fixe* O *sur la tangente en* A *à la courbe* (A). *Le point* M *décrit la podaire* (M) *de la courbe* (A) *pour le point* O. *La perpendiculaire élevée en* O *à* OM *coupe la normale en* A *à la courbe* (A) *au point* m. *On sait que* Mm *est la normale à la podaire* (M).

Soient, en outre, α *et* μ *les centres de courbure des courbes* (A) *et* (M) *répondant aux points* A *et* M.

On a les théorèmes suivants :

I. *Si la perpendiculaire élevée à* OA *au point* O *coupe* $A\alpha$ *au point* B, *et si* MB *coupe* $O\alpha$ *au point* D, *la droite* AD *passe par* μ.

II. *Si la perpendiculaire élevée à* Mm *en* m *coupe* OM *au point* H, *la droite qui joint le point* H *au milieu* I *de* $O\alpha$ *passe par* μ.

III. *Si* J *est le pied de la perpendiculaire abaissée de* α *sur* OM, K *le pied de la perpendiculaire abaissée de* J *sur* Mm, L *le pied de la perpendiculaire abaissée de* K *sur* $A\alpha$, *la droite* OL *passe par* μ.

Le théorème I *a été démontré par M. Husquin de Rhéville dans les* Nouvelles Annales (3e série, t. IX, p. 142). *J'ai obtenu les théorèmes* II *et* III *par des voies absolument différentes. Je propose ici de déduire ces deux théorèmes du précédent.* (M. d'Ocagne.)

SOLUTION (¹)
par M. E. Duporcq.

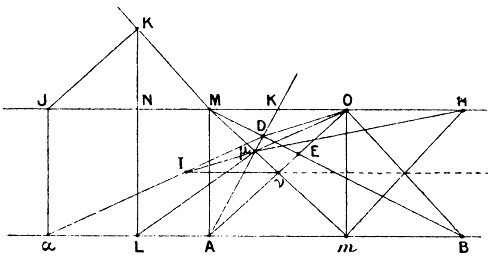
II. Les points μ et α se correspondant de manière que la propriété I soit satisfaite, il s'agit de prouver que le point I, où se coupent OD et Hμ, est le milieu de Oα. Je désigne par ν et E les points d'intersection de OA avec Mm et MB. Évidemment

$$(\mathrm{M}\mu\nu m) = (\mathrm{MDEB}),$$

d'où

$$\mathrm{H}(\mathrm{M}\mu\nu m) = \mathrm{O}(\mathrm{MDEB}).$$

Les rayons HM et OM coïncidant, les intersections des autres rayons conjugués sont en ligne droite : le point I est



donc sur la droite qui joint V au point commun à OB et mH. La propriété à démontrer en résulte.

III. Il s'agit de prouver que le point L, où Oμ coupe AB est la projection de K sur cette droite, ou encore, en désignant par N la projection de K sur MJ, il faut prouver que

$$\frac{\mathrm{LA}}{\mathrm{L}\alpha} = \frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{NJ}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OH}}.$$

Or, soit K le point où AD coupe OM; on a

$$\frac{\mathrm{LA}}{\mathrm{L}\alpha} = \mathrm{O}(\mathrm{AD}\mu\mathrm{K}) = \mathrm{M}(\mathrm{AD}\mu\mathrm{K}) = \frac{m\mathrm{A}}{m\mathrm{B}},$$

C. Q. F. D.

(¹) La proposition I est déjà démontrée, comme le rappelle l'énoncé de la question.

Question 1718.

(1896, p. 151.)

$f(z)$ désignant un polynome entier en z, on a l'égalité

$$2i\pi[f(x)-f(0)] = \int f'(z) \mathrm{L} z \, dz,$$

$f'(z)$ désignant la dérivée de $f(z)$ et l'intégrale étant prise dans le sens positif le long d'un contour fermé C simple, partant du point x pour y revenir après avoir entouré l'origine O. (C. Bourlet.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Décrivons du point x un lacet dont l'entrée est en x et la boucle un cercle de rayon ε infiniment petit enveloppant l'origine O. L'intégrale prise le long du contour C et du lacet sera nulle, car il n'existe dans le champ ainsi délimité aucun point critique de la fonction $f'(z) \mathrm{L} z \, dz$.

Précisons maintenant la valeur de l'intégrale sur chacune des branches de ce parcours. Désignons par A sa valeur prise de x à o dans le sens direct, le long de la branche rectiligne du lacet au-dessus de la droite xO. Le point z, après avoir contourné l'origine, revient en x sur la branche rectiligne inférieure du lacet, dans le sens inverse. Mais après que z a tourné autour de O, $\mathrm{L}z$ a crû de $2\pi i$; donc l'intégrale sur la deuxième branche du lacet sera $-\mathrm{A} - 2\pi i \int_x^0 f'(z)\, dz$. Quant à sa valeur I sur le petit cercle, elle est nulle. En effet, en posant $z = \Sigma e^{\theta i}$, on aura

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} f'(\varepsilon e^{\theta i})(\mathrm{L}\varepsilon + \theta i)\, \varepsilon e^{\theta i} i \, d\theta = 0,$$

car à la limite $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon \mathrm{L} \varepsilon = 0$.

Finalement, on a l'équation

$$0 = \mathrm{A} + \mathrm{I} - \mathrm{A} - 2\pi i \int_x^0 f'(z)\, dz - \int_c f'(z) \mathrm{L} z \, dz,$$

d'où

$$\int_c f'(z) \mathrm{L} z \, dz = 2\pi i [f(x) - f(0)].$$

Remarque sur la question 1644 ([1]).

Pour résoudre cette question, il suffisait de dire :

La normale en A rencontre de nouveau la parabole en B. Le diamètre qui passe par le pôle C de AB coupe ce segment en son milieu F. On a alors $\frac{CA}{AF} + 2\frac{CB}{AB}$. Donc, etc. Z.

QUESTIONS.

1733. Étant donné un cercle dont le diamètre AC est vertical, deux points pesants partent du repos en A et en B, et décrivent les deux cordes complémentaires AB, BC ; les deux mobiles seront sur une même verticale au bout d'un temps indépendant de la position du point B sur la circonférence.

(B. Niewenglowski.)

1734. Si $n-1$ et $n+1$ sont deux nombres premiers plus grands que 5, n est nécessairement de la forme $n = 30m$, ou de la forme $n = 30m \pm 12$, et $n^2(n^2+16)$ est toujours divisible par 720. (Wolstenholme.)

1735. Si $n-2$ et $n+2$ sont deux nombres premiers plus grands que 5, n est nécessairement de la forme $n = 30m + 15$, ou de la forme $n = 30m \pm 9$. (Wolstenholme.)

1736. n étant un nombre entier, $3^{2n+2} - 8n - 9$ est toujours divisible par 64. (Wolstenholme.)

1737. n étant un nombre entier, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est toujours divisible par 7. (Wolstenholme.)

1738. Huit points étant donnés sur un plan, il existe 75 points tels qu'en les joignant aux huit points donnés, on obtienne des faisceaux en involution. (Ed. Dewulf.)

([1]) *Voir* p. 147.

[B2]

EXPOSÉ D'UNE THÉORIE NOUVELLE DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES;

PAR M. H. LAURENT.

I. — PRÉLIMINAIRES.

J'appelle *substitution linéaire* l'opération qui a pour but de remplacer des variables par des fonctions linéaires et homogènes de nouvelles variables.

Une substitution linéaire pourra donc se représenter au moyen des formules

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \ldots + \alpha_{nn}x_n, \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignant des variables, α_{ij} des coefficients constants, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de nouvelles variables.

Le déterminant $\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}$ est dit le *déterminant de la substitution;* le nombre n des variables x ou y est le *degré* de la substitution.

Considérons la fonction linéaire des τ_{ij}

$$(2)\qquad s = \Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij},$$

nous dirons que cette fonction s représente la substitution (1), et, en effet, à chaque substitution (1) correspond une et une seule fonction linéaire telle que (2), et *vice versa*. Les τ_{ij} seront des imaginaires ou des clés assujetties aux relations

$$(3)\qquad \begin{cases} \tau_{ij} \times \tau_{kl} = 0 \quad \text{si} \quad j \gtrless k, \\ \tau_{ij} \times \tau_{jl} = \tau_{il}, \end{cases}$$

Il résulte de là que, si $s = \Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$ et $t = \Sigma \beta_{ij} \tau_{ij}$ représentent deux substitutions, $s + t$ représentera une substitution que nous pouvons appeler la *somme* des deux premières, et $\Sigma(\alpha_{ij} + \beta_{ij})\tau_{ij}$ sera la substitution

$$\begin{gathered}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_p = (\alpha_{p1} + \beta_{p1})x_1 + \dots + (\alpha_{pn} + \beta_{pn})x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{gathered}$$

On appelle *produit de deux substitutions* s et t la substitution équivalente à la substitution s suivie de t ou *vice versa;* ce produit dépend d'ailleurs de l'ordre dans lequel on effectue les substitutions : st est le résultat obtenu en effectuant d'abord t, puis s.

Si l'on appelle s la substitution (1) ou $\Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$, et t la substitution

$$\begin{gathered}z_1 = \beta_{11} y_1 + \beta_{12} y_2 \dots + \beta_{1n} y_n, \\ z_2 = \beta_{21} y_1 + \beta_{22} y_2 \dots + \beta_{2n} y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{gathered}$$

on aura

$$\begin{aligned} z_i = \quad & x_1(\beta_{i1}\alpha_{11} + \beta_{i2}\alpha_{21} \dots + \beta_{in}\alpha_{n1}) \\ & + x_2(\beta_{i1}\alpha_{12} + \beta_{i2}\alpha_{22} \dots + \beta_{in}\alpha_{n2}) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + x_j(\beta_{i1}\alpha_{1j} + \beta_{i2}\alpha_{ij} \dots + \beta_{in}\alpha_{nj}) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

cette substitution sera la substitution ts représentée par

$$(4) \qquad \Sigma(\beta_{i1}\alpha_{ij} + \beta_{i2}\alpha_{2j} \dots + \beta_{in}\alpha_{nj})\tau_{ij};$$

or, si l'on effectue le produit

$$\Sigma \beta_{ij}\tau_{ij} \times \Sigma \alpha_{ij}\tau_{ij},$$

en tenant compte des relations (3), on trouve précisément le résultat (4). Donc *le produit de deux substitutions est représenté par le produit des fonctions linéaires qui représentent ces substitutions.*

II. — Des fonctions de substitutions.

Si l'on donne plusieurs substitutions s, t, u, ..., les notations $s+t$, $s+t+u$, st, ts, stu, ... sont bien définies d'après ce qui précède, la notation $s-t$ se comprend d'elle-même.

La substitution

$$\tau_{11}+\tau_{22}+\ldots+\tau_{nn}$$

joue le rôle de l'unité, elle remplace x_1 par x_1, x_2 par x_2, ... ; d'ailleurs

$$\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}(\tau_{11}+\tau_{22}\ldots+\tau_{nn})=\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij};$$

nous poserons donc

$$\tau_{11}+\tau_{22}\ldots+\tau_{nn}=1,$$

et 1 sera le symbole de la substitution de nul effet; de même, a étant un nombre, on pourra poser

$$a=a\tau_{11}+a\tau_{22}\ldots+a\tau_{nn},$$

car

$$(a\tau_{11}+a\tau_{22}\ldots)\times\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}=\Sigma a\alpha_{ij}\tau_{ij};$$

les symboles $a+bs+ct+\ldots$ sont donc maintenant bien définis et représentent des substitutions. Les formules

$$s^0=1,\qquad s^1=s,\qquad s^2=s\times s,\qquad s^3=s\times s\times s,\qquad\ldots$$

serviront à définir s^0, s^1, s^2, s^3, ..., et alors $f(x)$ désignant un polynome entier en x, $f(s)$ sera bien défini et représentera une substitution.

Il faut remarquer que τ_{ij} représente une substitution dite *élémentaire*, qui remplace x_i par x_j et les autres variables par zéro.

Les substitutions de la forme $a+b\tau_{ij}$ sont dites *primaires*.

III. — Décomposition d'une substitution en facteurs primaires.

Si l'on multiplie une substitution $\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$, dont le déterminant est

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

par la substitution primaire $1 + p\tau_{ij}$, elle devient

$$\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij} + p(\alpha_{1i}\tau_{1j} + \alpha_{2i}\tau_{2j} \ldots + \alpha_{ni}\tau_{nj});$$

cette multiplication a pour effet de remplacer, dans le Tableau (1), la colonne $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj}$ par $\alpha_{1j} + p\alpha_{1i}$, $\alpha_{2j} + p\alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{nj} + p\alpha_{ni}$. La multiplication est censée effectuée à droite par $(1 + p\tau_{ij})$; si l'on multipliait à gauche, on obtiendrait un résultat analogue, dans lequel les lignes joueraient le rôle qu'avaient joué tout à l'heure les colonnes.

Il résulte de là que, en multipliant la substitution $\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$ successivement à droite par des facteurs primaires, on fera prendre la forme

$$\begin{matrix} p_{11}\alpha_{11} + p_{21}\alpha_{12} \ldots + p_{n1}\alpha_{1n}, & p_{12}\alpha_{11} + \ldots p_{n2}\alpha_{1n}, & \ldots, \\ p_{11}\alpha_{21} + p_{21}\alpha_{22} \ldots + p_{n1}\alpha_{2n}, & p_{12}\alpha_{21} + \ldots p_{n2}\alpha_{2n}, & \ldots, \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

à son déterminant, en sorte que, si l'on prend $\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij} = 1$, on voit que la substitution $\Sigma p_{ij}\tau_{ij}$, dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

peut s'obtenir en multipliant entre elles des substitutions primaires de la forme $a + b\tau_{ij}$, et il est visible que la substitution $\Sigma p_{ij}\tau_{ij}$ est quelconque; donc *toute substitution est décomposable en facteurs primaires.*

IV. — Équation caractéristique.

Posons

$$z_1 = \gamma_1\tau_{11} + \gamma_2\tau_{12} \ldots + \gamma_n\tau_{1n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$z_i = \gamma_1\tau_{i1} + \gamma_2\tau_{i2} \ldots + \gamma_n\tau_{in},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$s = \Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij},$$

on aura

$$sz_1 = (\alpha_{11}\tau_{11} + \alpha_{21}\tau_{21} \ldots)\gamma_1 + (\alpha_{11}\tau_{12} + \alpha_{21}\tau_{22} \ldots)\gamma_2 + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$sz_1 = \alpha_{11}(\gamma_1 z_{11} + \gamma_2\tau_{12} \ldots) + \alpha_{21}(\gamma_1\tau_{21} + \gamma_2\tau_{22} \ldots) \ldots$$

ou

$$sz_1 = \alpha_{11}z_1 + \alpha_{21}z_2 + \ldots \alpha_{n1}z_n,$$

en sorte que l'on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} (\alpha_{11} - s)z_1 + \quad \alpha_{21} \quad z_2 + \ldots + \alpha_{n1}z_n = 0, \\ \quad \alpha_{12} \quad z_1 + (\alpha_{22} - s)z_2 + \ldots + \alpha_{n2}z_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

désignons par $f(s)$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n} - s & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - s & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

on déduit des équations (1)

$$f(s)z_1 = 0, \qquad f(s)z_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f(s)z_n = 0.$$

Or $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ sont quelconques, en les remplaçant par $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}$, puis par $\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2n}, \ldots$, en appelant z_{i1}, z_{i2}, ... ce que devient alors z_i, on a

$$f(s)z_{11}=0, \qquad f(s)z_{22}=0, \qquad \ldots,$$

et, par suite,

$$f(s)(z_{11}+z_{22}+\ldots+z_{nn})=0.$$

Or, $z_{11}+z_{22}+\ldots$ est une substitution quelconque égale à 1, si l'on veut; donc

$$f(s)=0.$$

Donc toute substitution de degré n satisfait à une équation de même degré que l'on appelle son équation caractéristique.

Le terme constant de l'équation caractéristique n'est autre chose que le déterminant de la substitution. Une substitution peut satisfaire à une autre équation qu'à son équation caractéristique; si cette équation est de degré inférieur à n, on dit que la substitution est *singulière;* au contraire, une substitution est *normale* quand elle ne satisfait à aucune équation de degré inférieur à son degré.

Il est évident, d'après la définition du produit de deux substitutions, que le déterminant d'un produit de substitutions est égal au produit des déterminants de ces substitutions.

Si l'on considère une équation de la forme

$$st=0,$$

où s et t sont deux substitutions, il n'en résulte pas nécessairement $s=0$ ou $t=0$, mais il faut que le déterminant de s ou de t soit nul.

Cela posé, supposons que $f(s)=0$ soit l'équation caractéristique de s, supposons que s satisfasse à une autre équation $\varphi(s)$ de degré égal ou supérieur à n, degré de s. Soit $\theta(s)$ le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et $\varphi(x)$, s satisfera à $\theta(s) = 0$. Ainsi l'on aura

$$\theta(s) = 0.$$

Donc, si la substitution s n'est pas normale, elle satisfait à une équation $\theta(s) = 0$ où $\theta(s)$ est un diviseur de $f(s)$, $f(s)$ désignant le premier nombre de son équation caractéristique.

Dans le cas où la substitution s n'est pas normale, son équation caractéristique n'est pas irréductible.

Il est facile de voir en effet que $\theta(s)$ est à coefficients commensurables avec les α_{ij}. Soit

$$\theta(s) = s^p + A_1 s^{p-1} + \ldots + A_p.$$

On peut poser

$$s = \Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}, \qquad \ldots, \qquad s^q = \Sigma \alpha_{ij}^{(q)} \tau_{ij}, \qquad \ldots,$$

alors

$$\theta(s) = \Sigma \tau_{ij} \left(\alpha_{ij}^{(p)} + A_1 \alpha_{ij}^{(p-1)} + \ldots \right);$$

mais comme $\theta(s) = 0$, on aura

$$\alpha_{ij}^{(p)} + A_1 \alpha_{ij}^{p-1} + \ldots = 0;$$

ce qui montre que les A sont fonctions rationnelles des $\alpha_{ij}^{(q)}$ et, par suite, des α_{ij}. Donc $f(s) = 0$ n'est pas irréductible si $\theta(s)$ existe, c'est-à-dire si s n'est pas normale.

V. — Fonctions rationnelles d'une substitution.

Étant donnée une substitution $s = \Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$, il existe une autre substitution $s^{-1} = \Sigma \beta_{ij} \tau_{ij}$ telle que

$$s \times s^{-1} = s^{-1} \times s = 1,$$

pourvu que le déterminant de s ne soit pas nul.

En effet

$$s.s^{-1} = \Sigma\tau_{ij}(\alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \ldots),$$

et si l'on veut que $ss^{-1} = 1$, il faudra poser

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{n1} = 1, \\ &\alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{n1} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et les valeurs de β sont bien déterminées si $\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}, \ldots$ n'est pas nul ; on trouve d'ailleurs

$$s^{-1} = \frac{1}{D}\sum \frac{\partial D}{\partial \alpha_{ij}}\tau_{ij},$$
$$D = \Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn}.$$

Deux substitutions s, t sont dites *échangeables* quand $st = ts$; s^{-1} et s sont donc échangeables, deux fonctions entières de s sont échangeables.

Si s est échangeable avec t, s^α le sera aussi, s^{-1} et ses puissances $s^{-\alpha}$ aussi.

En effet, si

$$st = ts,$$

on a

$$sts = tss,$$

ou

$$s^2 t = ts^2,$$
$$\ldots\ldots$$

On a de même

$$sts^{-1} = tss^{-1} = t,$$

et en multipliant à gauche par s^{-1}

$$ts^{-1} = s^{-1}t.$$

Si s et t sont échangeables, on peut poser

$$ts^{-1} = s^{-1}t = \frac{t}{s}.$$

Le symbole $\frac{f(s)}{\varphi(s)}$, où f et φ sont des polynomes entiers, est alors bien défini, pourvu que le déterminant de $\varphi(s)$ ne soit pas nul.

Toute fonction entière d'une substitution de degré n est égale à une fonction de degré $n-1$ au plus.

En effet, toute fonction entière $F(s)$ de s donne lieu à une identité de la forme

$$F(s) = Q f(s) + R(s),$$

où $f(s)$ est le premier membre de l'équation caractéristique (ou de l'équation de degré moindre à laquelle s satisfait) et où $R(s)$ est de degré inférieur à $f(s)$ (est de degré $n-1$ au plus); et comme $f(s) = 0$, on a

$$F(s) = R(s) \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il résulte de là que si ν est le degré de l'équation de degré minimum à laquelle s satisfait ($\nu = n$, si s est normale) et si l'on a

$$A_0 s^{\nu-1} + A_1 s^{\nu-2} + \ldots = 0,$$

il faut que

$$A_0 = A_1 = \ldots = 0.$$

Toute fonction rationnelle $\frac{f(s)}{\varphi(s)}$ d'une substitution s de degré n peut se mettre sous une forme entière (de degré $n-1$ au plus, d'après ce que l'on vient de voir).

En effet, soit $f(s) = 0$ l'équation caractéristique de s. Il existe des polynomes $\theta(s)$ et $\varpi(s)$ tels que

$$\theta(s)\psi(s) + \varpi(s) f(s) = 1,$$

ou comme $f(s) = 0$, tels que

$$\theta(s) = \frac{1}{\psi(s)};$$

donc

$$\frac{\varphi(s)}{\psi(s)} = \theta(s)\varphi(s). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

VI. — Substitutions de déterminant nul.

Aux substitutions de déterminant nul ne correspondent pas de changements de variables proprement dits, et il n'y aurait pas lieu de les étudier si elles n'étaient pas de précieux auxiliaires dans les calculs.

Cherchons d'abord dans quelles conditions le produit de deux substitutions s et t peut être nul.

Soit

$$s = \Sigma \alpha_{ij}\tau_{ij}, \qquad t = \Sigma \beta_{ij}\tau_{ij}.$$

En égalant le produit st à zéro, on a n^2 équations telles que

$$(1) \qquad \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{nj} = 0,$$

et si l'on considère les α_{ij} comme des inconnues, plusieurs cas peuvent se présenter.

1° On peut satisfaire à l'équation $st = 0$ en prenant tous les α nuls, c'est-à-dire en supposant $s = 0$; et l'on ne pourra y satisfaire autrement si le déterminant $B = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots, \beta_{nn}$ n'est pas nul.

2° Supposons $B = 0$, sans autre condition entre les β_{ij}. Les équations (1) se partageront en n groupes dans lesquels les rapports de $n-1$ inconnues à la $n^{\text{ième}}$ seront déterminés; ces groupes seront

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{11}, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1}, \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{n2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}$$

et comme pour chaque groupe les coefficients seront les mêmes, on aura

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} = \ldots = \frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{n2}} \ldots,$$

tous les mineurs du second degré du déterminant A de s seront nuls.

3° Supposons que non seulement B soit nul, mais que ses mineurs soient nuls sans autre condition entre les β_{ij}. Les groupes d'équations contenus dans le type (1) se réduiront à des groupes de $n - 2$ équations distinctes, deux des inconnues déterminent les autres, et, comme les n groupes ont les mêmes coefficients, les mineurs du troisième degré de A sont nuls.

En continuant cette discussion, on voit que, en général, si les mineurs d'ordre p de t sont nuls, les mineurs de degré $p + 2$ de s devront être nuls.

Considérons maintenant un système de n^2 quantités

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n}, \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}$$

dont le déterminant $\Sigma \pm x_{11} x_{22} \ldots = \mathrm{X}$ ne soit pas nul ; posons

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \dfrac{1}{\mathrm{X}} \sum \tau_{ij}\, x_{i1} \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{j1}}, \\ \xi_2 = \dfrac{1}{\mathrm{X}} \sum \tau_{ij}\, x_{i2} \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{j2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_n = \dfrac{1}{\mathrm{X}} \sum \tau_{ij}\, x_{in} \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{jn}}. \end{array} \right.$$

Il est facile de voir que l'on aura

$$\xi_p \xi_q = \frac{1}{\mathrm{X}^2} \left(x_{1p} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1q}} + x_{2p} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2q}} + \ldots \right) \sum \tau_{ij}\, x_{ip} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{jq}};$$

donc

$$(2) \qquad \xi_p \xi_q = \begin{cases} 0 & \text{si } p \gtrless q, \\ 1 & \text{si } p = q. \end{cases}$$

On a ensuite en ajoutant (1)

$$(3) \qquad \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = 1.$$

Les substitutions ξ sont telles que, si a_1, a_2, ... désignent des nombres, l'égalité

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \ldots + a_n \xi_n = 0$$

entraîne $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, car en la multipliant par ξ_1, en vertu de (2) on a

$$a_1 \xi_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad a_1 = 0.$$

Cela posé, nous pouvons maintenant démontrer qu'il existe des substitutions normales et des substitutions singulières. D'abord si s_1, s_2, ..., s_n sont des nombres différents entre eux,

$$s = s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2 + \ldots + s_n \xi_n$$

sera une substitution normale; en effet, si l'on pose $(x - s_1)(x - s_2)\ldots(x - s_n) = f(x)$, on aura d'abord en vertu de (1)

$$s^2 = s_1^2 \xi_1 + \ldots + s_n^2 \xi_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$s^p = s_1^p \xi_1 + \ldots + s_n^p \xi_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f(s) = f(s_1)\xi_1 + f(s_2)\xi_2 + \ldots + f(s_n)\xi_n,$$

donc $f(s) = 0$, et s a pour équation caractéristique $f(s) = 0$; si elle pouvait satisfaire à une autre équation de degré $p \leqq n$, $\varphi(s) = 0$, comme

$$\varphi(s) = \varphi(s_1)\xi_1 + \ldots + \varphi(s_n)\xi_n = 0,$$

il faudrait que $\varphi(s_1) = \varphi(s_2) = \ldots = 0$, ce qui est absurde.

Au contraire, si les quantités $s_1, s_2, \ldots$ ne sont pas toutes différentes, si, par exemple, $s_1 = s_2$, la substitution $s = \Sigma s_i \xi_i$ sera singulière, car elle satisfera à l'équation $(x - s_1)(x - s_2)\ldots(x - s_n) = 0$.

Nous pouvons donc former à volonté des substitutions normales ou singulières.

VII. — Pivots d'une substitution.

Considérons maintenant la substitution $\Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$ ou

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n &= \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n, \end{aligned}$$

si nous posons

$$y_1 = k x_1, \qquad y_2 = k x_2, \qquad \ldots, \qquad y_n = k x_n,$$

nous trouvons

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} (\alpha_{11} - k) x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n &= 0, \end{aligned} \right.$$

de ces équations on tire d'abord

$$f(k) = 0;$$

et $f(k) = 0$ est l'équation caractéristique de s_1. Soient $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ses racines, en les mettant successivement à la place de k dans (1), on en déduit pour les rapports $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de n valeurs.

Soient

$$x_{1i}, \quad x_{2i}, \quad \ldots, \quad x_{ni}$$

les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ correspondant à la valeur

s_i de k, on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}(\alpha_{11}-s_i)x_{1i}+\ldots+\quad \alpha_{1n}x_{ni}\quad =0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \qquad \alpha_{n1}x_{1i}+\ldots+(\alpha_{nn}-s_i)x_{ni}=0.\end{array}\right.$$

Si l'on pose $X=\Sigma\pm x_{11}x_{22}\ldots x_{nn}$, on déduira de (2)

$$\alpha_{pq}=\frac{1}{X}\left(s_1 x_{p1}\frac{\partial X}{\partial x_{q1}}+s_2 x_{p2}\frac{\partial X}{\partial x_{q2}}+\ldots\right),$$

et en posant

$$\xi_i=\frac{1}{X}\sum x_{qi}\frac{\partial X}{\partial x_{pi}}\tau_{pq},$$

on aura

$$s=s_1\xi_1+s_2\xi_2+\ldots+s_n\xi_n.$$

Nous voyons le rôle important que jouent les x_{ij} dans la théorie des substitutions. $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}$ constitueront ce que nous appellerons un *pivot*.

Les quantités ξ_1, ξ_2, ... peuvent s'exprimer facilement en fonction de s; en effet, comme

$$s^p=s_1^p\xi_1+s_2^p\xi_2+\ldots+s_n^p\xi_n,$$

on a, en appelant F un polynome entier,

$$F(s)=F(s_1)\xi_1+F(s_2)\xi_2+\ldots,$$

et si

$$F(s)=\frac{f(s)}{s-s_i},$$

on a

$$\frac{f(s)}{s-s_i}=f'(s_i)\xi_i,$$

$$\xi_i=\frac{f(s)}{f'(s_i)(s-s_i)},$$

ce qui justifie le nom de *substitutions interpolaires* que nous donnerons aux substitutions ξ.

La théorie que nous venons d'exposer est subordonnée à un grand nombre d'hypothèses restrictives et sur lesquelles nous allons maintenant porter notre attention.

En général, quand $f(k) = 0$ aura des racines multiples, la substitution ne pourra plus se mettre sous la forme

$$s_1 \xi_1 + \ldots + s_n \xi_n.$$

Cependant quand tous les mineurs de $f(k)$ sont nuls $f(k)$ a une racine double et les pivots correspondant à cette racine sont indéterminés, et s peut encore, et cela d'une infinité de manières, prendre la forme précédente; mais alors, dans cette forme, il y aura des coefficients égaux.

Ce qu'il faut remarquer, c'est que c'est seulement dans des cas exceptionnels que notre théorie sera en défaut et X ne sera jamais nul puisque les α_{ij} sont bien déterminés.

VIII. — Substitutions échangeables.

Proposons-nous maintenant de trouver la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions

$$s = \Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij} \qquad \text{et} \qquad t = \Sigma \beta_{ij} \tau_{ij}$$

soient échangeables. Supposons, ce qui est le cas général, que s et t puissent se mettre sous la forme

$$s = s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2 + \ldots + s_n \xi_n,$$
$$t = t_1 \eta_1 + t_2 \eta_2 + \ldots + t_n \eta_n,$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots$ désignant des interpolaires, on pourra poser

$$\xi_p = \frac{1}{X} \sum x_{jp} \frac{\partial X}{\partial x_{ip}} \tau_{ij},$$
$$\eta_q = \frac{1}{Y} \sum y_{jq} \frac{\partial X}{\partial y_{jp}} \tau_{ij},$$

en désignant par X et Y les déterminants

$$X = \Sigma \pm x_{11} \ldots x_{nn}, \qquad Y = \Sigma \pm y_{11} y_{22} \ldots y_{nn}.$$

Pour que l'on ait $st = ts$ il faut et il suffit que l'on ait $\xi_p \eta_q = \eta_q \xi_p$. Cela suffit évidemment. Ensuite, cela est nécessaire; car si $st = ts$ on a

$$s^2 t = sts = ts^2, \qquad s^3 t = ts^3, \qquad \ldots,$$
$$s^\alpha t^\beta = t^\beta s^\alpha, \qquad \ldots, \qquad f(s)\varphi(t) = \varphi(s) f(t).$$

Or on a

$$\mathrm{XY}\xi_p\eta_q = \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right) \sum x_{jp} \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{iq}} \tau_{ij},$$
$$\mathrm{YX}\eta_q\xi_p = \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{1q}} x_{1p} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{2q}} x_{2p} + \ldots\right) \sum y_{jq} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{ip}} \tau_{ij},$$

et pour que $\xi_p \eta_q = \eta_q \xi_p$, il faut que l'on ait

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right) x_{jp} \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{iq}} \\ &= \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{1q}} x_{1p} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y_{2q}} x_{2p} + \ldots\right) y_{jq} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{ip}}. \end{aligned} \right.$$

Laissons p, q, j fixes, multiplions les deux membres de cette formule par y_{iq} en faisant $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ et ajoutons, nous aurons

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right) x_{jp} \mathrm{Y} \\ &= \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{1q}} x_{1p} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{2q}} x_{2p} + \ldots\right) \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right) y_{iq}; \end{aligned} \right.$$

laissons p et q fixes, multiplions par $\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{jp}}$, faisons $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ et ajoutons, nous aurons

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right) \mathrm{XY} \\ &= \left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{1q}} x_{1p} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y_{2q}} x_{2p} + \ldots\right) \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right)^2; \end{aligned}$$

de là on conclut, ou bien

$$(3) \qquad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots = 0,$$

ou bien

$$(4)\qquad XY = \left(\frac{\partial Y}{\partial y_{1q}} x_{1p} + \frac{\partial Y}{\partial y_{2q}} x_{2p} + \ldots\right)\left(\frac{\partial X}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \frac{\partial X}{\partial x_{2p}} y_{2q} + \ldots\right).$$

En multipliant (2) par $\frac{\partial X}{\partial x_{jr}}$, ... faisant $j = 1, 2, \ldots, n$ et ajoutant, on a

$$(5)\qquad 0 = \left(\frac{\partial Y}{\partial y_{1q}} x_{1p} + \ldots\right)\left(\frac{\partial X}{\partial x_{1r}} y_{1q} + \ldots\right)\left(\frac{\partial X}{\partial x_{1p}} y_{1q} + \ldots\right).$$

Si l'on considère l'équation (3) elle ne peut avoir lieu quel que soit q, sans quoi on aurait $Y = 0$, il y aura donc des valeurs de p et q, telles que (4) ait lieu, en vertu de (5); si p et q sont de telles valeurs, il n'y aura qu'une valeur de p qui, associée à des valeurs de q, ne satisfait pas à (3). Des $n - 1$ équations (3) on déduira

$$y_{1p'} : x_{1p} = y_{2p'} : x_{2p} = \ldots,$$
$$y_{1q'} : x_{1q} = x_{2q'} : x_{2q} = \ldots,$$

et si $p' \gtrless q'$ on n'aura pas $p = q$, sans quoi on aurait $Y = 0$; il en résulte que l'on peut poser

$$\begin{array}{lll} y_{11} = x_{11}, & y_{12} = x_{12}, & \ldots, \\ y_{21} = x_{21}, & y_{22} = x_{22}, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, \end{array}$$

et, par suite,

$$\xi_1 = y_1, \qquad \xi_2 = y_2, \qquad \ldots.$$

Les substitutions échangeables ont donc mêmes interpolaires et, par suite, sont des fonctions d'une même substitution normale.

Cette conclusion suppose que s et t sont des substitutions tout à fait générales, et si l'une d'elles ne pouvait pas affecter la forme $s_1\xi_1 + s_2\xi_2 + \ldots$ on ferait varier ses coefficients infiniment peu, de manière à lui faire affecter la forme en question, et l'on arriverait aux mêmes conclusions.

IX. — Substitutions quasi-échangeables.

Maintenant proposons-nous de trouver deux substitutions s et t telles que l'on ait

$$st = \varepsilon ts,$$

ε désignant un nombre. Si n désigne le degré de s et t, ε ne saurait être quelconque; en effet, le déterminant de st devant être égal à celui de ts et à celui de $(\varepsilon t)s$; si donc les déterminants de s et t ne sont pas nuls il faudra que $\varepsilon^n = 1$: ainsi ε devra être racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Mais supposons s donné et cherchons t; pour calculer les β, il faudra résoudre n^2 équations de la forme linéaire

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_{1i}\beta_{j1} + \alpha_{2i}\beta_{j2} + \ldots + \alpha_{ni}\beta_{jn} \\ &\quad = \varepsilon(\beta_{1i}\alpha_{j1} + \beta_{2i}\alpha_{j2} + \ldots + \beta_{ni}\alpha_{jn}); \end{aligned} \right.$$

en éliminant les β on aura une équation en ε du degré n^2, dont chaque racine fera connaître un système de valeurs des β.

D'abord si l'on suppose s normale, toutes les fonctions de s au nombre de n linéairement distinctes seront pour $\varepsilon = 1$ des solutions des équations (1) dont les mineurs d'ordre $n-1$ seront nuls : donc $\varepsilon = 1$ sera racine d'ordre n de l'équation en ε.

Toute racine de l'équation en ε sera d'ordre de multiplicité n, car si

$$st = \varepsilon ts,$$

on aura

$$(st) \times t = \varepsilon t \times (st);$$

donc si, pour une valeur de ε, t est une solution st,

$s^2 t, \ldots, f(s) t$ seront encore des solutions ; le raisonnement fait pour la racine 1 s'applique donc aux autres racines.

Si nous supposons toujours s normale, son équation caractéristique sera, par exemple,

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

et, par suite,

$$ts^n + a_1 t s^{n-1} + \ldots + t a_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon^n s^n t + a_1 \varepsilon^{n-1} s^{n-1} t + \ldots + a_n t = 0 ;$$

donc le déterminant de t est nul, ou le déterminant de

$$\varepsilon^n s^n + a_1 \varepsilon^{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_n,$$

ou enfin

$$\varepsilon^n s^n + a_1 \varepsilon^{n-1} s^{n-1} + \ldots = 0 ;$$

cette dernière hypothèse, puisque s est normale, donne

$$a_1 \varepsilon^{-1} = a_1, \qquad a_2 \varepsilon^{-2} = a_2, \qquad \ldots, \qquad a_n \varepsilon^{-n} = a_n :$$

donc ε est racine de $\varepsilon^n - 1 = 0$ et $a_1 = 0$, $a_2 = 0$. ...; l'équation caractéristique de s est une équation binome.

Voici un exemple de substitutions quasi-échangeables :

$$s = \tau_{12} + \tau_{23} + \ldots + \tau_{n1},$$
$$t = \varepsilon \tau_{11} + \varepsilon^2 \tau_{22} + \ldots + \varepsilon^n \tau_{nn}, \qquad \varepsilon^n = 1.$$

En effet

$$ts = \varepsilon \tau_{12} + \varepsilon^3 \tau_{23} + \ldots + \varepsilon^n \tau_{n1},$$
$$st = \varepsilon^2 \tau_{11} + \varepsilon^3 \tau_{23} + \ldots + \varepsilon^{n+1} \tau_{n1}, \qquad st = \varepsilon ts.$$

La substitution s est une substitution circulaire ; les interpolaires de t sont $\tau_{11}, \tau_{22}, \ldots, \tau_{nn}$, s et t sont normales ; on a

$$t^i = i^i \tau_{11} + \ldots + \varepsilon^{ni} \tau_{nn},$$
$$s^j = \tau_{1\,j+1} + \tau_{2\,j+2} + \tau_{3\,j+3} + \ldots,$$
$$s^i t^j = \varepsilon^{ij} t^j s^i,$$
$$t^i s^j = \varepsilon^i \tau_{1\,j+1} + \varepsilon^{2i} \tau_{2\,j+2} + \ldots.$$

X — Forme remarquable que peut prendre une substitution quelconque.

Soient s et t deux substitutions normales non échangeables, soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ les interpolaires de s; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ celles de t. Supposons que l'on n'ait pour aucune valeur de i ou de j,

$$\xi_i \eta_j = 0;$$

il n'existera pas de relations de la forme

$$\Sigma a_{ij} \xi_i \eta_j = 0,$$

car s'il existait une semblable relation, en la multipliant à gauche par ξ_p à droite par η_q, on aurait

$$a_{pq} \xi_p \eta_q = 0 \qquad \text{ou} \qquad a_{pq} = 0,$$

puisque $\xi_p \eta_q$ ne peut être nul.

Considérons maintenant une substitution de degré n

$$V = \Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij},$$

posons

$$\Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij} = \Sigma a_{ij} \xi_i \eta_j,$$

on satisfera à cette équation en remplaçant ξ_i et η_j par leurs valeurs τ_{ij} et, en identifiant, on aura ainsi des équations linéaires pour calculer les a_{ij}; le déterminant de ces équations ne sera pas nul sans quoi il existerait des relations de la forme

$$\Sigma a_{ij} \xi_i \xi_j = 0,$$

où les a_{ij} ne seraient pas tous nuls.

Ainsi V peut être mis sous la forme

$$\Sigma a_{ij} \xi_i \eta_j,$$

donc toutes les substitutions peuvent être considérées comme des fonctions entières des deux mêmes substitutions.

On peut, par exemple, prendre

$$s = \tau_{11} + \tau_{23} + \ldots + \tau_{n1},$$
$$t = \varepsilon\tau_{11} + \varepsilon^2\tau_{22} + \ldots + \varepsilon^n\tau_{nn},$$

alors

$$\eta_i = \tau_{ii},$$
$$\xi_i = \frac{1}{n}[(\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots) + \varepsilon^{-i}(\tau_{12} + \tau_{23} + \ldots) + \ldots],$$

et l'on n'a jamais

$$\eta_i\xi_j = 0 \quad \text{ni} \quad \xi_i\eta_j = 0.$$

Il est facile de voir que l'on a

$$\tau_{ij} = (\varepsilon^{j-i}\xi_1 + \varepsilon^{2j-2i}\xi_2 + \ldots + \varepsilon^{nj-ni}\xi_n)\eta_j.$$

[F1d]

REMARQUE SUR LA FORMULE THÊTA DE JACOBI [1];

PAR M. A. GUTZMER,

Professeur à l'Université de Halle.

(Traduit, avec l'autorisation de l'auteur, par M. L. LAUGEL.)

L'étude de Kronecker [2] *Sur l'époque et sur le mode d'origine des formules thêta de Jacobi* a de nouveau attiré l'attention sur la relation qui a lieu entre les produits de quatre fonctions thêta, relation que Jacobi a prise pour principe de base de la Théorie des fonctions elliptiques dans son Cours de Königsberg [3]. Il ne me

---

(1) *Journal de Crelle,* t. CX, Cahier 3.

(2) *Crelle,* t. 108, p. 325. *Sitzungberichte der Berlin. Acad.*, 1891.

(3) JACOBI, *Œuvres,* t. I, p. 497-538.

semble donc pas superflu de communiquer, dans ce qui suit, une démonstration simple de la formule en question à laquelle j'ai été conduit, depuis assez longtemps, par les Leçons de M. Fuchs et par une communication orale de ce géomètre, démonstration qui présente une déduction de la relation entre les thêta conforme à la nature des choses.

Prenons comme point de départ cette remarque que la relation de Jacobi, qui se présente dans la notation employée par Kronecker (¹) sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} T_2(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) + T_3(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \\ \quad = T_2(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3) + T_3(\zeta_0, \zeta_2, \zeta_1, \zeta_3), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$T_h(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \vartheta_h(\zeta_0 + \zeta_1)\vartheta_h(\zeta_0 - \zeta_1)\vartheta_h(\zeta_2 + \zeta_3)\vartheta_h(\zeta_2 - \zeta_3),$$

peut être représentée comme une relation entre fonctions thêta du second ordre. On sait (²) que, par fonction ϑ d'ordre k, on entend une fonction qui satisfait aux relations fonctionnelles

$$\Phi(\zeta + 1) = \Phi(\zeta),$$
$$\Phi(\zeta + \tau) = e^{-k\pi i(2\zeta+\tau)}\Phi(\zeta).$$

La première de ces équations fournit, comme l'on sait, un développement de la forme

$$\Phi(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{2\pi i m\zeta} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{\frac{\pi i}{k}m^2\tau + 2\pi i m},$$

(¹) *Remarques sur les formules thêta de Jacobi* (*Crelle*, t. 102, p. 260).

(²) Hermite, *Note au Calcul différentiel* de Lacroix (6ᵉ édition). Hermite, *Cours de la Faculté*, lithographié, 4ᵉ édition, p. 219. Comparer Königsberger, *Leçons sur la théorie des fonctions elliptiques*; Leipzig, Teubner.

et de la seconde équation fonctionnelle s'ensuit alors pour les coefficients la condition

$$c_{m+k} = c_m,$$

de sorte que en $\Phi(\zeta)$ renferme k constantes arbitraires. De ceci résulte directement qu'entre $k+1$ fonctions de cette nature a lieu une équation linéaire homogène à coefficients constants. La considération de l'intégrale

$$\int \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi(\zeta)}\, d\zeta,$$

prise le long du contour du parallélogramme des périodes, montre ensuite d'une manière connue ([1]) qu'à l'intérieur dudit parallélogramme, la fonction thêta d'ordre k possède k zéros dont la somme est $\equiv \frac{1}{2}k(1+\tau)$ (modules $1, \tau$).

Entre $k+1$ fonctions thêta d'ordre k aux mêmes périodes ([2]) a lieu par conséquent une équation linéaire homogène, à coefficients constants; il doit donc être possible de tirer de la relation la plus générale de cette nature toutes celles qui restent.

Si nous appliquons ce principe aux fonctions $\mathfrak{S}$ du second ordre, il est aisé de voir, puisqu'en ce cas la somme des zéros est $\equiv 0$, que la fonction $\mathfrak{S}$ la plus générale du second ordre est donnée par

$$\mathfrak{S}_h(\zeta_0+\zeta_1)\,\mathfrak{S}_h(\zeta_0-\zeta_1),$$

lorsque l'on regarde ζ_0 comme la variable indépendante. Toute autre fonction thêta du second ordre (aux mêmes périodes) ne peut en différer que par un facteur con-

---

([1]) HERMITE, *loc. cit.*, p. 223.

([2]) A l'exemple de M. Weber (*Fonctions elliptiques et nombres algébriques*, p. 43), on pourrait, pour abréger, employer la terminologie « fonctions thêta *parentes* ou *alliées* (verwandte) ».

stant. Entre *trois* pareilles fonctions doit avoir lieu une relation linéaire. Cette dernière peut, sans nuire à la généralité, s'écrire sous la forme

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} c_1 \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_1) + c_2 \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_2) \\ + c_3 \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_3) = 0, \end{aligned} \right.$$

où les grandeurs c_1, c_2, c_3 dépendront de ζ_1, ζ_2, ζ_3.

Si maintenant, dans (2), l'on pose $\zeta_0 = \zeta_1$, le premier terme s'évanouit, d'où

$$\frac{c_2}{c_3} = -\frac{\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_3)}{\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_2)},$$

et par conséquent

$$c_2 = \mu\,\vartheta_1(\zeta_3+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_3-\zeta_1),$$
$$c_3 = \mu\,\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_2),$$

de telle sorte que (2) prend la forme

$$\begin{aligned} &\overline{c_1}\,\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_1) \\ &\quad + \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_3+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_3-\zeta_1) \\ &\quad + \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_2) = 0; \end{aligned}$$

on obtient la grandeur $\overline{c_1}$ en y faisant $\zeta_0 = \zeta_2$, d'où

$$\overline{c_1} = \vartheta_1(\zeta_2+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_2-\zeta_3),$$

et l'on arrive ainsi à la relation

$$\begin{aligned} &\vartheta_1(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_2+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_2-\zeta_3) \\ &+ \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_3+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_3-\zeta_1) \\ &+ \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_1+\zeta_2)\vartheta_1(\zeta_1-\zeta_2) = 0 \end{aligned}$$

qui est précisément l'équation à trois termes pour la fonction sigma de M. Weierstrass [1], écrite ici dans la

(1) *Sitzungberichte der Berlin. Akad.*, 1882, p. 505. *Formeln und Lehrsätze, etc.* herausgegeben von H. A. Schwarz, p. 47, Ouvrage dont une traduction de M. Padé vient de paraître récemment (Paris, Gauthier-Villars et fils). *Voir* aussi Scheibner (*Crelle*, t. 102, p. 255).

notation des thêta. Or, on sait que de cette formule, par des transformations simples de ζ_0 et ζ_3, et par la réunion des équations ainsi obtenues, l'on peut déduire la relation de Jacobi, de même que de cette dernière on peut inversement déduire la précédente formule. L'on a en même temps, par conséquent, aussi démontré la relation (1) de Jacobi à l'aide du principe en question, ce qui était notre but.

Dans un Travail suivant, il sera montré comment le principe très simple dont il a été fait usage ici peut servir à établir les relations qui ont lieu entre les fonctions thêta à plusieurs variables.

[P6f]

SUR UN CAS REMARQUABLE DE LA PROJECTION GAUCHE;

PAR M. G. FONTENÉ,

Professeur au collège Rollin.

1. On connaît ce théorème, donné par la notion du point autohomologue, de deux figures semblables en Géométrie plane :

Étant données, dans un plan, deux figures semblables F *et* F′, *avec même sens de rotation, si l'on partage dans un même rapport les droites* AA′, BB′, CC′, ... *qui joignent deux points correspondants, les points de partage* A″, B″, C″, ... *déterminent une figure* F″ *semblable aux deux premières.*

On en déduit immédiatement cet autre théorème, dont la première idée appartient à l'un de mes anciens élèves, Jean Siegler :

Étant données, dans deux plans parallèles P *et* P′, *deux figures semblables* F *et* F', *avec même sens de rotation, les droites* AA', BB', CC',... *qui joignent deux points correspondants rencontrent un plan* P'' *parallèle aux deux premiers en des points* A'', B'', C'',... *qui déterminent une figure* F'' *semblable aux deux premières.*

On ramène ce théorème au premier en projetant obliquement les figures F' et F'' sur le plan P : la direction des projetantes étant AA' par exemple, le point A est le point autohomologue pour la figure plane obtenue.

2. On peut disposer des deux paramètres du point courant M de la figure F pour faire que la droite $MM'M''$ soit perpendiculaire au plan P, et je le désigne alors par $OO'O''$: si l'on projette orthogonalement les figures F' et F'' sur le plan P, le point O est le point autohomologue pour la figure plane obtenue. On peut démontrer le théorème en employant la propriété bien connue du quadrilatère gauche, et en faisant une rotation autour de $OO'O''$; on prend sur OB et sur $O'B'$ les longueurs $O\alpha$, $O'\alpha'$ respectivement égales aux longueurs OA, $O'A'$, on mène $\alpha\alpha'$....

3. La correspondance entre les points courants M, M', M'' est déterminée dès que l'on connaît les deux segments homologues AB et $A'B'$, ou encore les deux droites AA' et BB'. Avec des coordonnées polaires, les pôles étant A et A', les axes polaires étant Ax et $A'x'$ dirigées suivant AB et $A'B'$, et en posant $k' = \frac{A'B'}{AB}$, on peut dire : à tout point M du plan P, de coordonnées θ et r, répond un point M' du plan P', de coordonnées θ et $k'r$; en remplaçant $A'x'$ par $A'\xi'$ parallèle à Ax, les

coordonnées de M′ sont $\alpha'+\theta$ et $k'r$. Ce point de vue conduit à une démonstration analytique du théorème :

On prend A *pour origine*, AA′A″ *pour axe des* z, *et, dans le plan* P, *des axes rectangulaires dont l'un* Ax *est suivant* AB; *on trouve que, par rapport au pôle* A″ *et à l'axe polaire* $A''\xi''$ *parallèle à* Ax, *les coordonnées de* M″ *sont* $\alpha''+\theta$ *et* $k''r$, α'' *et* k'' *étant des constantes ; on a par exemple*

$$\tang \alpha'' = \frac{a''k'\sin\alpha'}{a''k'\cos\alpha'+(a'-a'')},$$

a' *et* a'' *étant les* z *des points* A′ *et* A″.

4. Relativement aux droites MM′ ou μ, qui forment une congruence, on a ce théorème :

Les droites μ *sont les droites qui rencontrent deux droites fixes* Δ *et* Δ'; *celles-ci sont les parallèles au plan* P *qui s'appuient sur* AA′, *sur* BB′, *et sur le cercle de l'infini, ou encore les droites qui, partant des points cycliques du plan* P, *rencontrent* AA′ *et* BB′.

On le démontre facilement en cherchant par la Géométrie analytique une droite $z=h$, $y=mx$, qui rencontre la droite MM′ quels que soient r et θ; on trouve

$$m=\pm i, \qquad 1-\frac{a'}{h}=k'(\cos\alpha'\pm i\sin\alpha').$$

En appelant h_1 et h_2 les deux valeurs de h qui sont imaginaires conjuguées, on a la formule

$$k'^2=\left(1-\frac{a'}{h_1}\right)\left(1-\frac{a'}{h_2}\right),$$

qui donne k' en fonction de a' supposé variable, et l'on a ensuite α' par les formules

$$\cos\alpha' + i\sin\alpha' = \left(1 - \frac{a'}{h_1}\right) : k',$$

$$\cos\alpha' - i\sin\alpha' = \left(1 - \frac{a'}{h_2}\right) : k';$$

si le point A de la droite $AA'A''$ est choisi tel que l'on ait $h_1 + h_2 = 0$, on a simplement

$$\tang\alpha' = \frac{ia'}{h_1}, \qquad k' = \frac{1}{\cos\alpha'}.$$

Parmi les droites μ qui rencontrent les deux droites fixes Δ et Δ', on doit remarquer la perpendiculaire commune OO'.

On voit que la correspondance entre les points homologues M et M' des deux plans P et P' est en somme établie par une projection gauche; on appelle ainsi (STEINER, ABEL, TRANSON, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1865, p. 385, et 1866, p. 63, 213) un mode de projection dans lequel les projetantes sont assujetties à rencontrer deux droites fixes Δ et Δ'; ces droites fixes sont ici deux isotropes, le plan P de la figure à projeter et le tableau P' sont deux plans parallèles à ces isotropes, et il arrive alors que la figure projetée et la projection sont deux figures semblables.

[E5]

SUR LES INTÉGRALES DE FRESNEL;

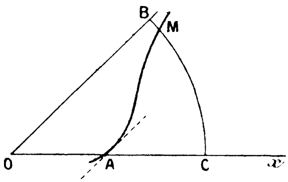
PAR M. V. JAMET.

Dans le calcul des intégrales de Fresnel

$$\int_0^\infty \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv, \qquad \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv,$$

on rencontre la difficulté suivante : *Démontrer que l'intégrale* $\int e^{-z^2}\,dz$, *calculée tout le long d'un arc égal au* $\frac{1}{8}$ *d'une circonférence ayant pour centre l'origine, tend vers zéro lorsque le rayon de cette circonférence croît au delà de toute limite.* Les démonstrations qu'on en trouve dans divers Traités de Calcul intégral sont, ou très pénibles, ou insuffisantes sous le rapport de la rigueur. J'espère que la démonstration suivante sera suffisamment claire et rigoureuse.

Construisons la courbe représentée, en coordonnées polaires, par l'équation $r = \sqrt{\operatorname{tang}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$. Elle présente une branche infinie partant d'un point A, situé



sur l'axe polaire à une distance de l'origine égale à l'unité; elle admet une asymptote OB issue de l'origine et faisant avec Ox un angle égal à $\frac{\pi}{4}$. Sur cette branche infinie, prenons un point M, dont les coordonnées polaires seront R et θ_0, R étant aussi grand que nous le voudrons, et traçons un arc de cercle BMC, ayant R pour rayon, O pour centre, et limité aux points C, B, où il coupe l'axe polaire et l'asymptote de notre courbe. L'intégrale $\int e^{-z^2}\,dz$, calculée le long de cet arc de cercle, se divise en deux parties, l'une relative à l'arc CM, l'autre à l'arc MB. Je dis que chacune d'elles a un module infiniment petit avec $\frac{1}{R}$. En effet, si l'on pose

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta),$$

notre intégrale se transforme comme il suit :

$$\int_{CB} e^{-z^2}dz = \int_{CM} e^{-z^2}dz + \int_{MB} e^{-z^2}dz$$
$$= Ri\int_0^{\theta_0} \frac{e^{\theta i}\,d\theta}{e^{R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}} + Ri\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\theta i}\,d\theta}{e^{R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}}.$$

La première partie de cette somme a un module moindre que la somme des modules de ses éléments, savoir

$$\text{(A)} \qquad R\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{e^{R^2\cos 2\theta}},$$

et, comme $e^{R^2\cos 2\theta}$ est constamment supérieur à $R^2\cos 2\theta$, cette dernière intégrale est inférieure à

$$\frac{1}{R}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\cos 2\theta} = \frac{1}{2R}\log\operatorname{tang}\left(\theta_0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\log R}{R}.$$

Donc l'intégrale (A) tend vers zéro avec $\frac{1}{R}$.

Considérons encore l'intégrale

$$\text{(B)} \qquad R\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{e^{R^2\cos 2\theta}},$$

elle est inférieure à

$$R\left(\frac{\pi}{4} - \theta_0\right) = R\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta_0\right) \times \frac{\frac{\pi}{4} - \theta_0}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta_0\right)}.$$

Mais le facteur $R\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta_0\right)$ est la mesure de la distance du point M à l'asymptote OB de notre courbe auxiliaire; donc ce facteur tend vers zéro, tandis que le facteur suivant tend vers 1; donc l'intégrale (B) a pour limite zéro. En résumé, l'intégrale $\int_{\text{CMB}} e^{-z^2}\,dz$ se décompose en une somme de deux parties, ayant chacune un module infiniment petit avec $\frac{1}{\text{R}}$; donc elle a elle-même un module infiniment petit.

On connaît la suite de la démonstration. L'intégrale $\int e^{-z^2}\,dz$, calculée tout le long du contour OCMBO, étant nulle, on trouve

$$\int_0^{\text{OC}} e^{-x^2}\,dx + \int_{\text{CMB}} e^{-z^2}\,dz - \int_0^{\text{OB}} \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\, e^{-l^2 i}\,dl = 0,$$

et, en supposant que OC croisse au delà de toute limite,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx - \frac{1+\sqrt{-1}}{2}\int_0^\infty (\cos l^2 - \sqrt{-1}\sin l^2)\,dl.$$

Tenant compte de l'égalité

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

démontrée quand x varie par des valeurs réelles et séparant les parties réelles des parties imaginaires, on trouve

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty \cos l^2\,dl + \int_0^\infty \sin l^2\,dl,$$

$$0 = \int_0^\infty \cos l^2\,dl - \int_0^\infty \sin l^2\,dl.$$

D'où

$$\int_0^\infty \cos l^2\,dl = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int_0^\infty \sin l^2\,dl = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ou, résultat équivalent,

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv = \int_0^\infty \sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv = \frac{1}{2}.$$

[K23a]

SUR LA PERSPECTIVE DES ARCADES;

PAR M. A. BOULANGER.

Proposons-nous de déterminer les cordes communes aux perspectives de deux coniques situées sur un même cône du second degré.

Ces coniques ont pour corde commune dans l'espace la droite Δ d'intersection de leurs plans, et la perspective Δ' de cette droite sera corde commune des perspectives des coniques. Quelle est la corde commune conjuguée de Δ'?

Les génératrices G_1 et G_2 de contact des plans tangents au cône mené par l'œil rencontrent respectivement les coniques aux points a_1, b_1 et a_2, b_2. Les perspectives des droites a_1a_2 et b_1b_2 sont les cordes de contact des perspectives des coniques avec les traces, sur le tableau, des plans tangents au cône, c'est-à-dire avec les perspectives de G_1 et G_2 qui forment un couple de tangentes communes aux perspectives des coniques. D'autre part, a_1a_2 et b_1b_2 sont situées dans les plans respectifs des coniques et dans le plan G_1G_2, et passent donc par un même point de Δ. Par suite, les cordes de contact des perspectives des coniques avec les perspectives G'_1, G'_2 de G_1G_2 se coupent sur Δ'. Or, quand une conique est bitangente à deux autres coniques, les cordes de contact et les sécantes communes concourent et forment un faisceau harmonique. Donc, puisque Δ' concourt avec les perspectives $a'_1 a'_2$ et $b'_1 b'_2$ de $a_1 a_2$ et $b_1 b_2$, la corde commune conjuguée passera par le point de concours et sera conjuguée harmonique de Δ' par rapport à $a'_1 a'_2$ et $b'_1 b'_2$.

Application à la perspective des arcades. — On rencontre dans ce problème deux cercles verticaux décrits sur des diamètres égaux et parallèles, situés à un même niveau. Ces deux cercles ont pour perspectives deux ellipses dont on cherche les cordes communes.

Δ' est la ligne de fuite des plans des deux cercles.

Les cordes de contact se déterminent aisément sur l'épure et la droite demandée sera conjuguée harmonique de Δ' par rapport à ces cordes.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Astor,
professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Les quelques mots qui indiquent le sens de la solution de la question de Mécanique, énoncée à la fin de la page 33, supposent, ou que le cylindre est homogène, ou tout au moins que $A = B$.

Les équations du mouvement autour du centre de gravité sont, en prenant pour axe fixe Cr, la verticale du centre de gravité :

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= h, \\ Apy + Bqy' + Cry'' &= k, \end{aligned}$$

h et k étant deux constantes dont la première est > 0.

Or ici $\theta = 90^\circ$, et l'on a par suite :

$$p = \sin\varphi \frac{d\psi}{dt}, \qquad q = \cos\varphi \frac{d\psi}{dt}, \qquad r = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\gamma = \sin\varphi, \qquad \gamma' = \cos\varphi, \qquad \gamma'' = 0.$$

Les intégrales premières sont donc :

$$(A \sin^2\varphi + B \cos^2\varphi)\frac{d\psi^2}{dt^2} + C\frac{d\varphi^2}{dt^2} = h,$$

$$(A \sin^2\varphi + B \cos^2\varphi)\frac{d\psi}{dt} = k.$$

φ est donné par la quadrature

$$\sqrt{C}\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{(hA - k^2)\sin^2\varphi + (hB - k^2)\cos^2\varphi}{A \sin^2\varphi + B\cos^2\varphi}},$$

et par suite ψ par la quadrature

$$d\psi = \frac{k\sqrt{C}\,d\varphi}{\sqrt{(A \sin^2\varphi + B \cos^2\varphi)[(hA - k^2)\sin^2\varphi + (hB - k^2)\cos^2\varphi]}}$$

Ces quadratures sont en général elliptiques; on peut les obtenir par les fonctions élémentaires si $h = k^2 B$, en supposant $A > B$. ψ détermine l'orientation de l'axe. Si $A = B$, $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ sont constants.

Extraits d'une Lettre de M. Servais,
professeur à l'Université de Gand.

1° Dans un article *Sur les cordes normales de la parabole* (*N. A. M.*, p. 274), M. d'Ocagne établit les deux théorèmes suivants : $M_1 M_2$ *étant la corde normale au point* M_1 *d'une parabole : 1° L'angle des tangentes en* M_1 *et* M_2 *à la parabole est égal à l'inclinaison sur l'axe de la droite qui joint le point* M_1 *au sommet;*

2° *Le rapport du rayon de courbure en* M_1, *à la corde normale correspondant à ce point, est égal au rapport de l'abscisse du point* M_1 *au paramètre.*

On obtient la première propriété en remarquant que les pieds des normales issues du point M_2 sont sur un cercle passant par le sommet O de la parabole et par le milieu R de la projection de OM_2 sur la tangente au sommet. Car le point R étant sur la tangente au point M_2, si N est le point commun à l'axe de la parabole et à la normale au point M_2, le cercle considéré a pour diamètre RN. De là résulte l'égalité des angles M_1ON et M_1M_2N.

L'égalité

$$\frac{R}{l} = \frac{x_1}{p},$$

établissant le second théorème, ne diffère pas de la suivante :

$$\frac{2R}{l} = \tang^2\alpha;$$

α étant l'angle que la normale au point M_1 fait avec l'axe (*Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. XVII, p. 380); car

$$\tang^2\alpha = \frac{2x_1}{p}.$$

2° Généralisation de la question 1641.

Une conique Σ_1 a pour centre un point G d'une conique Σ, et passe par le symétrique de ce point par rapport au centre O de Σ. Si des parallèles aux asymptotes de Σ et Σ_1 forment un faisceau harmonique, Σ_1 coupe Σ en trois autres points A, B, C, formant un triangle, dont G est le centre de gravité.

Le lieu des centres des coniques, circonscrites au quadrangle ABCG, est une conique Σ_2 passant par le centre O de Σ, par les milieux de GA, GB, GC et dont les points à l'infini sont conjugués par rapport à Σ. Σ_2 est donc homothétique à Σ_1, le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{1}{2}$. Les côtés opposés GA et BC du quadrangle ABCG déterminent sur la droite de l'infini deux points conjugués par rapport à Σ_2; par suite, BC est une corde conjuguée du diamètre GA. Le point G est donc le centre de gravité du triangle ABC.

Remarque. — Si Σ_1 est un cercle, Σ est nécessairement une hyperbole équilatère; on retrouve alors le théorème énoncé.

Remarque sur la question 1653.

(*Extrait d'une Lettre de M. M. d'Ocagne*).

J'ai démontré dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (1891; p. 99) que *si le cercle osculateur* C *en un point d'une parabole coupe cette courbe au point* V *et si la droite* MV *rencontre l'axe de la parabole au point* I, *on a* IV = 3MI, et d'autre part (même page) que *si le cercle* C *rencontre en* M′ *le diamètre relatif au point* M, *on a*

$$\text{arc}\,MM' = \text{arc}\,M'V.$$

Prenons le point D symétrique du point M′ par rapport à la normale en M. Ce point D se trouve sur le cercle C et la droite MD passe par le foyer F. En outre, on a

$$\text{arc}\,MD = \text{arc}\,MM' = \text{arc}\,M'V.$$

Donc VD est parallèle à MM′, c'est-à-dire à FI, et l'on a

$$\frac{MF}{FD} = \frac{MI}{IV} = \frac{1}{3},$$

d'après le théorème ci-dessus. On est ainsi amené à l'énoncé de la question 1653 (1893, p. 2*).

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1896.

Mathématiques élémentaires.

Soit OAB un triangle rectangle en O; soient AA′, BB′ les bissectrices intérieures des angles aigus A et B; on demande de calculer les côtés $OA = x$, $OB = y$, $AB = z$ de ce triangle, connaissant les longueurs $OA' = a$, $OB' = b$, et de démontrer le résultat suivant :

En supposant entiers les nombres a, b, pour que les nombres x, y, z soient aussi entiers, il faut et il suffit que l'un des nombres a, b soit de la forme

$$2p^2(q-p)(2p-q)^m,$$

l'autre étant de la forme

$$q^2(q-p)(2p-q)^m,$$

p, q, m sont des nombres entiers positifs, vérifiant la condition

$$2p > q > p.$$

Mathématiques spéciales.

On donne une ellipse E qui, rapportée à ses axes, a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

1° On considère des ellipses S dont les axes coïncident en position avec ceux de l'ellipse E et ont 2A, 2B pour longueur. Trouver la relation qui doit lier A, B pour que l'on puisse inscrire dans E une infinité de triangles PQR circonscrits à S et, dans ces conditions, trouver le lieu des sommets des rectangles formés par les tangentes aux ellipses S en leurs sommets.

Montrer que, dans ces mêmes conditions, les normales à E aux points P, Q, R concourent en un point N.

2° Examiner si les ellipses S, obtenues au n° 1°, représentent toutes les ellipses concentriques à E, et telles qu'on puisse inscrire dans E une infinité de triangles PQR, circonscrits à S, les normales à F aux points P, Q, R étant concourantes.

3° Montrer que, parmi les ellipses S, il y en a pour lesquelles les normales PN, QN, RN aux points P, Q, R de l'ellipse E passent respectivement par les pôles P', Q', R' par rapport à E des côtés QR, RP, PQ des triangles PQR.

4° S satisfaisant aux conditions énoncées au n° 3°, trouver le lieu des centres des cercles conjugués aux triangles P', Q', R', l'enveloppe de ces cercles et le lieu des points de rencontre N des normales PN, QN, RN à l'ellipse E.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1896.

Mathématiques élémentaires.

On considère une sphère variable Σ orthogonale à une sphère fixe S et tangente à une autre sphère fixe S_1.

1° Lorsque la sphère Σ est assujettie à la condition d'avoir son centre dans un plan P, le lieu du point de contact de Σ et de S_1 est un cercle.

Démontrer que, si le plan P est tangent à la sphère S, le lieu du centre de la sphère Σ est une section conique ayant pour foyer le point de contact de S et de P.

Examiner le cas où le plan P est tangent à la sphère S en un point du cercle d'intersection de S et de S_1.

2° On peut déterminer sur la ligne des centres de S et de S_1 un point f tel que la sphère Σ_0 concentrique à Σ et passant par f reste toujours, quand Σ varie, tangente à une sphère fixe D ayant pour centre le point f_1, centre de S_1.

3° Soient m le centre de Σ_0 et m' le point de contact de Σ_0 et de D. Lorsque le point m' décrit un cercle de D, le point m reste dans un plan et décrit, dans ce plan, une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

Discuter, en supposant que le plan du cercle considéré sur D e déplace parallèlement à lui-même.

4° Soit T le plan perpendiculaire au milieu du segment qui joint le point f à un point m' pris sur la sphère D; lorsque le plan T passe par un point fixe q, le lieu du point m' est un cercle γ_q.

Si le point q vient à se déplacer dans un plan fixe, le cercle γ_q reste orthogonal à un cercle fixe de la sphère D. Examiner le cas où le point q décrit une droite fixe.

5° Soit c le milieu de ff_1, prouver que les droites cm et fm' se coupent en un point qui demeure dans un plan fixe lorsqu'on fait varier la sphère Σ_0.

Mathématiques spéciales.

Étant donnés, en coordonnées rectangulaires, l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

et la sphère concentrique

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

on prend les plans polaires d'un même point M par rapport à ces deux surfaces. Ces plans se coupent suivant une droite Δ.

1° On demande quel lieu Σ engendre la droite Δ quand le point M décrit une droite quelconque D de l'espace.

2° Quel lieu doit décrire le point M pour que la droite Δ passe par un point fixe P? Quel est le degré du cône décrit par la droite Δ?

3° On demande quelle relation géométrique doit exister entre deux points M, M' pour que les droites correspondantes Δ, Δ' se coupent.

4° Quel lieu Γ doit décrire le point M pour que la droite Δ demeure dans un plan fixe Π,

$$ux + vy + wz + p = 0.$$

Les coordonnées du point M s'expriment alors rationnellement en fonction d'un paramètre.

Trouver l'enveloppe E de la droite Δ dans le plan Π.

5° Quel est le lieu de cette enveloppe quand le plan Π se meut parallèlement à lui-même?

6° D'après la 4e partie, à tout plan Π se trouve attachée une ligne Γ, qui est le lieu des points pour lesquels la droite Δ correspondante se trouve dans le plan Π et, dans ce plan, ces droites Δ enveloppent une certaine courbe E. On suppose maintenant qu'un point M décrive le plan Π : montrer que la droite Δ correspondante s'appuie constamment en deux points sur la ligne Γ et que, réciproquement, toute corde de Γ correspond à un point M du plan Π.

7° Quel lieu décrit Δ quand le point M se déplace sur une tangente de la ligne E, ou bien quand le point M se meut sur la ligne E elle-même?

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On considère la courbe définie en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation

$$(x^2+y^2)^2-7y^2-ax^2-2x-a+3=0,$$

où a désigne une constante.

I. La constante a étant supposée quelconque :

1° Déterminer le genre de la courbe;

2° Écrire à l'aide du théorème d'Abel les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la courbe soient en ligne droite;

3° Écrire, à l'aide du même théorème, la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de la courbe soient sur un cercle;

4° Conclure de cette dernière condition le nombre des sommets de la courbe, un sommet étant, par définition, un point où le cercle osculateur a un contact du troisième ordre avec la courbe;

5° Conclure de la même condition le nombre des systèmes de cercles bitangents à la courbe;

6° Déterminer le nombre des cercles osculateurs qu'on peut mener à la courbe par un point pris sur la courbe et étudier la disposition des points de contact de ces cercles;

7° On mène en un point M_1 le cercle osculateur à la courbe : ce cercle coupe la courbe en un point M_2; en M_2 on mène le cercle osculateur qui coupe la courbe en un point M_3, ... et ainsi de suite; en M_n on mène le cercle osculateur qui coupe la courbe en M_{n+1}; de combien de manières peut-on choisir la position du point M_1 de telle façon que M_{n+1} coïncide avec M_1; application à $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 6$.

II. On donne à a la valeur 1. Démontrer que le genre s'abaisse et reprendre pour ce cas les questions précédentes, en exprimant les coordonnées d'un point de la courbe en fonctions rationnelles d'un paramètre. Déterminer, dans ce cas particulier, les paramètres des points de contact des tangentes doubles.

Mécanique rationnelle.

Dans un plan vertical est fixé un disque circulaire A dont la circonférence est dépolie.

I. Un point pesant P est placé sans vitesse initiale sur la circonférence du disque A, dans le voisinage du point le plus haut du disque A :

1° On demande de déterminer l'angle minimum α que doit faire le rayon qui passe par le point P avec la verticale dirigée vers le haut pour que le point P cesse d'être en équilibre; 2° si le point P est placé sur le disque sans vitesse initiale de manière que le rayon qui passe par le point P fasse avec la verticale un angle un peu plus grand que α, le point P glisse d'abord sur le disque, puis quitte le disque. On demande de former l'équation qui donne l'angle de la verticale avec le rayon qui passe par P, lorsque ce point P se détache du disque pour tomber librement.

II. Sur le disque circulaire A, dans le plan de ce disque, on place un deuxième disque circulaire pesant B qui est homogène et dont le rayon est égal à la moitié du rayon du disque A. La circonférence de B est dépolie, en sorte que les deux disques frottent l'un sur l'autre; on néglige la résistance au roulement.

A l'origine le disque B est sans vitesse et le rayon du disque A aboutissant au point de contact des deux disques fait avec la verticale ascendante un angle aigu β.

Entre quelles limites doit être compris β pour que le disque B roule d'abord sans glisser sur le disque A?

En admettant que le disque B commence par rouler, étudier son mouvement et former les équations qui donnent : 1° l'angle que fait avec la verticale ascendante le rayon de A qui passe par le centre de B à l'instant où cesse le roulement simple sans glissement; 2° l'angle analogue à l'instant où le disque B se détache de A.

Dans les deux questions, on désignera par f le coefficient du frottement de glissement.

ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES. CONCOURS DE 1896 (PREMIÈRE SESSION).

Géométrie analytique.

Soient S l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, rapportée à ses axes, et S' le cercle de centre I (α, β) et de rayon R :

1° Trouver le nombre des points M réels ayant même polaire par rapport aux coniques S et S'.

2° Construire le lieu géométrique V des points M quand R varie, le point I restant fixe. Reconnaître et démontrer, *a priori*, une propriété remarquable des points communs aux lignes S et V.

3° Trouver le lieu géométrique U des centres I des cercles S' de rayon R donné, quand la droite qui joint deux des quatre points communs à S et à S' est perpendiculaire sur la droite qui joint les deux autres. Discuter suivant les valeurs de R.

4° Deux cordes (d'un même couple) communes aux coniques S et S' étant rectangulaires et le rayon R étant variable, on assujettit le centre I à parcourir S ; construire le lieu W de l'intersection P de ces deux cordes ; indiquer la correspondance graphique des points I et P.

5° Suivant les positions occupées sur S par le centre I de S', discuter le nombre des points réels communs à S et à S' lorsque deux cordes d'un même couple sont rectangulaires.

Épure.

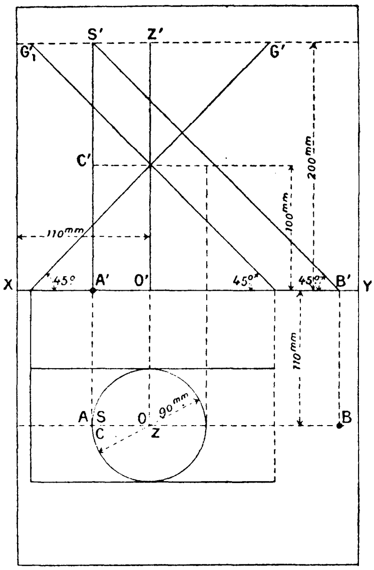
Intersection d'un hyperboloïde de révolution et d'un cône.

On considère :

I. Un hyperboloïde de révolution à axe vertical (OZ, O'Z') dont le cercle de gorge situé dans le plan horizontal de cote

100^{mm} a 90^{mm} de diamètre. Les génératrices de cet hyperboloïde font, avec le plan horizontal, un angle de 45°.

L'axe de la surface est à 110^{mm} en avant du plan vertical.



II. Un cône à base horizontale circulaire défini de la manière suivante :

Le sommet SS' du cône est situé dans le plan de front de l'axe (OZ, O'Z') de l'hyperboloïde. La cote de ce point est fixée à 200^{mm}. L'une des génératrices de front du cône est la verticale (SA, S'A') qui passe par l'extrémité de gauche du rayon du cercle de gorge, l'autre génératrice de front est la droite (SB, S'B') inclinée à 45° sur le plan horizontal.

Cela posé, on demande :

1° De tracer les projections de l'intersection du cône et de l'hyperboloïde, en ayant soin de déterminer les points et tangentes remarquables des courbes ainsi obtenues ;

2° De définir la direction des plans donnant des sections antiparallèles à la base du cône ;

3° De représenter complètement le solide formé par le cône et l'hyperboloïde, les deux surfaces étant limitées de la manière suivante :

(a) au plan horizontal de projection ;

(b) au plan horizontal passant par le sommet du cône ;

(c) au plan tangent au cône suivant la génératrice (SB, S'B') ;

(d) au plan de section antiparallèle à la base passant par le point;

(AA') trace horizontale de la génératrice verticale du cône.

Titre extérieur...... Géométrie descriptive.
Titre intérieur...... Hyperboloïde et cône.

Cadre de 0,27 sur 0,45. Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu de la feuille.

La droite O'Z' est à 110^{mm} du côté de gauche du cadre.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1384

(1882, p. 140).

D'un point pris sur une hyperbole équilatère, on mène des parallèles aux asymptotes de cette courbe. Démontrer que les côtés d'un triangle quelconque inscrit dans l'hyperbole déterminent sur ces droites des segments proportionnels. (MANNHEIM.)

SOLUTION

par M. H. BROCARD.

L'hyperbole étant rapportée à ses asymptotes, soient α, β, γ les angles des côtés (a), (b), (c) du triangle ABC avec l'asymptote OX; (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''), (ξ, η) les coordonnées des points A, B, C, M avec

$$x'y' = x''y'' = x'''y''' = \xi\eta = K^2;$$

a, a', b, b', c, c' les intersections des côtés (a), (b), (c) avec les parallèles à OY et à OX menées par M.

On aura

$$bc = (\xi - x')(\operatorname{tang}\gamma - \operatorname{tang}\beta),$$
$$b'c' = (y' - \eta)(\cot\beta - \cot\gamma),$$

et par conséquent

$$\frac{bc}{b'c'} = \frac{\xi - x'}{y' - \eta} \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\gamma.$$

Remplaçant $\operatorname{tang}\beta$ et $\operatorname{tang}\gamma$ par leurs expressions en fonction des coordonnées, l'on a

$$\frac{bc}{b'c'} = \frac{(\xi - x')(y' - y''')(y' - y'')}{(y' - \eta)(x' - x''')(x' - x'')}$$

ou simplement

$$\frac{bc}{b'c'} = \frac{K^2\xi}{x'x''x'''} = \text{const.}$$

On en conclut

$$\frac{bc}{b'c'} = \frac{ac}{a'c'} = \frac{ab}{a'b'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Question 1407

(1882, p. 336).

Le nombre des groupes de cinq impairs consécutifs dont quatre sont des nombres premiers est-il illimité?

(LIONNET.)

SOLUTION

par M. H. BROCARD.

Un groupe de quatre impairs consécutifs premiers doit être nécessairement pris dans un groupe de cinq impairs consécutifs, en y supprimant le multiple de 5 qui s'y rencontre naturellement.

Les différences successives de ces quatre impairs consécutifs premiers se présentent donc dans l'ordre circulaire 2, 2, 2, 4 ou 2, 4, 2, 2 ou 2, 2, 4, 2 ou 4, 2, 2, 2; mais si l'on examine l'ordre de succession des nombres impairs susceptibles d'être premiers, on observe que ces nombres se terminent périodiquement par 01, 07, 11, 13, 17, ..., 97, 01, 03, 07, 09, 11, 13, 19, ..., 99, 03, 09, 11, ..., 93, 99, la période comprenant 81 termes.

Si l'on étudie ensuite l'ordre de succession des chiffres qui les terminent et les différences qui s'en déduisent, on reconnaît que, dans la période précitée, il n'y a que les groupes (01, 03, 07, 09), (61, 63, 67, 69), (91, 93, 97, 99), (21, 23, 27, 29), (51, 53, 57, 59), (81, 83, 87, 89) qui répondent à la question. Ce sont les seuls qui donnent trois différences égales à 2 et une différence égale à 4.

Ainsi, à l'exception du groupe (1, 3, 5, 7), les groupes cherchés doivent se trouver dans les séquences de nombres premiers terminés par 1, 3, 7, 9 et dans ce seul ordre.

Cette recherche n'offre aucune difficulté, en raison de la disposition typographique adoptée pour les Tables de nombres premiers. C'est ainsi que, dans l'intervalle de 10 à 10000, il y a dix groupes répondant à la question.

Comme autres exemples de nombres terminés par les groupes désignés ci-dessus, on peut citer encore, dans la Table du 5[e] million :

4032401, 03, 07, 09,
4529381, 83, 87, 89,
4693691, 93, 97, 99,
4852451, 53, 57, 59,
4956821, 23, 27, 29,
4972061, 63, 67, 69.

Ces exemples et d'autres que l'on pourrait aisément y ajouter autorisent à présumer que la suite des nombres premiers renferme une infinité de groupes de quatre nombres consécutifs dont la différence n'est pas supérieure à 4 et qui répondent à la question proposée.

Question 1498

(1884, p. 400).

On donne deux droites fixes passant au point C *et une droite* AB *de longueur constante glisse sur ces deux droites. Démontrer que le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* ACB *est une ellipse; le cercle des neuf points a pour enveloppe une courbe parallèle à l'ellipse.*

Trouver le théorème réciproque. (WEILL.)

SOLUTION

par M. H. BROCARD.

Prenons pour axe des x le côté CA, et pour axe des y la perpendiculaire Cy à CA.

Le lieu du centre O du cercle circonscrit est une circonférence ayant C pour centre et $\frac{c}{2\sin C}$ pour rayon, car

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = 2R = 2.CO,$$

et l'on a, par hypothèse,

$$c = \text{const.} \quad \text{et} \quad C = \widehat{BCA} = \text{const.}$$

Le lieu de l'orthocentre H est aussi une circonférence concentrique à la première, car ce point H étant le transformé isogonal (ou par droites symétriques) du point O, les angles OCB, OBC, ABH, ACH sont égaux. Soit δ leur valeur commune; on a

$$CH\cos\delta = CB\cos C = 2CO\cos\delta\cos C;$$

donc

$$CH = 2CO\cos C = \text{const.}$$

Il reste à déterminer le lieu du point E milieu de OH et, par définition, centre du cercle d'Euler ou des neuf points. Or, en prenant pour axes de coordonnées les bissectrices de l'angle C, on a immédiatement

$$2x_E = R\cos\left(\delta + \frac{C}{2}\right) + 2R\cos C\cos\left(\delta + \frac{C}{2}\right),$$

$$2y_E = R\sin\left(\delta + \frac{C}{2}\right) - 2R\cos C\sin\left(\delta + \frac{C}{2}\right).$$

Ajoutant les carrés, on élimine $\left(\delta + \frac{C}{2}\right)$ et il reste

$$\frac{4x^2}{(1+2\cos C)^2} + \frac{4y^2}{(1-2\cos C)^2} = R^2,$$

équation d'une ellipse ayant pour *axes* $R(1+2\cos C)$ et $R(1-2\cos C)$.

Le cercle des neuf points ayant un rayon constant $\frac{R}{2}$, et son centre décrivant une ellipse, on en conclut que son enveloppe est une courbe parallèle à l'ellipse, ou *toroïde,* étudiée plusieurs fois déjà dans ce journal. *Voir,* par exemple : 1844, 442-455 (Breton de Champ) et 553-555 (Catalan); 1863, quest. 666 (W. Roberts); 1864, 80-81 (W. Roberts); 1871, 466-468 (Tortolini); 1891, quest. 1398, 6*-7* (Fauquembergue), etc.

Il nous reste à énoncer la proposition réciproque : Toute ellipse peut être considérée comme le lieu du centre du cercle des neuf points d'une série de triangles ayant un angle constant et le côté opposé donné. Il suffit, pour cela, de prendre
$$a = \frac{c(1+2\cos C)}{2\sin C}, \quad b = \frac{c(1-2\cos C)}{2\sin C}.$$

On voit que l'ellipse se réduit à un segment de droite, si l'angle C est de 60° ou de 120°.

QUESTIONS.

1739. On donne une ellipse de centre O. On mène une corde quelconque ab et l'on prend son pôle c par rapport à l'ellipse. Le point p étant la projection sur Oc de l'orthocentre du triangle abc, démontrer que le produit de Op par Oc est égal à la somme des carrés des demi-axes de l'ellipse donnée.

(MANNHEIM.)

1740. Étant donnée une quadrique, trouver les quadriques qui la coupent orthogonalement. (A. PELLET.)

1741. Soit
$$z = f(x, y)$$
l'équation en coordonnées rectangulaires d'un *hélicoïde développable* quelconque dont le cône directeur a pour axe Oz; démontrer que toute *surface-moulure* peut être représentée par l'équation
$$F(z) = f(x, y).$$
(TH. CARONNET.)

1742. Trouver toutes les courbes telles que, pour chacune d'elles, le lieu du centre de gravité des arcs comptés à partir d'une même origine coïncide avec la développée.

(TH. CARONNET.)

[I11b]

SUR LES PROPRIÉTÉS DES NOMBRES ENTIERS QUI SONT DÉRIVÉES DE L'INTUITION DE L'ESPACE;

PAR M. H. MINKOWSKI.

(Traduit de l'allemand, avec l'autorisation de l'auteur, par M. L. LAUGEL.)

Extrait des *Mathematical Papers read at the international Mathematical Congress held in connection with the world's Columbian Exposition Chicago* 1893 (New-York, Macmillan and C°, 1896).

Dans la théorie des nombres, comme dans chacun des autres domaines de l'Analyse, la découverte a lieu fréquemment au moyen de considérations géométriques, tandis qu'ensuite les vérifications analytiques sont peut-être seules communiquées. Par cela même, je ne serais pas en état d'épuiser mon thème, et ce n'est du reste pas mon dessein. Je me propose ici seulement de parler de cette configuration géométrique qui a avec les nombres entiers la relation la plus simple, je veux dire le *réseau des nombres*. Par ceci, un système quelconque de coordonnées cartésiennes x, y, z étant choisi dans l'espace, on doit entendre l'ensemble de tous les points x, y, z pour lesquels x, aussi bien que y et que z sont des nombres entiers. Pour faciliter l'intuition, on supposera que x, y, z sont des coordonnées rectangulaires habituelles.

Ainsi on a l'habitude d'employer une figure qui se présente comme découpée dans le réseau des nombres dans la démonstration de la règle de la multiplication : $(ab)c = a(bc)$. Je citerai aussi, pour plus de détails, les importantes relations relatives à la fonction [1] $E(x)$ que Dirichlet (*Crelle*, t. 47, *Sur un problème relatif à la division*) a obtenues par des méthodes géométriques.

Mais je veux cependant m'en tenir ici aux questions où la notion de l'infini joue un rôle, c'est-à-dire où le réseau complet, et non simplement des découpures de ce dernier, est pris en considération.

Ce qui suit est la reproduction, en leurs parties principales, de quelques résultats de mon livre, *Géométrie des nombres* (1896, Teubner); je remarque, à ce propos, que dans mon livre la restriction aux systèmes de *trois* nombres entiers n'a pas lieu.

I. La notion la plus importante en corrélation avec le réseau des nombres, c'est celle du *volume* d'un corps; cette notion fournit alors plus tard les principes pour la définition de l'intégrale triple. Prenons chaque point du réseau des nombres pour centre d'un cube à faces parallèles aux plans des coordonnées et d'arête égale à 1. Avec chaque cube, on doit toujours aussi compter l'encadrement qui le délimite. On obtient ainsi une configuration N de cubes qui remplit l'espace sans lacunes, et chaque cube n'a aucun point intérieur en commun avec un autre. Soit maintenant un ensemble de points quelconque désigné par K, réparti tout entier sur un nombre fini de cubes de N. Dilatons cet ensemble K à partir d'un point quelconque p de l'espace dans toutes les directions et suivant un rapport quelconque $\Omega : 1$. Ainsi de K l'on déduira K_Ω^p. Soit alors a_Ω^p le nombre de *tous ceux des* cubes de N où chaque point est un point *intérieur* de K_Ω^p, et soit u_Ω^p le nombre de tous les cubes de N

---

(1) Traduit par Houël dans le *Journal de Liouville*, t. I, p. 371.

qui contiennent toujours *au moins un* point de K_Ω^p. Cela posé, ainsi que l'a démontré M. Jordan (*Journ. de Math.*, 4ᵉ sér., t. VIII, p. 77; 1892), pour Ω croissant indéfiniment, $\Omega^{-3} a_\Omega^p$ et $\Omega^{-3} u_\Omega^p$ convergent toujours chacun vers des limites respectives déterminées A et U, indépendamment de p; A et U sont dits les volumes *intérieur* et *extérieur* de K. On parlera simplement du volume de K lorsqu'on a $A = U$.

II. Maintenant les propriétés plus profondes du réseau des nombres dépendent d'une généralisation de la définition de la longueur d'une ligne droite, généralisation où l'on conserve seulement cette condition que dans un triangle la somme de deux côtés n'est jamais inférieure au troisième côté.

Concevons une fonction $S(ab)$ de deux points variables a et b quelconques, ne jouissant d'abord que des propriétés suivantes :

1° $S(ab)$ doit toujours être positif lorsque b est différent de a, et nul lorsque b et a sont identiques ; 2° si a, b, c, d désignent quatre points parmi lesquels b est différent de a et entre lesquels a lieu la relation $d - c = t(b - a)$, t étant *positif*, on doit alors toujours avoir $S(cd) = tS(ab)$. Cette relation doit être interprétée dans le sens du calcul barycentrique et signifie que les droites cd et ab ont même direction et que leurs longueurs (au sens ordinaire du mot) sont dans le rapport de $t : 1$. Pour distinguer du mot *longueur* dans son acception usuelle, on peut donner à $S(ab)$ le nom de *distance radiale de a à b* (Strahldistanz).

Soit o l'origine ; évidemment toutes les valeurs $S(ab)$ sont bien déterminées, pourvu que l'ensemble des points u soit donné pour lesquels $S(ou) \leqq 1$. Cet ensemble de points sera dit le *corps étalon* (Aich körper) des distances radiales. A ce corps en toute direction, à partir de o doit appartenir une droite issue de o de longueur finie, non évanouissante.

Maintenant ensuite, lorsque pour trois points quelconques a, b, c, on a toujours

$$(3) \qquad S(ac) \leqq S(ab) + S(bc),$$

les distances radiales seront dites *concordantes* (einhellig). En ce cas, leur corps étalon jouit de cette propriété que, pour deux points quelconques u. v en ce corps, le segment de droite uv tout entier appartient à ce corps ; et, d'autre part, tout corps dont l'encadrement n'est *nulle part concave* et à l'intérieur duquel se trouve l'origine est corps étalon pour certaines distances radiales concordantes.

Par $E(ab)$ l'on désignera la moitié de l'arête du cube aux faces parallèles aux plans des coordonnées qui a pour centre a et dont l'encadrement passe par b. Les $E(ab)$ peuvent être regardées comme les $S(ab)$ concordantes les plus simples. J'ai exposé analytiquement la résolution complète des conditions fonctionnelles (1), (2), (3) dans le premier Chapitre de mon livre, *Géométrie des nombres*. La condition (3) a, en particulier, cette conséquence que la fonction $S(ab)$ est toujours une fonction *continue* des coordonnées de a et b, et ensuite qu'il se présente deux grandeurs positives g et G telles que l'on ait

$$gE(ab) \leqq S(ab) \leqq GE(ab)$$

pour tous les a et b, et enfin que le corps étalon possède un volume déterminé I. La signification de g et G est évidemment la suivante : le cube $E(ou) \leqq \frac{1}{G}$ est tout entier renfermé dans le corps étalon et ce dernier, de son côté, l'est tout entier dans le cube $E(ou) \leqq \frac{1}{g}$.

Les distances radiales $S(ab)$ seront dites *réversibles* wechselseitig) lorsqu'on a toujours

$$(4) \qquad S(ba) = S(ab).$$

Ceci a lieu au seul et unique cas où le corps étalon a l'origine pour *centre*.

III. Il existe évidemment, dans le réseau des nombres, des points r pour lesquels $E(or) = 1$.

Dans l'hypothèse de distances radiales *concordantes* quelconques $S(ab)$ l'on aura alors pour ces points r du réseau $S(or) \leqq G$. Maintenant cette dernière condition ne peut, en général, être remplie que par des points r tels que l'on ait $S(or) \leqq \frac{G}{g}$, et cette condition de plus n'est certainement remplie que par un nombre fini de points du réseau.

On reconnaît maintenant que, parmi toutes les distances radiales qui vont de o à tous les autres points du réseau, il en existe nécessairement une à valeur déterminée minima M et qui sera toujours $\leqq G$.

Si l'on construit alors, pour un premier point quelconque a du réseau, le corps $S(au) \leqq \frac{1}{2}M$, et pour un autre point quelconque c de ce réseau le corps $S(uc) \leqq \frac{1}{2}M$, ces deux corps, par suite de (3), n'ont aucun point intérieur en commun. Si l'on suppose, de plus, que les distances radiales sont aussi *réversibles*, le second corps est identique à $S(cu) \leqq \frac{1}{2}M$, et, par conséquent, alors les différents corps $S(au) \leqq \frac{1}{2}M$ relatifs aux différents points a du réseau des nombres s ont en commun au plus des points de leurs encadrements.

Soit maintenant Ω un nombre entier quelconque positif et pair, et construisons les corps en question pour tous les $(\Omega + 1)^3$ points.

$$x, y, z = 0 \pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm \frac{\Omega}{2},$$

renfermés dans le cube $\mathrm{E}(au) \leqq \frac{\Omega}{2}$.

De $\mathrm{S}(au) \leqq \frac{1}{2}\mathrm{M} \leqq \frac{1}{2}\mathrm{G}$ l'on conclut $\mathrm{E}(au) \leqq \frac{1}{2}\frac{\mathrm{G}}{g}$ et par suite tous ces corps seront renfermés dans le cube $\mathrm{E}(au) \leqq \frac{1}{2}\left(\Omega + \frac{\mathrm{G}}{g}\right)$ dont le volume est $\left(\Omega + \frac{\mathrm{G}}{g}\right)^3$.

Maintenant, comme tous ces corps se confondent tout au plus en des points de leurs encadrements et qu'ils sont chacun de volume $\left(\frac{\mathrm{M}}{2}\right)^3 \mathrm{I}$, on en conclut l'inégalité

$$\left(\Omega + \frac{\mathrm{G}}{g}\right)^3 \geqq (\Omega + 1)^3 \left(\frac{\mathrm{M}}{2}\right)^3 \mathrm{I}.$$

Maintenant M et I représentent des grandeurs déterminées et Ω peut être pris aussi grand que l'on veut, d'où l'on conclut

$$(5) \qquad 1 \geqq \left(\frac{\mathrm{M}}{2}\right)^3 \mathrm{I}.$$

Il doit donc par conséquent exister au moins un point q du réseau, différent de 0, *pour lequel on ait*

$$\mathrm{S}(oq) \leqq \frac{2}{\sqrt[3]{\mathrm{I}}}.$$

Le théorème ainsi obtenu, sur les corps à centre dont les surfaces limites ne sont nulle part concaves, me semble être l'un des plus féconds de toute la théorie des nombres. Inspiré par l'étude des travaux de Dirichlet et ceux de M. Hermite, sur les formes quadratiques (*Crelle*, t. 40, p. 209 et 291), je l'avais trouvé d'abord pour l'ellipsoïde; mais un plus grand intérêt encore s'attache aux conséquences que fournit ce théorème relativement aux formes linéaires; j'en expliquerai quelques-unes dans les § IV et V qui suivent.

Dans l'expression (5), le signe égal ne se présente que lorsque les corps S $(au) \leqq \frac{1}{2}$ M, relatifs aux différents points a du réseau, remplissent l'espace *sans lacunes*. En ce cas, avant tout, l'encadrement complet du corps étalon doit être formé par un nombre fini de plans, nombre qui ne surpasse pas $2(2^3 - 1)$; en effet, chaque paroi plane de S$(au) \leqq$ M, doit renfermer au moins un point du réseau x, y, z, et pour de tels points du réseau situés sur deux parois non symétriques par rapport à o, les nombres x, y, z ne peuvent jamais donner des résidus égaux pour le module 2, de même que pour aucun de ces points l'on ne peut avoir non plus $x, y, z \equiv 0, 0, 0$ (mod. 2). Par exemple le signe égal ne se présente jamais dans (5) pour un octaèdre.

IV. Soient ξ, η, ζ trois formes linéaires en x, y, z, à déterminant D différent de zéro; supposons-les ou bien toutes les trois réelles, ou bien ξ réelle, et η et ζ deux formes à coefficients imaginaires conjugués; enfin, soit p une grandeur quelconque réelle. Le corps K_p, défini par

$$(6) \qquad \left(\frac{|\xi|^p + |\eta|^p + |\zeta|^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} \leqq 1,$$

représente alors, pourvu que $p \geqq 1$, un corps dont la surface n'est nulle part concave. Pour le volume I_p de ce corps, on trouve

$$I_p = \frac{2^3}{\lambda_p^3 \, |D|}, \qquad \lambda_p^3 = \frac{3^{-\frac{3}{p}} \Gamma\left(1 + \frac{3}{p}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right]^3}$$

ou bien

$$\lambda_p^3 = \frac{2}{\pi}\,\frac{3^{-\frac{3}{p}}\,\Gamma\left(1+\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\,2^{-\frac{2}{p}}\,\Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)};$$

l'on reconnaît enfin que pour un corps K_p, lorsque p est fini, le signe égal ne se présente jamais dans (5). On obtient ainsi ce théorème.

Lorsque $p \geqq 1$, il existe toujours des nombres entiers x, y, x, qui ne sont pas tous nuls et pour lesquels on a

$$\left(\frac{|\xi|^p+|\eta|^p+|\zeta|^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} < \lambda_p\,|D|^{\frac{1}{3}}.$$

Pour x, y, z constants, le premier membre de l'expression (6) décroît d'une manière continue avec p pour toutes les valeurs $p \geqq 0$, si l'on n'a pas $|\xi| = |\eta| = |\zeta|$, cas où cette expression serait indépendante de p (il en est du reste encore de même pour les valeurs négatives de p, lorsque aucune des grandeurs $|\xi|$, $|\eta|$, $|\zeta|$ n'est nulle). Par conséquent, chaque corps K_p sera contenu dans tous les autres de ces corps d'indice p plus petit et par suite $\frac{1}{I_p}$ et λ_p croissent d'une manière continue avec p; pour $p = \infty$, λ_p^3 converge respectivement vers 1, $\frac{2}{\pi}$. Pour $p = \infty$ K_p se transforme en le parallélépipède $-1 \leqq \xi \leqq 1$, $-1 \leqq \eta \leqq 1$, $-1 \leqq \zeta \leqq 1$; ou en le cylindre oblique à base elliptique $-1 \leqq \xi \leqq 1$, $\eta^2+\zeta^2 \leqq 1$; K_1 au contraire représente un octaèdre ou les deux nappes d'un cône. Enfin pour $p = 0$ la fonction au premier membre de (6) converge vers la moyenne géométrique $\sqrt[3]{|\xi\eta\zeta|}$, en sorte que l'on peut ajouter encore le théorème suivant :

Il existe toujours des nombres entiers, qui ne sont *pas tous nuls et pour lesquels on a* $|\xi\eta\zeta| < \lambda_1^3 |D|$ *et par conséquent* a fortiori $< |D|$.

Ces théorèmes et leurs analogues, pour n formes linéaires à n variables, sont particulièrement susceptibles d'application dans la théorie des nombres algébriques, à la démonstration des théorèmes de Dirichlet sur les unités complexes et du théorème que le nombre des classes d'idéaux est fini; ils ont permis pour la première fois d'établir cette importante proposition que le discriminant de tout corps de nombres algébriques est divisible par au moins un nombre premier.

V. Soient a et b deux grandeurs réelles quelconques et t une grandeur quelconque > 1. L'application des théorèmes du n° III au parallélépipède

$$-1 \leqq x - az \leqq 1, \qquad -1 \leqq y - bz \leqq 1, \qquad -1 \leqq \frac{z}{t} \leqq 1,$$

nous fait voir qu'il existe toujours des nombres x, y, z, pour lesquels

$$0 < z \leqq t^{\frac{2}{3}}, \qquad |x - az| < \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \qquad |y - bz| < \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}.$$

Ce résultat, mais seulement au cas de valeurs entières de t, avait été déjà trouvé par Kronecker (*Berichte d. Berlin. Akad.*, 1884, p. 1073), au moyen de ce principe trivial en apparence, et néanmoins extraordinairement fécond [*voir* Dirichlet, *Généralisation d'un théorème de la Théorie des fractions continues*, (*Œuvres*), t. I, p. 636] que, lorsqu'un certain nombre de systèmes de grandeurs se distribuent en un nombre plus petit de domaines, deux au moins de ces systèmes doivent forcément être compris en un seul et même domaine. C'est là un exemple du petit nombre de cas où ce principe, plus simple, permet de tirer des conclusions essentiellement pareilles à celles données par le théorème arithmétique du § III.

La considération de l'octaèdre

$$|x - az| + \left|\frac{z}{t}\right| \leqq 1, \qquad |y - bz| + \left|\frac{z}{t}\right| \leqq 1$$

(en supposant $t \geqq 3$) montre l'existence de nombres entiers x, y, z, pour lesquels les deux expressions des premiers membres ci-dessus sont $< \left(\frac{3}{t}\right)^{\frac{1}{3}}$, tandis qu'en même temps $z > 0$; on trouve alors encore pour de tels nombres

$$\left|\frac{x}{z} - a\right| < \frac{3}{3z_{\frac{2}{3}}}, \qquad \left|\frac{y}{z} - b\right| < \frac{2}{3z_{\frac{3}{2}}}.$$

Ces propositions nous indiquent une voie par laquelle les résultats de la théorie des fractions continues sont susceptibles d'être généralisées avec succès.

VI. Si l'on considère des $S(ab)$ quelconques concordantes et réversibles, on aperçoit que 2^3 est la plus petite limite supérieure pour $M^3 I$. Si l'on s'en tient à la considération de distances radiales $S(ab)$ dont les corps étalons sont transformés *d'un* seul corps donné quelconque par l'effet de toutes les transformations homographiques possibles, l'origine restant fixe, on trouvera toujours dans cette classe restreinte de fonctions $S(ab)$ des fonctions telles que l'on ait

$$M^3 I > 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots.$$

La démonstration de ce théorème nécessite une étude arithmétique de la théorie du groupe continu de toutes les transformations linéaires.

Finalement on peut ajouter que l'inégalité $M^3 I \leqq 2^3$, relative aux corps dont les surfaces à centre ne sont nulle part concaves, est susceptible encore d'une généralisation essentielle des plus remarquables, mais que je ne considérerai pas ici.

[M²3f] [M¹2f]

ÉTUDE ANALYTIQUE SUR LA SYMÉTRIE;

PAR M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences.

Soit F une courbe plane algébrique rapportée à deux axes rectangulaires situés dans son plan, ou une surface algébrique rapportée à trois axes rectangulaires quelconques.

De l'équation entière et cartésienne $f(x, y) = 0$, ou $f(x, y, z) = 0$, de la figure F, on peut déduire une infinité d'équations représentant des courbes ou surfaces qui admettent tous les centres, axes ou plans de symétrie que peut avoir cette figure. De ce nombre sont, ainsi qu'il est facile de le vérifier, celles que l'on obtient en annulant les fonctions

$$U(f) = \frac{\partial^2 f}{dx^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$V_k(f) = \sum \frac{P_k}{P_\alpha P_\beta P_\gamma} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \right)^2, \qquad (\alpha + \beta + \gamma = k),$$

où k désigne un entier quelconque, fonctions qui sont des covariants de f pour toute substitution orthogonale, et dont la seconde se forme, comme l'on voit, en remplaçant dans le développement de $(x + y + z)^k$ chaque terme tel que $A x^\alpha y^\beta z^\gamma$ par $A \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \right)^2$.

Parmi toutes ces courbes ou surfaces se trouvent des coniques ou quadriques, et comme l'on sait déterminer les symétries de celles-ci, on voit qu'il sera généralement possible de tirer parti de ce résultat si l'on veut rechercher les symétries que peut avoir la figure F. C'est là le problème que je me propose de traiter [1], en le limitant ici à la recherche des axes ou plans de symétrie de la courbe ou surface F.

Je crois bon d'indiquer, à ce sujet, la proposition suivante, que l'on démontre aisément :

Pour que la surface représentée par l'équation entière $f = 0$ soit symétrique par rapport à un plan (P) ayant l'équation

$$P = ax + by + cz + d = 0,$$

il faut et il suffit que $\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(h)}$ soit divisible par P pour les valeurs impaires de h, ou que, en posant

$$f_k = \left(a\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} + b\frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} + c\frac{\partial f_{k-1}}{\partial z}\right) : \mathrm{P},$$

avec $f_0 = f$, f_k soit une fonction entière quel que soit k, ou bien que $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z}$ soit divisible par P, et que le quotient, égalé à zéro, définisse une surface symétrique par rapport à (P), ou encore que

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z}$$

étant divisible par P, le plan (P) soit plan de symétrie de la surface correspondant à l'équation $\mathrm{U}(f) = 0$.

---

[1] Si l'on connaît l'existence et la position d'un centre, d'un axe ou d'un plan de symétrie dans une courbe plane ou surface algébrique d'ordre inférieur à 6, on peut ramener la construction d'un point quelconque de cette courbe ou surface à la construction des racines d'une équation du second degré ou d'une équation bicarrée.

Cette proposition équivaut à une propriété des courbes planes lorsque le polynome f est indépendant de z, puisque l'on doit supposer c nul.

RÈGLES PRATIQUES POUR LA RECHERCHE DES AXES DES COURBES PLANES ALGÉBRIQUES.

1° *Axes parallèles à l'axe des x.* — Soit $f(x, y) = 0$ l'équation entière de la courbe considérée C, rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy. Si le polynome f est indépendant de y, C est symétrique par rapport à toutes les parallèles à Ox. Dans le cas contraire, et $Ay^q + By^{q-1} + \ldots$ étant ce polynome ordonné suivant les puissances décroissantes de y, si q est impair, ou si, q étant pair, le rapport $\frac{B}{A}$ n'a pas une valeur constante, la courbe n'a pas d'axe parallèle à Ox. Lorsque, q étant pair, $\frac{B}{A}$ a une valeur constante g, la droite $qy + g = 0$ est la seule des parallèles à Ox qui puisse être axe de la courbe C.

2° *Axes passant par l'origine.* — Soit $\Sigma\varphi_n(x, y)$ le polynome f ordonné par groupes homogènes. Pour qu'une droite passant par l'origine O des coordonnées soit axe de la courbe C, il faut et il suffit qu'elle soit axe de chacun des faisceaux de droites correspondant aux formules $\varphi_n(x, y) = 0$. Je suppose réels les coefficients de f et je vais donner une méthode générale pour rechercher les axes du faisceau de n droites représenté par l'équation $\varphi_n(x, y) = 0$. Je transforme le polynome $\varphi_n(x, y)$ par la substitution

$$u = x + yi, \qquad v = x - yi;$$

il devient une fonction homogène de u et v que j'or-donne suivant les puissances décroissantes de u, ne la supposant pas réduite à un seul terme; puis, associant deux à deux les termes équidistants des deux termes extrêmes, j'écris ainsi cette fonction

$$\begin{aligned}(\alpha_n u^n + \beta_n v^n) &+ uv(\alpha_{n-2} u^{n-2} + \beta_{n-2} v^{n-2}) \\ &+ (uv)^2(\alpha_{n-4} u^{n-4} + \beta_{n-4} v^{n-4}) \\ &+ (uv)^3(\alpha_{n-6} u^{n-6} + \beta_{n-6} v^{n-6}) + \ldots\end{aligned}$$

En y faisant $x = yi$ et $x = -yi$, on voit que les constantes α_n et β_n doivent être conjuguées. La fonction de x et y, $\alpha_n u^n + \beta_n v^n$, a ses coefficients réels et, par suite aussi, sa différence avec $\varphi_n(x, y)$; cette différence doit être divisible par $uv = x^2 + y^2$, et le quotient de la division aura, comme $\varphi_n(x, y)$, ses coefficients réels, d'où il résulte que les constantes α_{n-2}, β_{n-2} doivent être aussi conjuguées. On voit que, d'une manière générale, les constantes α_k, β_k sont conjuguées pour toutes les valeurs de k. Je poserai $\alpha_k = a_k + b_k i$.

Je considère maintenant une droite A, menée par l'origine et faisant avec Ox l'angle ω. Si l'on prend cette droite comme axe des abscisses et la perpendiculaire menée par O pour axe des ordonnées et que l'on désigne par $\psi(X, Y)$ la somme des termes de degré impair en Y dans la nouvelle équation du faisceau considéré, on a

$$\begin{aligned}\psi(X, Y) = \sum&(a_k \sin k\omega + b_k \cos k\omega) \\ &\times (X^2 + Y^2)^{\frac{n-k}{2}} (C_k^1 X^{k-1} Y - C_k^3 X^{k-3} Y^3 + \ldots),\end{aligned}$$

k devant recevoir les valeurs n, $n-2$, $n-4$, ... Si A est un axe du faisceau, on doit avoir $\psi(X, Y) \equiv 0$, et, en particulier, $\psi(X, iX) \equiv 0$, ce qui exige que la somme $a_n \sin n\omega + b_n \cos n\omega$ soit nulle. Le quotient de $\psi(X, Y)$ par $X^2 + Y^2$ doit être nul aussi identiquement, et, devant l'être en particulier pour $Y = iX$, il faut que la somme $a_{n-2} \sin \overline{n-2}\,\omega + b_{n-2} \cos \overline{n-2}\,\omega$ soit nulle. En continuant ce raisonnement, on voit que l'on doit avoir

$$a_k \sin k\omega + b_k \cos k\omega = 0 \tag{1}$$

pour toutes les valeurs de k. Réciproquement, si un nombre ω vérifie toutes les équations (1), on aura, pour cette valeur de ω, $\psi(X, Y) \equiv 0$ et la droite A qui, menée par O, fait l'angle ω avec Ox, sera un axe du faisceau (φ_n).

La relation (1) exprime que la droite A fait partie du système de droites défini par l'équation

$$\alpha_k u^k = \beta_k v^k. \tag{2}$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau (φ_n) ait des axes est que toutes les équations binomes (2), où l'on regarderait $\frac{u}{v}$ comme une inconnue, aient des racines communes [1]. Soit $A_n u^h = B_n v^h$ l'équation dont les racines $\frac{u}{v}$ sont ces racines communes, lorsqu'elles existent. Le faisceau aura h axes définis par la formule

$$A_n(x + yi)^h = B_n(x - yi)^h.$$

L'application de la méthode que je viens d'indiquer à chacun des faisceaux correspondant aux divers groupes

---

[1] Les droites (2) sont les axes du faisceau défini par l'équation $\alpha_k u^k + \beta_k v^k = 0$; d'où il suit que la condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau (φ_n) ait des axes est aussi que tous les faisceaux correspondant aux équations

$$\alpha_n u^n + \beta_n v^n = 0, \qquad \alpha_{n-2} u^{n-2} + \beta_{n-2} v^{n-2} = 0, \qquad \ldots$$

aient des axes communs, qui sont les axes du faisceau (φ_n).

homogènes qui composent f conduit à la règle suivante :

Pour rechercher les axes passant par l'origine O *de la courbe* C *définie par l'équation entière et à coefficients réels* $f(x, y) = 0$ *(en coordonnées rectangulaires), je développe le polynome* $f[x+y, i(y-x)]$, *et, groupant ses termes deux à deux, je l'écris sous la forme d'une somme d'expressions telles que*

$$(xy)^p(\alpha_k x^k + \beta_k y^k)$$

$(p = 0$ ou $> 0)$: *soient* $\alpha_r x^r + \beta_r y^r$, $\alpha_s x^s + \beta_s y^s$, ... *ceux des binomes* $\alpha_k x^k + \beta_k y^k$ *qui ne sont pas réduits à des constantes. Si les binomes en* z

$$\alpha_r z^r - \beta_r, \quad \alpha_s z^s - \beta_s, \quad \ldots$$

sont premiers entre eux, la courbe C *n'a pas d'axe passant par* O. *Dans le cas contraire, si* $\mathrm{A}z^t - \mathrm{B}$ *est le plus grand commun diviseur de ces binomes, la courbe a* t *axes passant par* O : *ils sont définis par la formule*

$$\mathrm{A}(x+yi)^t = \mathrm{B}(x-yi)^t. \tag{3}$$

Quand toutes les expressions $\alpha_k x^k + \beta_k y^k$ *sont constantes, la courbe est un système de cercles ayant leur centre en* O, *et toutes les droites qui passent par ce point en sont des axes.*

3° *Axes placés d'une manière quelconque.* — Si la courbe C, dont je désigne le degré par m, a des axes, chacun d'eux doit être axe de la conique Γ représentée par l'équation

$$\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{m-1}}\right)^2 + \mathrm{C}_{m-1}^1 \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{m-2}\,\partial y}\right)^2 + \ldots$$
$$+ \mathrm{C}_{m-1}^n \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{m-n-1}\,\partial y^n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial y^{m-1}}\right)^2 = 0.$$

De là la méthode qui suit pour reconnaître si la courbe C a des axes, et pour les déterminer.

Lorsque la conique Γ a un nombre fini d'axes, on détermine séparément leurs équations et l'on essaye si chacun d'eux est axe de C. Lorsque Γ est un cercle, on détermine son centre et l'on est ramené à trouver les axes de C qui passent par ce point, que l'on prendra pour origine des coordonnées. Lorsque Γ est formée de deux droites parallèles, on essaye si la ligne des centres de Γ est axe de C, et l'on a ensuite à chercher les axes de C qui seraient parallèles à la normale à cette ligne des centres, normale que l'on prendra pour axe des abscisses ([1]).

Réduction de l'équation d'une courbe qui a des axes. — Je suppose que, les coefficients de f étant réels, la

---

([1]) J'indiquerai, au sujet de cette théorie, les deux résultats suivants :

1° Si $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + A_2 x^{m-2} y^2 + \ldots + A_m y^m$ est la somme des termes du $m^{\text{ième}}$ degré de f, l'inclinaison ω de tout axe de la courbe C doit vérifier la formule

$$\operatorname{tang} m\omega (A_0 - A_2 + A_4 - \ldots) = A_1 - A_3 + A_5 - \ldots,$$

quir ésulte de l'équation $\alpha_m u^m = \beta_m v^m$ où l'on fait $y = x \operatorname{tang}\omega$.

2° Si l'on connaît la direction $y = \mu x$ d'un axe de la courbe C, on peut obtenir l'équation de cet axe en annulant le quotient des deux expressions

$$\left(\mu \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2p-1)}, \qquad \left(\mu \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2p-2)},$$

où p désigne la plus petite des valeurs de h pour lesquelles l'expression $\left(\mu \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(h)}$ est nulle identiquement. Lorsque le degré m de la courbe est pair, si l'axe n'est pas perpendiculaire à une direction asymptotique de la courbe, l'équation de cet axe est

$$\left(\mu \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(m-1)} = 0.$$

courbe C admette plus de deux axes, sans en avoir une infinité. On peut rapporter la courbe à l'un d'eux, D, pris comme nouvel axe des abscisses, et à une perpendiculaire à D, sans connaître l'équation de D, en opérant de la manière suivante :

Les axes de C passent par un même point, qui est le centre O′ de la conique Γ. On transporte l'origine au point O′, et l'on sait calculer la formule (3) qui définit l'ensemble de ces axes. Ayant trouvé $A = p + qi$, $B = p - qi$, soit α l'angle compris entre o et π, dont la tangente est $-\frac{q}{p}$. L'un des angles ω satisfaisant à la formule $\operatorname{tang}\omega = -\frac{q}{p}$, qui donne les inclinaisons des axes sur Ox, est $\frac{\alpha}{t}$, et je supposerai que l'axe D, que je prends pour nouvel axe des abscisses, est celui qui fait cet angle $\frac{\alpha}{t}$ avec Ox; le nouvel axe des ordonnées sera pris passant par O′. La fonction

$$w_k = \alpha_k(x + yi)^k + \beta_k(x - yi)^k$$

devient, par ce changement de coordonnées,

$$\begin{aligned} w'_k = \quad & \alpha_k\left(\cos\frac{k}{t}\alpha + i\sin\frac{k}{t}\alpha\right)(X + Yi)^k \\ & + \beta_k\left(\cos\frac{k}{t}\alpha - i\sin\frac{k}{t}\alpha\right)(X - Yi)^k. \end{aligned}$$

Mais D étant aussi axe du faisceau $w_k = 0$, w'_k ne doit pas contenir de puissances impaires de Y, ce qui exige la condition

$$\alpha_k\left(\cos\frac{k}{t}\alpha + i\sin\frac{k}{t}\alpha\right) = \beta_k\left(\cos\frac{k}{t}\alpha - i\sin\frac{k}{t}\alpha\right),$$

d'où l'on déduit

$$\cos\frac{k}{t}\alpha = \frac{a_k}{\pm\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}, \qquad \sin\frac{k}{t}\alpha = \frac{-b_k}{\pm\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

Alors on a

$$w'_k = \pm\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\,[(X + Yi)^k + (X - Yi)^k].$$

Le signe à prendre dans cette dernière formule est le même que celui qui doit figurer dans les deux précédentes. Or celui-ci est connu, car on connaît, en grandeur et en signe, les sinus et cosinus de l'angle α, et, par suite, ceux de l'angle $\frac{k}{t}\alpha$, qui est un multiple de α. On connaît donc la nouvelle équation de C, dont le premier membre est la somme d'expressions telles que $(X^2 + Y^2)^n w'_k$, toutes connues.

SUR LA DÉTERMINATION DES PLANS DE SYMÉTRIE DES SURFACES ALGÉBRIQUES.

Dans tout ce qui va suivre, je supposerai les surfaces rapportées à des axes de coordonnées rectangulaires et définies par des équations cartésiennes.

Problème I. — *Sachant qu'une surface algébrique ne peut être symétrique que par rapport à certains plans* P *totalement connus ou par rapport à des plans appartenant à des familles connues de plans n'ayant pas toutes les directions de l'espace, reconnaître si cette surface admet des plans de symétrie et, le cas échéant, les déterminer.*

On vérifie directement si chacun des plans P (plan dont on connaît l'équation) est un plan de symétrie de la surface.

S'il y a une famille de plans parallèles à un plan donné Δ, on prend ce plan pour plan des xy, et soit

$$A z^q + B z^{q-1} + \ldots = 0,$$

la nouvelle équation entière de la surface, ordonnée suivant les puissances décroissantes de z (¹). Pour que la surface ait un plan de symétrie parallèle à Δ, il faut que q soit pair et que $\frac{B}{A}$ ait une valeur constante g; et l'équation de ce plan est $qz + g = 0$. On aura donc à essayer si le plan que définit cette équation est un plan de symétrie de la surface.

S'il y a une famille de plans perpendiculaires à un plan connu Δ', ce qui est le dernier cas à considérer, on prend celui-ci pour plans des xy, et A, B, C... désignant les coefficients des différentes puissances de z dans la nouvelle équation entière de la surface, on cherche les axes de symétrie communs des courbes du plan Δ' qui sont représentées par les équations obtenues en annulant celles des fonctions A, B, C,... qui ne sont pas des constantes. Lorsque ces courbes n'ont aucun axe commun, la surface n'a aucun plan de symétrie perpendiculaire à Δ'. Dans le cas contraire, en menant par chacun des axes communs un plan, perpendiculaire au plan de ces courbes, on obtient des plans de symétrie de la surface, et l'on a ainsi tous ceux qui sont perpendiculaires au plan Δ' (²).

Théorème. — *La détermination des plans de symétrie de la surface représentée par l'équation entière $f(x, y, z) = 0$, de degré m, peut être effectuée au moyen de la quadrique qui a pour équation $V_{m-1}(f) = 0$, toutes les fois que cette quadrique n'est pas une sphère.*

(¹) Si cette équation ne contenait pas z, tous les plans parallèles à Δ seraient des plans de symétrie de la surface.

(²) La résolution de ce problème par les méthodes que j'ai indiquées ne comporte aucun calcul d'élimination.

En effet, si la surface a des plans de symétrie, ils doivent se trouver parmi les plans principaux de cette quadrique; or ceux-ci font partie des plans énumérés dans l'énoncé du problème qui précède, puisque l'on suppose la quadrique différente d'une sphère (1).

MÉTHODES PRATIQUES POUR LA RECHERCHE DES PLANS DE SYMÉTRIE DES SURFACES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME ORDRE.

Surfaces du troisième ordre. — Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation entière et à coefficients réels d'une surface de troisième ordre S, dont il s'agit de rechercher les plans de symétrie. J'admets que cette surface n'est pas formée de trois plans parallèles.

Je considère les deux surfaces α et β représentées par les équations

$$U(f) = 0, \qquad V_2(f) = 0,$$

dont la première est au plus du premier degré, et dont la seconde est du deuxième degré. Tout plan de symétrie de S doit être un plan de symétrie de chacune de ces deux surfaces.

Si, comme il arrivera généralement, le plan α est déterminé et à distance finie, on saura trouver ceux de ses plans de symétrie qui sont plans de symétrie de S (problème I), et la question sera résolue.

---

(1) Lorsque cette quadrique est une sphère, de centre (x_0, y_0, z_0), si $\Sigma\varphi_n(x, y, z)$ désigne le polynome $f(x + x_0, y + y_0, z + z_0)$ ordonné par groupes homogènes, il suffira, d'après le problème I, de savoir déterminer les plans de symétrie de l'un des cônes $\varphi_n = 0$ qui ne sont pas réduits à une sphère simple ou multiple, pour savoir déterminer les plans de symétrie de la surface, ceux-ci devant se trouver parmi ceux-là.

Dans le cas contraire, j'aurai recours à la quadrique β. Si cette quadrique n'est pas une sphère, on saura reconnaître ceux de ses plans de symétrie qui sont plans de symétrie de S (problème I). Si β est une sphère, le cône asymptotique de S est formé de trois plans perpendiculaires deux à deux ([1]). Je transporte l'origine des coordonnées au centre ω de la sphère β, et soit

$$F(x, y, z) + \varphi(x, y, z) = 0$$

la nouvelle équation entière de S, F désignant les termes du troisième degré. L'équation $\varphi(x, y, z) = 0$ représente une surface S_1 qui est au plus du second ordre. Les plans de symétrie de S doivent passer par ω et sont tous les plans de symétrie de S_1 qui seraient en même temps plans de symétrie du cône (F) défini par l'équation

$$F(x, y, z) = 0.$$

Si la fonction φ n'est pas de la forme

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + B,$$

([1]) Pour démontrer ce résultat, on peut, les premiers membres des équations de α et β étant des covariants de f, prendre l'équation de S sous la forme, à coefficients réels,

$$\begin{aligned} ay^3 + bz^3 + 3cy^2z + 3dyz^2 + 3hz^2x \\ + 3kzx^2 + 3nxy^2 + 6gxyz + \ldots = 0, \end{aligned}$$

où je n'écris que les termes du troisième degré. Alors les équations de α et β sont

$$(h + n)x + (a + d)y + (b + c + k)z + \text{const.} = 0,$$

$$\begin{aligned} k^2z^2 + (nx + ay + cz)^2 + (hx + dy + bz)^2 + 2(ny + gz)^2 \\ + 2(kx + gy + hz)^2 + 2(gx + cy + dz)^2 + \psi = 0, \end{aligned}$$

ψ ne renfermant aucun terme du second degré. Or, si l'on suppose $n = -h$, $d = -a$, $k = -(b + c)$, les conditions pour que β soit une sphère sont

$$a = b = ch = 0.$$

A et B étant constants, la considération de la surface S_1 permettra de trouver les plans de symétrie de S (problème I). Dans le cas contraire, ces plans sont les plans de symétrie du cône (F), c'est-à-dire les six bissecteurs des angles formés par les trois plans rectangulaires auxquels se réduit actuellement ce cône. Les trois droites communes aux trois cônes du second ordre

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

sont les arêtes du trièdre trirectangle (F), et l'on saura par conséquent calculer les équations séparées des trois faces de ce trièdre et par suite celles des six plans de symétrie de la surface S [1].

Dans les surfaces de troisième ordre, qui possèdent la symétrie plane sans être cylindriques ni de révolution, le nombre des plans de symétrie est l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 6.

Le Tableau suivant fait connaître la forme à laquelle on peut ramener l'équation de celles de ces surfaces qui ont plusieurs plans de symétrie.

---

[1] J'indique incidemment ce procédé pour reconnaître si la surface S est formée de trois plans perpendiculaires deux à deux. D'abord elle doit avoir un centre unique, que je détermine. Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de ce point, la fonction $f(x+x_0, y+y_0, z+z_0)$ doit être homogène. Le plan α doit être indéterminé, et la quadrique β doit être une sphère. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes, et l'on sait calculer les équations des trois plans.

Nombre des plans de symétrie.	Positions relatives de ces plans.	Forme à laquelle peut se ramener l'équation de la surface.
2	Ils sont rectangulaires.	$z = \dfrac{ax^2 + by^2 + d}{a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + d_1}$,
3	Ils passent par une même droite et font 2 à 2 l'angle de 60°.	$z = \dfrac{a(x^3 - 3xy^2) + b(x^2 + y^2) + d}{a_1(x^2 + y^2) + c_1 z^2 + d_1}$,
4	Trois d'entre eux passent par une même droite et font 2 à 2 l'angle de 60°; le quatrième est perpendiculaire à cette droite.	$z^2 = a(x^3 - 3xy^2) + b(x^2 + y^2) + d$,
6	Ils sont les bissecteurs d'un trièdre trirectangle.	$xyz + a(x^2 + y^2 + z^2) + b = 0$.

On saura calculer la forme réduite qui correspond à chacun de ces quatre cas.

Surfaces du quatrième ordre. — Je commence par traiter deux questions relatives aux cônes du quatrième ordre.

PROBLÈME II. — *Reconnaître si un cône du quatrième ordre C, non formé de deux sphères de rayon nul, et défini par son équation, admet les neuf plans de symétrie du cube, et, en cas d'affirmative, trouver les équations séparées de ces neuf plans.*

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation entière du cône C rapporté à son sommet. Pour qu'il ait la symétrie du cube, il est nécessaire et suffisant, ainsi qu'il résulte d'une formule générale donnée par M. Goursat [1], que l'on

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, juin 1887.

ait identiquement

$$F(x, y, z) \equiv \lambda(x^2 + y^2 + z^2)^2 + \mu(P^4 + Q^4 + R^4),$$

λ, μ étant deux constantes et P, Q, R trois formes linéaires

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z, \qquad Q = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z,$$
$$R = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,$$

dont les coefficients sont les cosinus directeurs de trois droites rectangulaires deux à deux.

Si F satisfait à l'identité précédente, les trois dérivées partielles $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ doivent vérifier celles-ci

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} \equiv \lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\mu(\alpha^2 P^2 + \alpha'^2 Q^2 + \alpha''^2 R^2), \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \equiv \lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 12\mu(\beta^2 P^2 + \beta'^2 Q^2 + \beta''^2 R^2), \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} \equiv \lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 12\mu(\gamma^2 P^2 + \gamma'^2 Q^2 + \gamma''^2 R^2), \end{cases}$$

où l'on pose

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Réciproquement, si l'on peut trouver un système des deux constantes λ, μ et des trois fonctions P, Q, R, tel que les identités (4) aient lieu, le cône C aura la symétrie du cube, car, en vertu de ces identités, la fonction

$$F - \lambda(x^2 + y^2 + z^2)^2 - \mu(P^4 + Q^4 + R^4)$$

doit avoir chacune des formes homogènes

$$x\psi(y, z) + \chi(y, z), \qquad y\psi_1(z, x) + \chi_1(z, x),$$
$$z\psi_2(x, y) + \chi_2(x, y),$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les six fonctions ψ, χ, ψ_1, χ_1, ψ_2, χ_2 sont nulles identiquement.

J'ajoute que les identités (4) ne peuvent être vérifiées par un second système des constantes et des formes linéaires considérées, car si l'on a

$$F \equiv \lambda u + \mu(P^4 + Q^4 + R^4) \equiv \lambda_1 u + \mu_1(P_1^4 + Q_1^4 + R_1^4),$$

on en déduit

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \equiv 12(\lambda + \mu)(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$\equiv 12(\lambda_1 + \mu_1)(x^2 + y^2 + z^2),$$

ce qui exige $\lambda_1 + \mu_1 = \lambda + \mu$, et l'on doit avoir alors

$$\mu(Q^2R^2 + R^2P^2 + P^2Q^2) \equiv \mu_1(Q_1^2R_1^2 + R_1^2P_1^2 + P_1^2Q_1^2),$$

d'où

$$P_1 \equiv P, \qquad Q_1 \equiv Q, \qquad R_1 \equiv R, \qquad \mu_1 = \mu.$$

Ceci posé, je considère les trois cônes du second ordre C_1, C_2, C_3, qui ont pour équations

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \lambda x^2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \lambda y^2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \lambda z^2.$$

Si, pour aucune valeur de λ, ces trois cônes n'ont pas trois plans de symétrie communs, le cône C n'aura pas la symétrie du cube, car, s'il possédait une telle symétrie, les trois cônes C_1, C_2, C_3 devraient, d'après les identités (4), être symétriques par rapport à chacun des trois plans $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$.

Je suppose, en second lieu, qu'il existe des valeurs de λ pour lesquelles les trois cônes C_1, C_2, C_3 aient au moins trois plans de symétrie communs. Pour chacune d'elles, ils auront certainement en commun trois plans de symétrie rectangulaires, dont je prends les équations

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \qquad Q = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0,$$
$$R = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = 0;$$

en fonction des cosinus directeurs des normales à ces trois plans. Si, pour une de ces valeurs de λ et pour une valeur convenable de μ, les identités (4) ont lieu, le cône C aura les neuf plans de symétrie du cube, et ces plans seront les trois plans $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, et les bissecteurs des angles qu'ils forment deux à deux. Si, pour aucune de ces valeurs de λ, il est impossible de satisfaire aux identités (4) avec une même valeur de μ, le cône C n'aura pas la symétrie du cube.

Théorème. — *Étant donnée l'équation entière et homogène* $F(x, y, z) = 0$ *d'un cône du quatrième ordre* C, *si les deux surfaces* α_1, γ_1, *qui ont pour équations* $U(F) = 0$, $V_3(F) = 0$, *sont deux sphères, finies ou infinies, le cône* C *n'admet aucun plan de symétrie, ou bien il a les neuf plans de symétrie d'un cube.*

En effet, je suppose que le cône C ait un plan de symétrie quelconque. Son équation peut être ramenée à la forme

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) = \lambda z^4 + z^2(Ax^2 + By^2)\\ + ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + gy^4 = 0,\end{aligned}$$

pour laquelle les équations des surfaces α_1 et γ_1 sont

$$\begin{aligned}[A + 6(a + c)]x^2 + [B + 6(g + c)]y^2\\ + (A + B + 6\lambda)z^2 + 12(b + d)xy = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^2x^2 + B^2y^2 + (A^2 + B^2 + 12\lambda^2)z^2\\ + 12[(ax + by)^2 + (dx + gy)^2]\\ + 36[(bx + cy)^2 + (cx + dy)^2] = 0.\end{aligned}$$

Les six relations qui expriment que ces deux surfaces α_1, γ_1 sont deux sphères peuvent s'écrire

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&d = -b, \qquad b(a - g) = 0,\\ &A = 6(g + c - \lambda), \qquad B = 6(a + c - \lambda),\\ &(a - g)(a + g + 3c - 3\lambda) = 0,\\ &2\lambda^2 - 3(a + c)\lambda + a^2 - 2b^2 + 3ac = 0.\end{aligned}\right.$$

La seconde conduit à faire deux hypothèses :

1° $g = a$. Alors $A = B = 6(a + c - \lambda)$, et l'on a

$$\Phi = \lambda z^4 + 6(a + c - \lambda)z^2(x^2 + y^2) + a(x^4 + y^4) + 4b(x^3y - xy^3),$$

ou, en tenant compte de la dernière des relations (5),

$$\Phi = \lambda(x^2 + y^2 + z^2)^2 + [6(a + c) - 8\lambda]z^2(x^2 + y^2) + [\sqrt{a - \lambda}(x^2 - y^2) + xy\sqrt{2a + 6c - 4\lambda}]^2.$$

Or, par une transformation de coordonnées effectuée dans le plan des xy, la fonction du second degré comprise entre crochets peut être ramenée à la forme $xy\sqrt{6(a + c) - 8\lambda}$, et la fonction Φ devient

$$\lambda(x^2 + y^2 + z^2)^2 + [6(a + c) - 8\lambda](y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2).$$

Donc le cône C a la symétrie du cube.

2° $b = 0$. Alors $d = 0$, $3\lambda = a + g + 3c$, $A = 2(2g - a)$, $B = 2(2a - g)$, et la dernière des relations (5) se décompose en ces deux-ci

$$3c = 2a - g, \qquad 3c = 2g - a.$$

Soit, pour fixer les idées, $c = \frac{2a - g}{3}$. On a

$$\begin{aligned}\Phi &= az^4 + 2z^2[(2g - a)x^2 + (2a - g)y^2] \\ &\quad + ax^4 + gy^4 + 2(2a - g)x^2y^2 \\ &= (2a - g)(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\ &\quad + (g - a)[2y^4 + (x^2 + z^2)^2 + 4x^2z^2].\end{aligned}$$

Or, si l'on fait tourner de 45° les axes des x et des z dans leur plan, cette fonction Φ devient

$$g(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4(a - g)(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2),$$

et l'on voit que, dans ce cas encore, le cône C a la symétrie du cube.

J'ajoute que, réciproquement, si le cône C possède la symétrie du cube, les deux cônes α_1 et γ_1 sont deux sphères.

Je considère maintenant une surface quelconque du quatrième ordre S, représentée par l'équation entière $f(x, y, z) = 0$, et je me propose de rechercher ses plans de symétrie. Je désigne par α et γ les deux surfaces qui ont pour équations

$$U(f) = 0, \qquad V_3(f) = 0.$$

La surface γ est *du second ordre*. La surface α est *au plus du second ordre*. Tout plan de symétrie de S doit être un plan de symétrie de chacune de ces deux surfaces.

Je distingue deux cas :

1° *Les deux surfaces α et γ ne sont pas deux sphères concentriques (la surface α pouvant être une sphère située tout entière à l'infini).*

Je détermine les plans de symétrie des deux surfaces α, γ.

Si elles n'en ont pas en commun, la surface S n'admet aucun plan de symétrie. Si elles ont des plans de symétrie communs, les directions de ces plans sont totalement déterminées ou ne dépendent que d'un seul paramètre ; donc on saura reconnaître ceux de ces plans qui seraient des plans de symétrie de S (problème I).

2° *Les deux surfaces α, γ sont deux sphères concentriques (la sphère α pouvant être tout entière à l'infini).*

Je transporte l'origine au centre commun ω de ces deux sphères, et soit

$$F(x, y, z) + \varphi(x, y, z) = 0$$

la nouvelle équation de S, $F(x, y, z)$ désignant l'ensemble des termes du quatrième degré. L'équation $\varphi(x, y, z) = 0$ représente une surface S_1 qui est au plus du troisième ordre et dont on sait par conséquent trouver tous les plans de symétrie. Les plans de symétrie de S doivent passer par le point ω et sont tous les plans de symétrie de S_1 qui seraient en même temps plans de symétrie du cône (F) défini par l'équation $F(x, y, z) = 0$. Je laisse de côté le cas où S serait formée de deux sphères concentriques. Quand $\varphi(x, y, z)$ n'a pas la forme $A(x^2 + y^2 + z^2) + B$, A et B étant des constantes, les plans de symétrie de S_1 passant par ω n'ont pas toutes les directions de l'espace, et l'on saura alors reconnaître ceux de ces plans qui seraient plans de symétrie de S (problème I). Dans l'hypothèse contraire, les plans de symétrie de S sont les mêmes que ceux du cône (F). Mais les deux surfaces α, γ étant des sphères, il en est de même des deux surfaces α_1, γ_1 relatives au cône (F). Donc ici la surface S n'a aucun plan de symétrie, ou a les neuf plans de symétrie d'un cube. Il n'y aura dès lors qu'à résoudre le problème II sur le cône (F).

Si (F) admet les neuf plans de symétrie du cube, on déterminera leurs équations, et l'on aura les plans de symétrie de S. Si le cône (F) n'a pas la symétrie du cube, la surface S n'admet aucun plan de symétrie.

Le problème est donc entièrement résolu.

Dans les surfaces du quatrième ordre qui possèdent la symétrie plane sans être cylindriques ni de révolution, le nombre des plans de symétrie est l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9.

Le Tableau suivant indique la forme à laquelle on peut ramener l'équation de celles de ces surfaces qui admettent plusieurs plans de symétrie.

Nombre des plans de symétrie.	Positions relatives de ces plans.		Forme à laquelle peut se ramener l'équation de la surface.
2	Ils sont rectangulaires.	(1)	$\left\{\begin{array}{l} A z^4 + B z^2(ax^2 + by^2 + c) \\ \quad + C z(a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1) + a_2 x^4 \\ \quad + b_2 x^2 y^2 + c_2 y^4 + d_2 x^2 + h_2 y^2 + k_2 = 0. \end{array}\right.$
3	1° Ils sont rectangulaires deux à deux;		Forme (1) où l'on fait $C = 0$.
	2° Ils passent par une même droite et font deux à deux l'angle de 60°.	(2)	$\left\{\begin{array}{l} A z^4 + B z^2(x^2 + y^2 + c) \\ \quad + C z[a_1(x^3 - 3xy^2) + b_1(x^2 + y^2) + c_1] \\ \quad + a_2(x^3 - 3xy^2) + b_2(x^2 + y^2)^2 + c_2(x^2 + y^2) + d_2 = 0. \end{array}\right.$
4	1° Trois d'entre eux passent par une même droite et font deux à deux l'angle de 60°; le quatrième est perpendiculaire à cette droite;		Forme (2) où l'on fait $C = 0$.
	2° Ils passent par une même droite et font deux à deux l'angle de 45°.	(3)	$\left\{\begin{array}{l} A z^4 + B z^2(x^2 + y^2 + c) + C z(x^2 + y^2 + c_1) \\ \quad + a_2(x^4 - 6x^2 y^2 + y^4) \\ \quad + b_2(x^2 + y^2)^2 + c_2(x^2 + y^2) + d_2 = 0. \end{array}\right.$
5	Quatre d'entre eux passent par une même droite et font deux à deux l'angle de 45°; le cinquième est perpendiculaire à cette droite.		Forme (3) où l'on fait $C = 0$.
6	Ils sont les bissecteurs d'un trièdre trirectangle.	(4)	$\left\{\begin{array}{l} A(x^2 + y^2 + z^2)^2 + B(x^4 + y^4 + z^4) \\ \quad + C xyz + D(x^2 + y^2 + z^2) + E = 0. \end{array}\right.$
9	Ils sont les faces et les bissecteurs d'un même trièdre trirectangle.		Forme (4) où l'on fait $C = 0$.

On saura calculer la forme réduite qui correspond à chacun de ces six cas ([1]).

SUR UN MOYEN DE RECONNAITRE SI UNE SURFACE DU TROISIÈME, DU QUATRIÈME OU DU CINQUIÈME ORDRE EST DE RÉVOLUTION.

Je considère une surface algébrique S, autre qu'un système de plans parallèles, et dont l'ordre m est l'un des nombres 3, 4, 5. Je la suppose définie, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, par l'équation entière et à coefficients réels $f(x, y, z) = 0$. Soient α et α' les deux surfaces que représentent les équations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

$$\sum \frac{P_{m-1}}{P_\lambda P_\mu P_\nu} \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^\lambda \partial y^\mu \partial z^\nu} \right)^2 = 0 \qquad (\lambda + \mu + \nu = m - 1),$$

dont la seconde est du deuxième degré. On veut reconnaître si la surface S est de révolution et, en cas d'affirmative, trouver son axe de révolution. On peut y arriver en appliquant le théorème suivant, qui découle de ce fait que, lorsque S a une infinité de plans de symétrie passant par une même droite, les deux surfaces α et α', qui possèdent toutes les symétries de S, doivent être aussi de révolution autour de cette droite.

THÉORÈME. — *Quand les deux surfaces α et α' ne sont pas deux sphères concentriques :*

1° *Si elles sont toutes les deux de révolution, autour*

([1]) Les plans de coordonnées par rapport auxquels les équations des surfaces des troisième et quatrième ordres à plans de symétrie prennent les formes réduites données dans les deux Tableaux précédents sont les plans de symétrie eux-mêmes, ou des plans perpendiculaires à leurs droites d'intersection, ou des bissecteurs d'angles formés par ces plans de symétrie.

d'une seule et même droite, ou autour d'une infinité de mêmes droites parallèles entre elles, la surface S peut être de révolution, mais seulement autour de cette droite ou d'une parallèle à ces droites.

2° *Dans tous les autres cas, la surface S n'est pas de révolution.*

Quand les deux surfaces α et α' sont deux sphères concentriques :

1° *Si la surface S est du troisième ou du cinquième ordre, elle n'est pas de révolution* (1);

2° *Si la surface S est du quatrième ordre, pour qu'elle soit de révolution, il faut et il suffit que le cône des directions asymptotiques de S soit une sphère double, et que, en appelant x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre commun des deux sphères α et α', et M le coefficient de x^4 dans $f(x, y, z)$, la surface correspondant à l'équation*

$$f(x,y,z) - M[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^2 = 0,$$

qui est au plus du troisième degré, soit de révolution autour d'une droite passant par le point (x_0, y_0, z_0), et l'axe de révolution de cette dernière surface est le même que celui de S (2).

Comme il est toujours facile de vérifier, par une transformation de coordonnées bien évidente, si une surface algébrique définie analytiquement est de révolution

---

(1) Quand une surface du cinquième ordre est de révolution, on peut vérifier, en prenant son axe de révolution pour un des axes de coordonnées, que la surface α n'est jamais d'ordre inférieur à 3 si la quadrique α' est une sphère.

(2) On regardera une surface indéterminée ou rejetée à l'infini comme une surface de révolution autour d'une droite quelconque de l'espace, ou encore comme une sphère concentrique à toute sphère de l'espace.

autour d'une droite parallèle à une direction *connue*, et de déterminer cette droite, on voit que le cas d'une surface du troisième ordre sera complètement résolu par le théorème qui précède, et que le cas d'une surface du quatrième ou du cinquième ordre, s'il n'est directement résolu par ce théorème, se trouvera ramené au cas d'une surface du troisième ordre. En définitive, la question est résolue dans les trois cas.

[P1f]

SUR LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES PLANES;

Par M. Georges BROCARD,
Professeur au lycée du Havre.

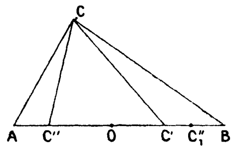
On sait que si l'on joint un point M du plan d'un triangle aux trois sommets, on obtient trois droites qui rencontrent les côtés en des points A′, B′, C′, et que, si l'on désigne par $\frac{\mu}{\lambda}$ et $\frac{\nu}{\mu}$, les valeurs algébriques des rapports $\frac{AC'}{C'B}$ et $\frac{BA'}{A'C}$, le rapport $\frac{CB'}{B'A}$ aura pour valeur algébrique $\frac{\lambda}{\nu}$; les quantités λ, μ, ν sont appelées *coordonnées barycentriques du point* M.

On sait aussi que si l'on considère deux points définis par les coordonnées λ, μ, ν et λ', μ', ν' entre lesquelles existent les relations $\frac{\lambda\lambda'}{a^2} = \frac{\mu\mu'}{b^2} = \frac{\nu\nu'}{c^2}$, ces points sont dits *inverses l'un de l'autre*.

Considérons alors les transversales CC′ et CC″ passant par deux points inverses; on aura $\frac{AC'}{C'B} \times \frac{AC''}{C''B} = \frac{b^2}{a^2}$.

Mais si nous prenons le point C''_1 symétrique de C'' par rapport au milieu de AB (la droite CC''_1 est dite *isoto-*

Fig. 1.



mique de CC''), la relation précédente pourra être écrite ainsi :

$$\frac{AC'}{C'B} \times \frac{C''_1 B}{AC''_1} = \frac{b^2}{a^2}$$

ou encore

$$\frac{C'A}{C'B} : \frac{C''_1 A}{C''_1 B} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Le premier membre de cette relation est le rapport anharmonique des quatre points C', C''_1, A, B; ce rapport est donc constant et égal à $\frac{b^2}{a^2}$, quels que soient les points inverses considérés.

Or, parmi les points inverses se trouvent les deux points cycliques du plan; résolvons, en effet, par rapport à $\frac{\mu}{\lambda}$ les deux équations

$$a^2\mu\nu + b^2\nu\lambda + c^2\lambda\mu = 0,$$
$$\lambda + \mu + \nu = 0$$

qui représentent, en coordonnées barycentriques, le cercle circonscrit au triangle et la droite de l'infini; nous obtenons l'équation

$$(1) \qquad a^2\mu^2 + (a^2 + b^2 - c^2)\lambda\mu + b^2\lambda^2 = 0,$$

d'où

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{c^2 - a^2 - b^2 \pm \sqrt{(c^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2}}{2a^2}$$

ou

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{-2ab\cos C \pm 4iS'}{2a^2}$$
$$= \frac{-2ab\cos C \pm 2abi\sin C}{2a^2} = -\frac{b}{a}e^{\pm Ci}.$$

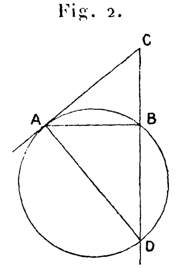
Le produit de ces deux valeurs est bien égal à $\frac{b^2}{a^2}$, comme le montrait immédiatement d'ailleurs l'équation (1). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si, par le sommet* C *d'un triangle* ABC, *on mène une droite isotrope, et la droite isotomique de l'autre droite isotrope, ces droites forment, avec les deux côtés du triangle issus du sommet* C, *un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à* $\frac{b^2}{a^2}$.

Remarques. — 1° Si l'on divise les deux valeurs de $\frac{\mu}{\lambda}$ racines de l'équation (1), on retrouve le théorème de Laguerre.

2° Dans le cas du triangle isocèle ($b = a$), le rapport anharmonique est égal à 1, c'est-à-dire que les deux droites isotropes menées par C sont isotomiques.

Fig. 2.



3° Si a est égal à l'unité de longueur, le rapport anharmonique précédent est le carré du nombre qui mesure AC. On a ainsi le moyen de faire la transformation homographique de la distance de deux points.

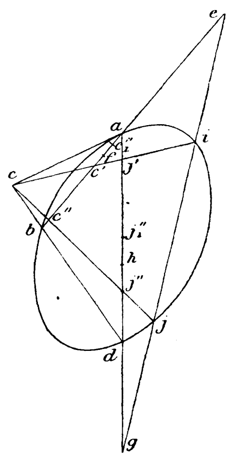
4° Si l'on donne deux longueurs AB, CD sans extrémité commune, on pourra les remplacer par deux autres proportionnelles et ayant une extrémité commune; par exemple, on décrira de A et C comme centres des circonférences ayant leurs rayons proportionnels à AB et CD, et l'on appliquera le théorème précédent au triangle formé par les points A et C et l'un des points de rencontre de ces circonférences.

Application. — Soit à transformer le théorème suivant :

Si d'un point C *extérieur on mène à une circonférence une tangente* CA *et une sécante* CBD*, on a*

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CA}{CD}.$$

Fig. 3.



Soient, dans la transformée :

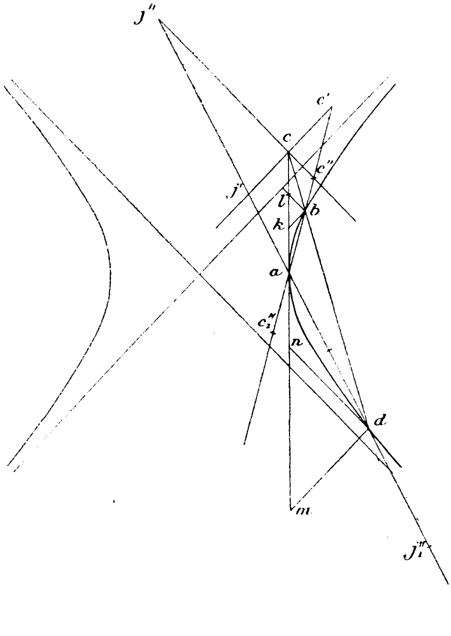
i et j les transformés des points cycliques;
c' et c'' les points de rencontre de ci et cj avec ab;
f le conjugué harmonique de e par rapport à ab;

c''_1 celui de c'' par rapport à ef;
j' et j'' les points de rencontre de ci et cj avec ad;
h le conjugué harmonique de g par rapport à ad;
j''_1 celui de j'' par rapport à gh.

Le théorème transformé consiste en ce que les rapports anharmoniques $(c'c''_1ba)$ et $(j'j''_1ad)$ sont égaux.

Nous obtenons ainsi une propriété générale des coniques, d'où nous pouvons déduire des propriétés particulières en donnant à la droite ij, qui est en définitive une droite quelconque, des situations particulières.

Fig. 4.



Supposons, par exemple, que la conique soit une hyperbole et que la droite ij soit à l'infini.

Les droites ci et cj sont alors parallèles aux asymptotes, c''_1 et j''_1 sont symétriques de c'' et j'' par rapport aux milieux de ab et ad, de sorte qu'on a

$$c''_1 b = ac'', \qquad c''_1 a = bc'', \qquad j''_1 a = dj'', \qquad j''_1 d = aj''.$$

L'égalité

$$\frac{c'b}{c'a} : \frac{c''_1 b}{c''_1 a} = \frac{j'a}{j'd} : \frac{j''_1 a}{j''_1 d}$$

devient ainsi

$$\frac{c'b}{c'a} \times \frac{bc''}{ac''} = \frac{j'a}{j'd} \times \frac{aj''}{dj''}$$

ou

$$\frac{c'b}{c'a} \times \frac{c''b}{c''a} = \frac{j'a}{j'd} \times \frac{j''a}{j''d}.$$

Or, en menant par les points b et d des parallèles aux asymptotes, qui rencontrent la tangente aux points l, k, n, m, on voit facilement que cette égalité devient

$$\frac{ck}{ca} \times \frac{cl}{ca} = \frac{ca}{cm} \times \frac{ca}{cn},$$

d'où

$$ca^4 = ck.cl.cm.cn.$$

Mais on a aussi

$$\frac{cl}{cn} = \frac{ck}{cm} = \frac{cb}{cd}.$$

Donc $cl \times cm = ck \times cn = ca^2$. D'où ce théorème :

Si d'un point extérieur on mène à une hyperbole une tangente et une sécante, et qu'on projette sur la tangente les deux segments de la sécante suivant des droites respectivement parallèles aux deux asymptotes, le produit des segments ainsi projetés est constant et égal au carré de la tangente.

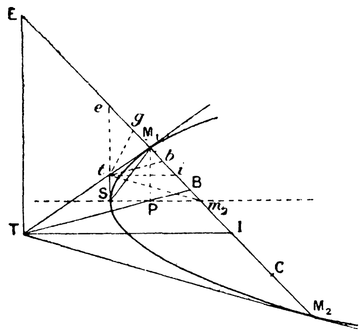
On trouvera facilement d'une façon analogue, en supposant que la conique soit une parabole et la droite ij à l'infini, le théorème suivant :

Si d'un point extérieur on mène à une parabole une tangente et une sécante et que l'on projette sur *la tangente, parallèlement à l'axe, les deux segments de la sécante, le produit des segments ainsi projetés est constant et égal au carré de la tangente.*

CORRESPONDANCE.

M. M. (Paris). — Dans son Travail *Sur les cordes normales de la parabole,* qui vient de paraître, p. 274, M. d'Ocagne trouve par le calcul quelques propriétés qu'on peut établir ainsi par la Géométrie.

Soit M_1M_2 une corde normale en M_1 à une parabole de sommet S. Les tangentes en M_1, M_2 se rencontrent



en T et M_1M_2 coupe en m_2 l'axe de la parabole. La droite TI, parallèle à l'axe, passe par le point I milieu de M_1M_2.

La tangente au sommet S coupe M_1T en t et la parallèle à l'axe menée de ce point passe par le point i milieu de M_1m_2. De là, puisque les triangles tM_1i, TM_1I sont semblables, il résulte que tm_2 est parallèle à TM_2. L'angle m_2tM_1 est donc égal à l'angle que font entre elles les tangentes TM_1, TM_2; mais les points S, t, M_1,

m_2 étant sur une circonférence de cercle, l'angle $m_2 t M_1$ est égal à l'angle $m_2 S M_1$; donc, *l'angle compris entre les tangentes* TM_1, TM_2 *est égal à l'angle de* SM_1 *et de l'axe de la parabole.*

Il résulte d'une propriété due à Ribaucour ([1]) que la perpendiculaire TE à l'axe rencontre $M_1 M_2$ en un point E tel que $M_1 E$ est égal au rayon de courbure $M_1 C$ de la parabole en M_1.

Abaissons la perpendiculaire $M_1 P$ sur l'axe. On a

$$\frac{EM_1 \text{ ou } M_1 C}{M_1 M_2} = \frac{e M_1}{M_1 m_2} = \frac{SP}{P m_2},$$

ce qui montre que *le rapport du rayon de courbure en* M_1 *à la corde normale correspondant à ce point est égal au rapport de l'abscisse de* M_1 *au paramètre de la parabole.*

On demande de *trouver la corde normale qui détache sur la parabole l'arc de longueur minimum.*

Supposons que $M_1 M_2$ soit cette corde. Pour un déplacement infiniment petit de cette droite, qui reste normale à la parabole, les arcs compris entre M_1, M_2 et leurs positions nouvelles sont égaux; on a alors $M_1 T \times M_1 C = M_2 T \times M_2 C$ ([2]). Ceci montre que le centre de courbure C est, par rapport à I, le symétrique du point B où la bissectrice de l'angle $M_2 T M_1$ coupe $M_1 M_2$, ou encore que $M_2 B = M_1 C = M_1 E$. Menons tb parallèlement à TB; il résulte de ce que nous venons de trouver que $m_2 b = M_1 e$.

La perpendiculaire tg à tm_2 passe par le milieu de $M_2 e$; on doit donc avoir $m_2 b = 2 M_1 g$.

Il résulte de là facilement que $b M_1 = M_1 g$ et que l'angle $m_2 t M_1$ est égal à 60°. On peut dire alors : *Pour*

([1]) *Principes et développement de Géométrie cinématique,* p. 445.
([2]) *Loc cit.,* p. 51, formule (III').

le pied M_1 *de la corde qui détache sur la parabole un arc de longueur minimum, le rayon de courbure de la parabole est les deux tiers de cette corde;* ou encore : *l'abscisse de* M_1 *est les deux tiers du paramètre de la parabole,* et enfin que *la droite* SM_1 *fait avec l'axe un angle de* 60°.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1666.

Par un point fixe du plan d'un cercle donné (C), *on mène une corde quelconque dont les extrémités sont* A *et* B. *Le cercle* (Σ) *de diamètre* PA *rencontre le cercle* C *en un second point* A'; *le cercle* (Σ'), *de diamètre* PB, *rencontre le cercle* (C) *en un second point* B'. *Montrer que le point de concours des droites* AA' *et* BB', *ainsi que le point de concours des tangentes communes aux cercles* (Σ) *et* (Σ') *sont tous deux sur une même droite fixe.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION ANALYTIQUE.

Par M. A. Droz-Farny.

Choisissons un système orthogonal d'axes avec O comme origine et OP comme axe des x et posons OP $= d$.

Équation du cercle (C)

$$x^2+y^2=r^2. \tag{I}$$

Équation de PAB

$$y=m(x-d). \tag{II}$$

Le cercle (Σ) aura pour équation, en représentant par x', y' les coordonnées de A,

$$(x-d)(x-x')+y(y-y')=0,$$

ou

$$x^2+y^2-x(d+x')-yy'+dx'=0.$$

De même l'équation de Σ' est :

$$x^2+y^2-x(d+x'')-yy''+dx''=0.$$

Il en résulte que les équations de AA' et de BB' sont respectivement

$$x(d+x')+yy'-dx'-r^2=0$$
$$x(d+x'')+yy''-dx''-r^2=0.$$

On obtiendra le lieu du point d'intersection de ces droites en éliminant entre ces équations les variables x', y', x'' et y''. On peut procéder de la manière suivante : les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite PA, donc $y'=m(x'-d)$. En portant cette valeur dans l'équation de AA', elle devient

$$x'(x+my-d)+dx-myd-r^2=0;$$

on a de même

$$x''(x+my-d)+dx-myd-r^2=0;$$

Les deux variables x' et x'' vérifiant simultanément une relation de la forme $Ax+B=0$, il faut que $A=0$ et $B=0$, d'où

$$x+my-d=0 \qquad \text{et} \qquad dx-myd-r^2=0.$$

En éliminant entre ces deux équations la seule variable m, on a, pour le lieu,

$$x=\frac{d^2+r^2}{2d},$$

ligne droite perpendiculaire sur OP.

Cherchons maintenant le lieu du point de rencontre des tangentes communes aux cercles (Σ) et (Σ').

Représentons, pour cela, par C' et C'' les centres de (Σ) et (Σ') et par R le point de coupe des tangentes extérieures aux deux circonférences.

Évidemment le point P doit être intérieur à (C); comme ce point est le centre de similitude interne de (Σ) et (Σ'), on aura

$$(C'C''PR)=-1.$$

Or les abscisses respectives de C', C'', P et R sont

$$\frac{x'+d}{2}, \quad \frac{x''+d}{2}, \quad d, \quad x;$$

on a, par conséquent,

$$\left(\frac{x'+d}{2}+\frac{x''+d}{2}\right)(x+d)=2\left[\frac{(x'+d)(x''+d)}{4}+xd\right],$$

d'où

$$(1)\qquad x(x'+x''-2d)=x'x''-d^2.$$

En combinant les équations $x^2+y^2=r^2$ et $y=m(x-d)$, on obtient

$$x^2(1+m^2)-2m^2dx+m^2d^2-r^2=0,$$

d'où

$$x'+x''=\frac{2m^2d^2}{1+m^2},\qquad x'x''=\frac{m^2d^2-r^2}{1+m^2}.$$

Portons ces valeurs dans (1), cette relation devient, comme précédemment,

$$x=\frac{d^2+r^2}{2d}.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. A. Droz-Farny.

Comme angle $PA'A$ = angle $PB'B = 90°$ les droites AA' et BB' enveloppent une conique ayant P et son symétrique par rapport au centre de (C) comme foyers. Ces deux droites se coupent en S. On a

$$SA.SA'=SB.SB'=SP^2.$$

Le lieu de S est donc l'axe radical du cercle (C) et du cercle point P, et, par conséquent, une perpendiculaire sur OP à une distance OM du centre telle que

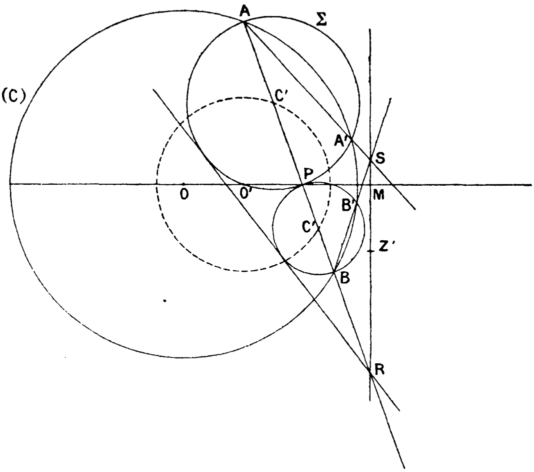
$$OM^2-r^2=(OM-d)^2,$$

d'où

$$OM=\frac{r^2+d^2}{2d}.$$

Représentons comme précédemment par C' et C'' les centres de (Σ) et (Σ'), ces deux points sont sur une circonférence fixe de rayon $\frac{r}{2}$ ayant son centre en O' point milieu de PO. Comme

C′, C″, P et R sont quatre points harmoniques, le lieu de R est la polaire de P par rapport à cette circonférence, donc une



droite perpendiculaire sur O′P à une distance O′M telle que

$$O'M.O'P = \frac{r^2}{4},$$

donc

$$O'M = \frac{r^2}{2d}$$

et

$$OM = \frac{r^2}{2d} + \frac{d}{2} = \frac{r^2 + d^2}{2d}.$$

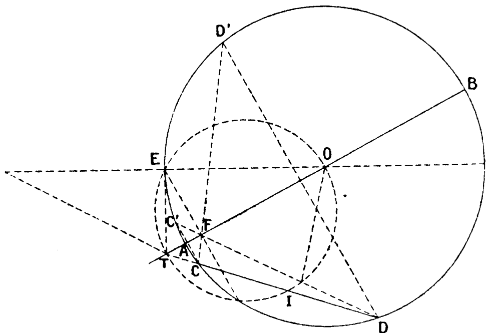
Question 1669.

Par le foyer F *d'une parabole, on mène une corde* AB *et l'on décrit sur* AB *comme diamètre une circonférence* (Σ) *qui rencontre la parabole en deux autres points* C *et* D. *On porte sur* FC, *du côté opposé à* C, *une longueur* FD′ = FD, *et sur* FD, *du côté opposé à* D, *une longueur* FC′ = FC. *Montrer que les points* C′ *et* D′ *sont situés sur la circonférence* (Σ). (E.-N. Barisien.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par UN ANONYME.

La perpendiculaire FE à AB rencontre (Σ) en E qui est sur la directrice de la parabole (P). La droite qui va de E au



centre O de (Σ) étant un diamètre de (P), cette directrice est la tangente ET à (Σ).

Déterminons C, D, et, pour cela, cherchons le milieu I de CD. Les cordes AB, CD étant également inclinées sur l'axe de (P), le foyer F est à égales distances des diamètres de (P) qui passent par O et I. Il suffit alors de prolonger EF jusqu'en G sur (Σ) et de mener de ce point une parallèle à EO pour avoir le diamètre qui contient I.

Ce point I est aussi sur la perpendiculaire OI à CD. Cette droite et EG, respectivement perpendiculaires à deux droites également inclinées sur EO sont elles-mêmes également inclinées sur EO.

Le point I est alors sur la circonférence qui passe par O, E, G et qui a pour diamètre OT. La droite CD passe par T, qui est sur la directrice, et, comme elle fait avec EO le même angle que TO, sa construction est facile.

On voit déjà que :

Une corde focale quelconque d'une parabole étant prise pour diamètre d'une circonférence de cercle, l'autre sécante, commune à ces deux courbes, coupe cette corde focale sur la directrice de la parabole.

Prenons les symétriques C′, D′ de C, D par rapport à AB, ces points sont sur (Σ). Les diagonales CD′, C′D du trapèze CDC′D′ se coupent sur la polaire de T par rapport à (Σ), c'est-à-dire qu'elles passent par F et l'on a bien FD′ = FD, FC′ = FC. La question posée est donc résolue.

Question 1679.

(1894, p. 5*.)

On considère les coniques passant par deux points fixes et tangentes à une droite donnée en un point donné. Lieu du point de concours des tangentes à la conique menées par deux points fixes pris sur la droite.

(André Cazamian.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Représentons par P et Q les deux points fixes; chaque conique passant par ces points est tangente en D à la droite donnée. Soient, en outre, A et B les points fixes de départ des tangentes et C leur point d'intersection.

Effectuons une transformation homographique de la figure, de manière que les points P et Q coïncident avec les ombilics du plan, et soient a, b, c et d les transformés de A, B, C et D.

Il s'agira de chercher le lieu des points d'intersection des tangentes que l'on peut mener de a et b aux circonférences tangentes en un point fixe d à la droite ab. Comme $ca - cb = da - db$, le lieu est une hyperbole admettant a et b comme foyers, ou une ligne droite perpendiculaire en d sur ab si $ad = db$. Revenons à la figure primitive.

Le lieu cherché est une conique passant par D et inscrite dans le quadrilatère ABPQ. Si A, D, B et le point d'intersection de AB et PQ sont quatre points harmoniques, le lieu est une ligne droite passant par D.

QUESTIONS.

1743. On peut construire six triangles semblables entre eux ayant pour côté commun un segment fixe, et situés d'un même côté de ce segment : les six sommets ainsi obtenus sont sur une même circonférence. Toutes les circonférences ainsi obtenues ont même axe radical. (E. DUPORCQ.)

1744. Soit ω le centre de courbure d'une courbe (m), correspondant au point m. On considère une droite Δ qui coupe le segment ωm suivant un angle donné et le divise suivant un rapport donné. Construire le point où D touche son enveloppe, ainsi que les centres de courbure successifs de cette enveloppe. (E. DUPORCQ.)

1745. On pose

$$\alpha_n = (ax^2 + bx + c)(2ax^2 + bx + c)\ldots(nax^2 + bx + c).$$

1° Démontrer que l'expression

$$1 + C_n^1\alpha_1 + C_n^2\alpha_2 + \ldots + C_n^n\alpha_n$$

peut se mettre sous la forme

$$(c+1)^n + P_1 x(c+1)^{n-1} + P^2 x^2 (c+1)^{n-2} + \ldots + P_n x^n,$$

P_p étant un polynome entier en a, b, x indépendant de c;

2° Pour $x = 0$, $(P_r)_{x=0}$ est un polynome entier en a et b.

Trouver ce polynome développé par rapport aux puissances décroissantes de b. Démontrer que si a est positif, ce polynome considéré comme fonction de b a toutes ses racines réelles; si a est négatif, il a au plus une racine réelle. (R. GILBERT.)

1746. Le volume d'un tétraèdre est égal aux deux tiers du produit des sections faites par deux plans médians menés par deux arêtes opposées de ce tétraèdre, multiplié par le sinus de l'angle de ces deux plans et divisé par la médiane du tétraèdre suivant laquelle ils se coupent. (Nous appelons *plan médian* d'un tétraèdre un plan mené par une arête de ce tétraèdre et le milieu de l'arête opposée.) (GENTY.)

[B10b]

RÉDUCTION SIMULTANÉE DE DEUX FORMES QUADRATIQUES DE TROIS VARIABLES A DES FORMES CANONIQUES. APPLICATION A L'ÉTUDE D'UN SYSTÈME DE DEUX CONIQUES;

Par M. H. VOGT, à Nancy.

1. Le problème de la réduction simultanée de deux formes quadratiques d'un nombre quelconque de variables à des formes canoniques, en particulier à des sommes de carrés de formes linéaires indépendantes, a fait l'objet de nombreuses recherches et a été résolu d'une manière complète par M. Darboux dans son remarquable Mémoire *Sur la théorie algébrique des formes quadratiques* (*Journal de Liouville,* 1874). Les méthodes qu'il emploie, par cela même qu'elles s'appliquent à tous les cas, exigent d'assez longs développements; mais si l'on se limite, comme je le fais dans cet article, au cas de deux formes quadratiques de trois variables, il est possible d'arriver rapidement, par l'application d'un seul des principes de ces méthodes, à la réduction de ces formes, non seulement à des sommes de carrés lorsqu'elle est possible, mais encore aux formes canoniques habituelles. La considération de la forme adjointe d'une forme quadratique particulière suffit, comme je le montrerai, pour donner les formes réduites; le procédé que j'emploie n'a pas le degré de généralité que possèdent les belles méthodes de M. Darboux, mais il est suffisant pour faire, d'une manière complète, l'étude du système de deux coniques.

2. Soient

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy, \\ \varphi(x, y, z) = a_1x^2 + a'_1y^2 + a''_1z^2 + 2b_1yz + 2b'_1zx + 2b''_1xy \end{cases}$$

deux formes quadratiques de trois variables; nous nous proposons d'abord de rechercher s'il est possible de les réduire simultanément à la somme des carrés de trois formes linéaires indépendantes au plus, affectés de coefficients particuliers; le problème revient à chercher trois formes linéaires

$$(2)\quad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{cases}$$

dont le déterminant des coefficients, que nous appellerons δ, n'est pas nul, et telles que les formes f et φ soient identiques aux formes

$$(3)\quad \begin{cases} f' = l_1x'^2 + l_2y'^2 + l_3z'^2, \\ \varphi' = m_1x'^2 + m_2y'^2 + m_3z'^2, \end{cases}$$

lorsque l'on remplace x', y', z' par les expressions (2), l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3 désignant des coefficients particuliers inconnus.

Si le problème est possible, il admet une infinité de solutions, car on peut multiplier x', y', z' par des facteurs quelconques et choisir arbitrairement trois des coefficients non nuls entrant dans f' et φ', par exemple l_1, l_2, l_3; si l'on suppose données ces trois dernières quantités, le problème admet alors, en général, un nombre limité de solutions, car l'identification des formes f' et φ' avec f et φ fournit douze équations entre douze inconnues, savoir les neuf coefficients des formes (2) et les trois coefficients m_1, m_2, m_3.

Nous ne faisons, pour le moment, aucune hypothèse sur la nature des coefficients des formes f et φ; ils peuvent être réels ou imaginaires. Considérons la forme

$$\mu f + \lambda\varphi = (\mu a + \lambda a_1)x^2 + (\mu a' + \lambda a'_1)y^2 + \ldots;$$

son discriminant

$$\Delta(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} \mu a + \lambda a_1 & \mu b'' + \lambda b''_1 & \mu b' + \lambda b'_1 \\ \mu b'' + \lambda b''_1 & \mu a' + \lambda a'_1 & \mu b + \lambda b_1 \\ \mu b' + \lambda b'_1 & \mu b + \lambda b_1 & \mu a'' + \lambda a''_1 \end{vmatrix}$$

est une forme homogène du troisième ordre; elle n'est nulle identiquement que dans des cas particuliers dont nous réservons l'examen pour plus tard; nous désignons par A, A', ... ses mineurs relatifs à $\mu a + \lambda a_1$, $\mu a' + \lambda a'_1$, ... et par A_i, A'_i, ... les valeurs de ces mineurs lorsqu'on remplace λ et μ par λ_i et μ_i. En employant deux variables λ et μ, nous avons l'avantage de n'établir aucune distinction entre les racines finies et infinies de l'équation en λ habituelle. Soient $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$, $\frac{\lambda_3}{\mu_3}$ les racines de l'équation

$$\frac{1}{\mu^3}\Delta(\lambda, \mu) = 0;$$

nous poserons

$$\Delta(\lambda, \mu) = \Delta_0(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3);$$

nous pouvons remarquer immédiatement qu'une racine simple ne peut annuler les mineurs du discriminant, car elle annulerait la dérivée $\frac{\partial\Delta(\lambda, \mu)}{\partial\lambda}$ dont la valeur est

$$a_1 A + a'_1 A' + a''_1 A'' + 2b_1 B + 2b'_1 B' + 2b''_1 B'';$$

de la même manière, une racine double ne peut annuler tous les éléments, car elle annulerait la dérivée seconde $\frac{\partial^2\Delta(\lambda, \mu)}{\partial\lambda^2}$.

3. Supposons que la réduction de f et φ aux formes f' et φ' soit possible; les deux formes quadratiques

$\mu f + \lambda \varphi$ et $\mu f' + \lambda \varphi'$ sont transformées l'une de l'autre par la substitution (2); d'après un théorème connu, le discriminant de la première est égal à celui de la seconde multiplié par le carré du déterminant δ; on a donc l'équation

$$(4) \quad \Delta(\lambda, \mu) = (\lambda m_1 + \mu l_1)(\lambda m_2 + \mu l_2)(\lambda m_3 + \mu l_3)\,\delta^2.$$

Si les coefficients de chacun des carrés x'^2, y'^2, z'^2 ne sont pas nuls simultanément dans f' et φ', le second membre de l'égalité précédente n'est pas identiquement nul, et il en est de même de $\Delta(\lambda, \mu)$; mais si f' et φ' ne renferment les carrés que de deux formes au plus, $\mu f + \lambda \varphi$ est toujours réductible à un ou deux carrés, et $\Delta(\lambda, \mu)$ est identiquement nul, cas que nous excluons pour le moment.

L'équation (4) montre que $-\frac{l_1}{m_1}$, $-\frac{l_2}{m_2}$, $-\frac{l_3}{m_3}$ sont égaux aux trois racines $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$, $\frac{\lambda_3}{\mu_3}$. Si deux d'entre elles sont égales, par exemple si $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est une racine double égale à $-\frac{l_1}{m_1}$ et à $-\frac{l_2}{m_2}$, la forme $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi$ est réductible à un seul carré et est égale à $(\mu_1 l_3 + \lambda_1 m_3) z'^2$; par suite, les mineurs du discriminant $\Delta(\lambda_1, \mu_1)$ sont tous nuls; de la même manière, si les trois racines sont égales et si $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est la racine triple, la forme $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi$ est identiquement nulle, et tous les éléments du discriminant $\Delta(\lambda_1, \mu_1)$ sont nuls. Nous déduisons de là que l'une des conditions suivantes est nécessaire pour que f et φ soient réductibles simultanément à trois carrés :

1° Le discriminant égalé à zéro a ses racines distinctes;

2° Il a une racine simple et une racine double annulant les mineurs;

3° Il a une racine triple annulant tous les éléments.

Elles expriment que les diviseurs élémentaires du discriminant sont tous du premier degré, d'après la terminologie de Weierstrass exposée par M. Sauvage dans les *Nouvelles Annales* (1895).

Nous verrons que ces conditions sont aussi suffisantes et nous formerons effectivement les formes linéaires x', y', z'; dans le cas où les conditions précédentes ne sont pas remplies, nous obtiendrons des formes réduites simples pour f et φ.

4. La méthode que nous emploierons avec M. Darboux repose sur les propriétés de la forme adjointe d'une forme quadratique. On appelle *forme adjointe* de

$$f(x,y,z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

la deuxième forme

$$F(X, Y, Z) = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & X \\ b'' & a' & b & Y \\ b' & b & a'' & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix}$$

dont le développement est

$$-(AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY),$$

en désignant par A, A′, ... les mineurs du discriminant Δ de f; elle possède les propriétés suivantes :

1° Si l'on remplace X, Y, Z par les demi-dérivées de la forme primitive par rapport à x, y, z, on obtient comme résultat

$$(5) \qquad F\left(\tfrac{1}{2}f'_x, \tfrac{1}{2}f'_y, \tfrac{1}{2}f'_z\right) = -\Delta f(x,y,z);$$

supposons, en effet, que dans la fonction

$$F\left(\tfrac{1}{2}f'_x, \tfrac{1}{2}f'_y, \tfrac{1}{2}f'_z\right) = \begin{vmatrix} a & b'' & b' & ax+b''y+b'z \\ b'' & a' & b & b''x+a'y+bz \\ b' & b & a'' & b'x+by+a''z \\ ax+b''y+b'z & b''x+a'y+bz & b'x+by+a''z & 0 \end{vmatrix},$$

on retranche des éléments de la dernière colonne ceux des précédentes, multipliés respectivement par x, y, z, et qu'on opère de même sur les lignes, on obtient comme résultat

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & 0 \\ b'' & a' & b & 0 \\ b' & b & a'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f(x,y,z) \end{vmatrix} = -\Delta f(x,y,z);$$

2° Si le discriminant Δ est nul sans que tous ses mineurs le soient, la forme adjointe est le carré d'une forme linéaire; remarquons d'abord que A, A′, A″ ne sont pas tous les trois nuls, car sinon les égalités

$$\begin{aligned} A'A'' - B^2 &= a\Delta, \\ A''A - B'^2 &= a'\Delta, \\ AA' - B''^2 &= a''\Delta \end{aligned}$$

entraîneraient $B = B' = B'' = 0$, et tous les mineurs seraient nuls, contrairement à l'hypothèse; si A, par exemple, n'est pas nul, on peut mettre en évidence le carré de $AX + B''Y + B'Z$ et poser

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} F(X, Y, Z) = &-\frac{1}{A}(AX + B''Y + B'Z)^2 \\ &-\frac{\Delta}{A}(a''Y^2 + a'Z^2 - 2bYZ); \end{aligned} \right.$$

si donc $\Delta = 0$, F se réduit à un seul carré.

3° Si Δ est nul ainsi que ses mineurs, la forme adjointe est identiquement nulle.

5. Appliquons ces considérations à la forme quadratique $\mu f + \lambda\varphi$ dont nous désignerons la forme adjointe par $F(X, Y, Z, \lambda, \mu)$; elle est égale à

$$\begin{vmatrix} \mu a + \lambda a_1 & \mu b'' + \lambda b''_1 & \mu b' + \lambda b'_1 & X \\ \mu b'' + \lambda b''_1 & \mu a' + \lambda a'_1 & \mu b + \lambda b_1 & Y \\ \mu b' + \lambda b'_1 & \mu b + \lambda b_1 & \mu a'' + \lambda a''_1 & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix};$$

d'après la première propriété exprimée par l'équation (5), la fonction

$$\Phi(X, Y, Z, \lambda, \mu) = -\frac{F(X, Y, Z, \lambda, \mu)}{\Delta(\lambda, \mu)}$$

se réduit à $\mu f + \lambda\varphi$ lorsque l'on remplace X, Y, Z par

$$\tfrac{1}{2}(\mu f'_x + \lambda\varphi'_x), \quad \tfrac{1}{2}(\mu f'_y + \lambda\varphi'_y), \quad \tfrac{1}{2}(\mu f'_z + \lambda\varphi'_z).$$

Nous sommes amenés à transformer la fraction rationnelle qui entre au second membre, et à y remplacer ensuite les variables X, Y, Z par les demi-dérivées précédentes, pour obtenir une expression simple de $\mu f + \lambda\varphi$; nous décomposerons cette fraction rationnelle en éléments simples, et nous considérerons successivement les différents cas suivants :

Premier cas. — Les racines du discriminant sont distinctes; supposons que l'on ait

$$\Delta(\lambda, \mu) = \Delta_0(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3),$$

alors la fonction Φ, décomposée en éléments simples, se met sous la forme

$$\Phi(X, Y, Z, \lambda, \mu) = \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)}{\Delta_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)} + \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_2, \mu_2)}{\Delta_2(\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2)} + \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_3, \mu_3)}{\Delta_3(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)},$$

où l'on pose

$$\Delta_1 = \Delta_0(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3),$$
$$\Delta_2 = \Delta_0(\lambda_2\mu_1 - \mu_2\lambda_1)(\lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3),$$
$$\Delta_3 = \Delta_0(\lambda_3\mu_1 - \mu_3\lambda_1)(\lambda_3\mu_2 - \mu_3\lambda_2);$$

chacun des numérateurs est la forme adjointe d'une forme quadratique de discriminant nul et est, dès lors, le carré d'une forme linéaire de X, Y, Z et aussi de x, y, z lorsqu'on remplace les premières variables par les demi-dérivées de $\mu f + \lambda\varphi$. Considérons l'un d'eux, par exemple le premier, après cette substitution ; on a

$$F\left[\tfrac{1}{2}(\mu f'_x+\lambda\varphi'_x),\ \tfrac{1}{2}(\mu f'_y+\lambda\varphi'_y),\ \tfrac{1}{2}(\mu f'_z+\lambda\varphi'_z),\ \lambda_1,\ \mu_1\right]$$
$$=\begin{vmatrix} \mu_1 a+\lambda_1 a_1 & \mu_1 b''+\lambda_1 b''_1 & \mu_1 b'+\lambda_1 b'_1 & \tfrac{1}{2}(\mu f'_x+\lambda\varphi'_x) \\ \mu_1 b''+\lambda_1 b''_1 & \mu_1 a'+\lambda_1 a'_1 & \mu_1 b+\lambda_1 b_1 & \tfrac{1}{2}(\mu f'_y+\lambda\varphi'_y) \\ \mu_1 b'+\lambda_1 b'_1 & \mu_1 b+\lambda_1 b_1 & \mu_1 a''+\lambda_1 a''_1 & \tfrac{1}{2}(\mu f'_z+\lambda\varphi'_z) \\ \tfrac{1}{2}(\mu f'_x+\lambda\varphi'_x) & \tfrac{1}{2}(\mu f'_y+\lambda\varphi'_y) & \tfrac{1}{2}(\mu f'_z+\lambda\varphi'_z) & 0 \end{vmatrix};$$

si μ_1 n'est pas nul, on peut retrancher des éléments de la dernière colonne ceux des précédentes, multipliés respectivement par $\frac{\mu}{\mu_1}x$, $\frac{\mu}{\mu_1}y$, $\frac{\mu}{\mu^1}z$ et opérer de même sur les lignes ; en posant alors

$$\chi(xyz)=-\frac{\mu^2}{\mu_1}f+\left(\frac{\mu^2\lambda_1}{\mu'_2}-\frac{2\lambda\mu}{\mu_1}\right)\varphi,$$

le déterminant précédent devient

$$\begin{vmatrix} \mu_1 a+\lambda_1 a_1 & \mu_1 b''+\lambda_1 b''_1 & \mu_1 b'+\lambda_1 b'_1 & (\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{\varphi'_x}{2\mu_1} \\ \mu_1 b''+\lambda_1 b''_1 & \mu_1 a'+\lambda_1 a'_1 & \mu_1 b+\lambda_1 b_1 & (\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{\varphi'_y}{2\mu_1} \\ \mu_1 b'+\lambda_1 b'_1 & \mu_1 b+\lambda_1 b_1 & \mu_1 a''+\lambda_1 a''_1 & (\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{\varphi'_z}{2\mu_1} \\ (\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{\varphi'_x}{2\mu_1} & (\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{\varphi'_y}{2\mu_1} & (\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{\varphi'_z}{2\mu_1} & \chi(xyz) \end{vmatrix},$$

ou bien, en supposant par exemple $A_1 \neq 0$ et appliquant la formule (6),

$$-\frac{(\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)^2}{A_1}\left(A_1\frac{\varphi'_x}{2\mu_1}+B''_1\frac{\varphi'_y}{2\mu_1}+B'_1\frac{\varphi'_z}{2\mu_1}\right)^2$$
$$+\Delta(\lambda_1,\mu_1)\,\psi(x,y,z),$$

ψ désignant une certaine fonction de x, y, z, dont le coefficient est nul dans le cas actuel.

Si λ_1 n'est pas nul, un calcul analogue donne pour valeur du déterminant

$$-\frac{(\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)^2}{A_1}\left(A_1\frac{f'_x}{2\lambda_1}+B''_1\frac{f'_y}{2\lambda_1}+B'_1\frac{f'_z}{2\lambda_1}\right)^2$$
$$+\Delta(\lambda_1,\mu_1)\,\psi_1(x,y,z);$$

dans tous les cas, quelles que soient les valeurs de λ_1 et μ_1, on peut écrire

$$(7)\quad \begin{cases} F[\frac{1}{2}(\mu f'_x+\lambda\varphi'_x), \frac{1}{2}(\mu f'_y+\lambda\varphi'_y), \frac{1}{2}(\mu f'_z+\lambda\varphi'_z), \lambda_1, \mu_1] \\ \quad = -\varepsilon_1(\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)^2 x'^2+\Delta(\lambda_1,\mu_1)\,\psi(x,y,z), \end{cases}$$

ε_1 étant égal à ± 1 et x' désignant l'une des formes linéaires

$$\frac{A_1\varphi'_x+B''_1\varphi'_y+B'_1\varphi'_z}{2\mu_1\sqrt{\varepsilon_1 A_1}},\quad \frac{A_1 f'_x+B''_1 f'_y+B'_1 f'_z}{2\lambda_1\sqrt{\varepsilon_1 A_1}};$$

nous introduisons le coefficient ε_1 afin que x' ait ses coefficients réels lorsque les coefficients de f et φ ainsi que λ_1 et μ_1 sont réels.

En répétant le même raisonnement pour les autres numérateurs des fractions simples et désignant par y' et z' des formes linéaires analogues à x', on arrive à l'équation

$$\mu f+\lambda\varphi=\varepsilon_1(\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)\frac{x'^2}{\Delta_1}$$
$$+\varepsilon_2(\lambda\mu_2-\mu\lambda_2)\frac{y'^2}{\Delta_2}+\varepsilon_3(\lambda\mu_3-\mu\lambda_3)\frac{z'^2}{\Delta_3}.$$

En séparant les coefficients de λ et de μ, on obtient la réduction simultanée

$$(8)\quad \begin{cases} f=-\dfrac{\varepsilon_1\lambda_1 x'^2}{\Delta_1}-\dfrac{\varepsilon_2\lambda_2 y'^2}{\Delta_2}-\dfrac{\varepsilon_3\lambda_3 z'^2}{\Delta_3}, \\ \varphi=+\dfrac{\varepsilon_1\mu_1 x'^2}{\Delta_1}+\dfrac{\varepsilon_2\mu_2 y'^2}{\Delta_2}+\dfrac{\varepsilon_3\mu_3 z'^2}{\Delta_3}. \end{cases}$$

Les formes linéaires x', y', z' sont bien indépendantes, car sinon le discriminant de $\mu f+\lambda\varphi$ serait identiquement nul, contrairement à l'hypothèse; en les multipliant par des facteurs convenables, on peut les remplacer par des formes ξ, η, ζ telles que l'on ait

$$(8') \qquad \begin{cases} f = -\lambda_1\xi^2 - \lambda_2\eta^2 - \lambda_3\zeta^2, \\ \varphi = \quad \mu_1\xi^2 + \mu_2\eta^2 + \mu_3\zeta^2. \end{cases}$$

Je vais montrer que la décomposition ainsi obtenue est unique, c'est-à-dire que des formes linéaires satisfaisant aux équations (3) ne peuvent différer des précédentes que par des facteurs constants; nous avons vu, en effet, que $-\frac{l_1}{m_1}$, $-\frac{l_2}{m_2}$, $-\frac{l_3}{m_3}$ sont identiques à $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$, $\frac{\lambda_3}{\mu_3}$; on peut dès lors ramener toute réduction simultanée de f et φ à la forme

$$(9) \qquad \begin{cases} f = -\lambda_1\xi'^2 - \lambda_2\eta'^2 - \lambda_3\zeta'^2, \\ \varphi = \quad \mu_1\xi'^2 + \mu_2\eta'^2 + \mu_3\zeta'^2; \end{cases}$$

l'identification des formes (8') et (9) donne les équations

$$\lambda_1(\xi^2 - \xi'^2) + \lambda_2(\eta^2 - \eta'^2) + \lambda_3(\zeta^2 - \zeta'^2) = 0,$$
$$\mu_1(\xi^2 - \xi'^2) + \mu_2(\eta^2 - \eta'^2) + \mu_3(\zeta^2 - \zeta'^2) = 0,$$

d'où

$$\frac{\xi^2 - \xi'^2}{\lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3} = \frac{\eta^2 - \eta'^2}{\lambda_3\mu_1 - \mu_3\lambda_1} = \frac{\zeta^2 - \zeta'^2}{\lambda_2\mu_2 - \mu_1\lambda_2};$$

si les numérateurs ne sont pas nuls, ils sont décomposables en un produit de deux facteurs linéaires; en désignant par le produit PQ de deux formes linéaires la valeur commune des rapports, $\xi + \xi'$ et $\xi - \xi'$, et, par suite, ξ et ξ' s'expriment linéairement au moyen de P et Q, et il en est de même de η, η', ζ, ζ'; par suite, les formes ξ, η, ζ ne sont pas indépendantes, ce qui est impossible; il faut donc que les numérateurs soient nuls, ce qui entraîne les équations

$$\xi' = \pm\xi, \qquad \eta' = \pm\eta, \qquad \zeta' = \pm\zeta.$$

6. *Deuxième cas.* — Le discriminant a une racine simple et une racine double n'annulant pas les mineurs; supposons que l'on ait

$$\Delta(\lambda, \mu) = \Delta_0(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3).$$

Nous pouvons toujours mettre $F(X, Y, Z, \lambda, \mu)$ sous la forme

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} H(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)^2 \\ \quad + K(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3) + L(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2; \end{array}\right.$$

les coefficients H, K, L sont respectivement égaux à

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)}{(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)^2}, \\ \dfrac{-\left[\lambda_3 \dfrac{\partial F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)}{\partial\lambda_1} + \mu_3 \dfrac{\partial F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)}{\partial\mu_1}\right]}{(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)^2}, \\ \dfrac{F(X, Y, Z, \lambda_3, \mu_3)}{(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)^2}; \end{array}\right.$$

nous en concluons que la fonction $\Phi(X, Y, Z, \lambda, \mu)$ est décomposable en éléments simples de la façon suivante :

$$\begin{aligned} -\frac{F(X, Y, Z, \lambda, \mu)}{\Delta(\lambda, \mu)} &= \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)}{\Delta_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2} \\ &\quad + \frac{\lambda_3 \dfrac{\partial F}{\partial\lambda_1} + \mu_3 \dfrac{\partial F}{\partial\mu_1}}{\Delta_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)} + \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_3, \mu_3)}{\Delta_1(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)}, \end{aligned}$$

en posant

$$\Delta_1 = \Delta_0(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3)^2.$$

Nous avons maintenant à remplacer X, Y, Z par les demi-dérivées de $\mu f + \lambda\varphi$; nous savons que $F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)$ et $F(X, Y, Z, \lambda_3, \mu_3)$ deviennent respectivement

$$-\varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2 x'^2, \qquad -\varepsilon_3(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)^2 z'^2,$$

x' et z' étant deux formes linéaires particulières; pour déterminer les valeurs de $\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}$ et $\frac{\partial F}{\partial \mu_1}$ après la même substitution, on peut prendre simplement les dérivées du second membre de la formule (7) par rapport à λ_1 et μ_1; comme $\frac{\partial \Delta(\lambda_1, \mu_1)}{\partial \lambda_1}$ et $\frac{\partial \Delta(\lambda_1, \mu_1)}{\partial \mu_1}$ sont nuls d'après les hypothèses faites, on aura simplement

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda_3 \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} + \mu_3 \frac{\partial F}{\partial \mu_1} &= -2\varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)x'^2 \\ &\quad - 2\varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2 x'\left(\lambda_3 \frac{\partial x'}{\partial \lambda_1} + \mu_3 \frac{\partial x'}{\partial \mu_1}\right), \end{aligned}\right.$$

d'où, finalement, on obtient la décomposition de $\mu f + \lambda\varphi$

$$\begin{aligned} \mu f + \lambda\varphi = &- \varepsilon_1(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)\frac{x'^2}{\Delta_1} \\ &- 2\varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)\frac{x'}{\Delta_1}\left(\lambda_3 \frac{\partial x'}{\partial \lambda_1} + \mu_3 \frac{\partial x'}{\partial \mu_1}\right) + \varepsilon_3(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)\frac{z'^2}{\Delta_1}, \end{aligned}$$

et la réduction simultanée suivante de f et de φ, où nous avons posé pour simplifier

$$y' = \lambda_3 \frac{\partial x'}{\partial \lambda_1} + \mu_3 \frac{\partial x'}{\partial \mu_1},$$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} f &= \frac{\varepsilon_1 \lambda_3 x'^2}{\Delta_1} + \frac{2\varepsilon_1 \lambda_1 x' y'}{\Delta_1} - \frac{\varepsilon_3 \lambda_3 z'^2}{\Delta_1}, \\ \varphi &= -\frac{\varepsilon_1 \mu_3 x'^2}{\Delta_1} - \frac{2\varepsilon_1 \mu_1 x' y'}{\Delta_1} + \frac{\varepsilon_3 \mu_3 z'^2}{\Delta_1}. \end{aligned}\right.$$

Les formes x', y', z' sont linéairement indépendantes, car sinon le déterminant de $\mu f + \lambda\varphi$ serait identiquement nul; en les multipliant par des facteurs convenables, on peut les remplacer par des formes ξ, η, ζ, telles que l'on ait

$$(13')\quad \left\{\begin{aligned} f &= -\lambda_3(\xi^2 + \zeta^2) - 2\lambda_1\xi\eta, \\ \varphi &= \mu_3(\xi^2 + \zeta^2) + 2\mu_1\xi\eta. \end{aligned}\right.$$

On peut montrer, comme dans le premier cas, que si des formes ξ', η', ζ' sont telles que l'on ait identiquement

$$f = -\lambda_3(\xi'^2 + \zeta'^2) - 2\lambda_1\xi'\eta',$$
$$\varphi = \quad \mu_3(\xi'^2 + \zeta'^2) + 2\mu_1\xi'\eta',$$

il est nécessaire que l'on ait $\xi' = \pm\xi$, $\eta' = \pm\eta$, $\zeta' = \pm\zeta$.

7. *Troisième cas.* — Le discriminant a une racine triple n'annulant pas les mineurs; supposons que l'on ait

$$\Delta(\lambda, \mu) = \Delta_0(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^3;$$

nous pouvons décomposer la fonction Φ en une somme d'éléments simples par un calcul analogue à celui du cas précédent, en introduisant même des paramètres arbitraires. Désignons par λ_3 et μ_3 deux nombres quelconques tels que $\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3$ ne soit pas nul; nous pouvons toujours mettre $F(X, Y, Z, \lambda, \mu)$ sous la forme (10), les coefficients H, K, L ayant les valeurs (11); en divisant alors les fonctions par $\Delta(\lambda, \mu)$, nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{-F(X, Y, Z, \lambda, \mu)}{\Delta(\lambda, \mu)} = {} & \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)^2}{\Delta_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^3} \\ & + \frac{\left(\lambda_3\dfrac{\partial F}{\partial\lambda_1} + \mu_3\dfrac{\partial F}{\partial\mu_1}\right)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)}{\Delta_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2} \\ & + \frac{-F(X, Y, Z, \lambda_3, \mu_3)}{\Delta_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)},\end{aligned}$$

où Δ_1 a la même signification que précédemment. Le numérateur de la dernière fraction est une forme quadratique de λ_3 et μ_3; nous pouvons le remplacer par

$$\begin{aligned}-F(X, Y, Z, \lambda_3, \mu_3) = -\frac{1}{2}\Bigg[& \lambda_3^2\frac{\partial^2 F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)}{\partial\lambda_1^2} \\ & + 2\lambda_3\mu_3\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda_1\,\partial\mu_1} + \mu_3^2\frac{\partial^2 F}{\partial\mu_1^2}\Bigg],\end{aligned}$$

car les dérivées secondes de $F(X, Y, Z, \lambda_1, \mu_1)$ sont des constantes.

Nous avons maintenant à remplacer **X**, **Y**, **Z** par les demi-dérivées de $\mu f + \lambda\varphi$; nous nous servirons encore de la formule (7) pour calculer la fonction F ainsi que ses dérivées, après cette substitution; comme $\Delta(\lambda_1, \mu_1)$ est nul ainsi que ses dérivées premières et secondes, $\lambda_3 \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} + \mu_3 \frac{\partial F}{\partial \mu_1}$ sera donné par l'équation (12), et l'on aura pour valeur du dernier coefficient

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left(\lambda_3^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} + 2\lambda_3\mu_3 \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda_1\,\partial\mu_1} + \mu_3^2 \frac{\partial^2 F}{\partial\mu_1^2}\right)
&= \varepsilon_1(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)^2 x'^2 \\
&\quad + 4\varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)x'\left(\lambda_3\frac{\partial x'}{\partial\lambda_1} + \mu_3\frac{\partial x'}{\partial\mu_1}\right) \\
&\quad + \varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2\left(\lambda_3\frac{\partial x'}{\partial\lambda_1} + \mu_3\frac{\partial x'}{\partial\mu_1}\right)^2 \\
&\quad + \varepsilon_1(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)^2 x'\left(\lambda_3^2\frac{\partial^2 x'}{\partial\lambda_1^2} + 2\lambda_3\mu_3\frac{\partial^2 x'}{\partial\lambda_1\,\partial\mu_1} + \mu_3^2\frac{\partial^2 x'}{\partial\mu_1^2}\right).
\end{aligned}
$$

En posant

$$
\begin{aligned}
y' &= \lambda_3\frac{\partial x'}{\partial\lambda_1} + \mu_3\frac{\partial x'}{\partial\mu_1}, \\
z' &= \frac{1}{2}\left(\lambda_3^2\frac{\partial^2 x'}{\partial\lambda_1^2} + 2\lambda_3\mu_3\frac{\partial^2 x'}{\partial\lambda_1\,\partial\mu_1} + \mu_3^2\frac{\partial^2 x'}{\partial\mu_1^2}\right),
\end{aligned}
$$

on aura, toutes réductions faites,

$$
\begin{aligned}
\mu f + \lambda\varphi &= \frac{2\varepsilon_1}{\Delta_1}(\lambda\mu_3 - \mu\lambda_3)x'y' \\
&\quad + \frac{\varepsilon_1}{\Delta_1}(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(y'^2 + 2x'z'),
\end{aligned}
$$

d'où la réduction simultanée suivante

$$
(14)\qquad \left\{
\begin{aligned}
f &= -\frac{\lambda_3\varepsilon_1}{\Delta_1}\,2x'y' - \frac{\lambda_1\varepsilon_1}{\Delta_1}(y'^2 + 2x'z'), \\
\varphi &= \frac{\mu_3\varepsilon_1}{\Delta_1}\,2x'y' + \frac{\mu_1\varepsilon_1}{\Delta_1}(y'^2 + 2x'z').
\end{aligned}
\right.
$$

On peut donner à λ_3 et μ_3 des valeurs arbitraires, et supposer que l'une de ces quantités est nulle; les formes x', y', z' sont linéairement indépendantes, et, en les multipliant par des facteurs convenables, on peut les remplacer par des fonctions ξ, η, ζ telles que l'on ait

$$(14') \qquad \begin{cases} f = -2\lambda_3\xi\eta - \lambda_1(\eta^2 + 2\xi\zeta), \\ \varphi = 2\mu_3\xi\eta + \mu_1(\eta^2 + 2\xi\zeta); \end{cases}$$

comme précédemment, il n'existe, au signe près, qu'un seul système de fonctions donnant pour f et φ la décomposition précédente, où λ_1, μ_1, λ_3, μ_3 sont fixés à l'avance.

8. *Quatrième cas.* — Le discriminant a une racine simple et une racine double annulant les mineurs.

La forme adjointe de $\mu f + \lambda\varphi$ devenant identiquement nulle pour la racine double, nous opérerons de la façon suivante : soit $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ la racine double; la forme quadratique $\mu_1 f + \lambda_1\varphi$ est réductible à un seul carré; les trois quantités $\mu_1 a + \lambda_1 a_1$, $\mu_1 a' + \lambda_1 a'_1$, $\mu_1 a'' + \lambda_1 a''_1$ ne sont pas nulles simultanément, car sinon tous les éléments du discriminant $\Delta(\lambda_1, \mu_1)$ seraient nuls, ce qui est impossible. Si l'on suppose, par exemple, $\mu_1 a + \lambda_1 a_1$ différent de zéro, on a

$$\mu_1 f + \lambda_1\varphi = \varepsilon_3 z'^2,$$

en désignant par z' la forme linéaire

$$z' = \frac{(\mu_1 a + \lambda_1 a_1)x + (\mu_1 b'' + \lambda_1 b''_1)y + (\mu_1 b' + \lambda_1 b'_1)z}{\sqrt{\varepsilon_3(\mu_1 a + \lambda_1 a_1)}},$$

et par ε_3 l'un des nombres $+1$ ou -1, choisi de façon que la quantité sous le radical soit positive lorsqu'elle est réelle.

En désignant par $\frac{\lambda_3}{\mu_3}$ la racine simple, la forme

$\mu_3 f + \lambda_3 \varphi$ a son discriminant nul sans que les mineurs le soient, et se réduit à une somme de deux carrés d'une infinité de manières; nous écrirons

$$\mu_3 f + \lambda_3 \varphi = - \varepsilon_1 x'^2 - \varepsilon_2 y'^2,$$

x' et y' désignant deux formes linéaires que l'on sait former par le procédé connu de réduction d'une forme à la somme de plusieurs carrés, et qu'il est inutile d'écrire; ε_1 et ε_2 désignent encore ± 1.

On tire des deux égalités précédentes les valeurs de f et φ

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} f &= - \frac{\varepsilon_1 \lambda_1 x'^2}{\Delta_1} - \frac{\varepsilon_2 \lambda_1 y'^2}{\Delta_1} - \frac{\varepsilon_3 \lambda_3 z'^2}{\Delta_1}, \\ \varphi &= \frac{\varepsilon_1 \mu_1 x'^2}{\Delta_1} + \frac{\varepsilon_2 \mu_1 y'^2}{\Delta_1} + \frac{\varepsilon_3 \mu_3 z'^2}{\Delta_1}, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé $\Delta_1 = \lambda_1 \mu_3 - \mu_1 \lambda_3$; on obtient ainsi une décomposition simultanée des formes données en une somme de trois carrés, analogue à la réduction fournie par les formules (8); les formes x', y', z' sont indépendantes et, en les multipliant par des facteurs convenables, on peut les remplacer par des formes ξ, η, ζ telles que l'on ait

$$(15') \qquad \left\{ \begin{aligned} f &= - \lambda_1 \xi^2 - \lambda_1 \eta^2 - \lambda_3 \zeta^2. \\ \varphi &= \mu_1 \xi^2 + \mu_1 \eta^2 + \mu_3 \zeta^2. \end{aligned} \right.$$

Cette réduction est possible d'une infinité de manières; on peut la remplacer par la suivante

$$(15'') \qquad \left\{ \begin{aligned} f &= - \lambda_1 2 \xi' \eta' - \lambda_3 \zeta^2, \\ \varphi &= \mu_1 2 \xi' \eta' + \mu_3 \zeta^2, \end{aligned} \right.$$

qui, au changement de signe près de ξ', η', ζ, est possible d'une seule manière.

9. *Cinquième cas.* — Le discriminant a une racine triple annulant les mineurs et n'annulant pas les élé-

ments. Soit $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ cette racine triple, la forme $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi$ est, comme dans le cas précédent, réductible à un seul carré, et nous pouvons écrire

$$\mu_1 f + \lambda_1 \varphi = \varepsilon_3 z'^2,$$

z' étant une forme linéaire analogue à celle que nous avons ainsi désignée précédemment; nous écrirons

$$z' = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Cherchons à calculer la forme quadratique $\mu_3 f + \lambda_3 \varphi$, où λ_3 et μ_3 sont deux nombres quelconques tels que $\lambda_1 \mu_3 - \mu_1 \lambda_3$ ne soit pas nul, et à la réduire à une forme simple; en supposant, pour fixer les idées, que γ soit différent de zéro, x et y constituent avec z' un système de formes linéaires indépendantes, et l'on peut, dans $\mu_3 f + \lambda_3 \varphi$, remplacer z par $\frac{1}{\gamma}(z' - \alpha x - \beta y)$. Soit

$$\begin{aligned} &\varphi_2(x, y, z') \\ &\quad = a_2 x^2 + a'_2 y^2 + a''_2 z'^2 + 2 b_2 y z' + 2 b'_2 z' x + 2 b''_2 x y, \end{aligned}$$

le résultat de cette substitution; considérons la forme quadratique

$$\mu' \varepsilon_3 z'^2 + \lambda' \varphi_2(x, y, z')$$

et son discriminant

$$\Delta'(\lambda', \mu') = \begin{vmatrix} \lambda' a_2 & \lambda' b''_2 & \lambda' b'_2 \\ \lambda' b''_2 & \lambda' a'_2 & \lambda' b_2 \\ \lambda' b'_2 & \lambda' b_2 & \mu' \varepsilon_3 + \lambda' a''_2 \end{vmatrix};$$

comme la forme considérée est identique à la forme $\mu f + \lambda \varphi$, où l'on a

$$\begin{aligned} \mu &= \mu' \mu_1 + \lambda' \mu_3, \\ \lambda &= \mu' \lambda_1 + \lambda' \lambda_3, \end{aligned}$$

l'équation $\Delta'(\lambda', \mu') = 0$ aura, comme $\Delta(\lambda, \mu) = 0$, une racine triple, et cette racine est déterminée par l'équation

$$\frac{\mu'\lambda_1 + \lambda'\lambda_3}{\mu'\mu_1 + \lambda'\mu_3} = \frac{\lambda_1}{\mu_1},$$

qui donne $\lambda' = 0$. Pour que le discriminant $\Delta'(\lambda', \mu')$ soit divisible par λ'^3, il faut et il suffit que l'on ait

$$a_2 a'_2 - b''^2_2 = 0,$$

c'est-à-dire que la forme quadratique

$$a_2 x^2 + a'_2 y^2 + 2 b''_2 xy$$

soit carré parfait; nous pourrons la représenter par $-\varepsilon_1 x'^2$, x' désignant une forme linéaire particulière; en écrivant de plus

$$a''_2 z' + 2 b_2 y + 2 b'_2 x = -2 y',$$

nous aurons

$$\mu_3 f + \lambda_3 \varphi = -\varepsilon_1 x'^2 - 2 y' z'.$$

Cette identité, jointe à celle qui donne $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi$, fournit les expressions suivantes de f et de φ, où l'on a posé, comme précédemment,

$$\Delta_1 = \lambda_1 \mu_3 - \mu_1 \lambda_3,$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= -\frac{\varepsilon_1 \lambda_1 x'^2}{\Delta_1} - \frac{2\lambda_1 y' z'}{\Delta_1} - \frac{\varepsilon_3 \lambda_3 z'^2}{\Delta_1}, \\ \varphi &= \frac{\varepsilon_1 \mu_1 x'^2}{\Delta_1} + \frac{2\mu_1 y' z'}{\Delta_1} + \frac{\varepsilon_3 \mu_3 z'^2}{\Delta_1}. \end{aligned} \right.$$

Les formes x', y', z' sont linéairement indépendantes, et, en les multipliant par des facteurs constants, on peut écrire

$$(16') \quad \left\{ \begin{aligned} f &= -\lambda_1 \xi^2 - 2\lambda_1 \eta\zeta - \lambda_3 \zeta^2, \\ \varphi &= \mu_1 \xi^2 + 2\mu_1 \eta\zeta + \mu_3 \zeta^2; \end{aligned} \right.$$

les nombres λ_3 et μ_3 sont arbitraires, et l'un d'eux peut être choisi égal à zéro; la décomposition est possible d'une infinité de manières, mais ζ est déterminé cependant à un facteur constant près.

10. *Sixième cas.* — Le discriminant a une racine triple annulant tous les éléments. Si $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est cette racine, la forme $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi$ est identiquement nulle; choisissons deux nombres quelconques λ_3 et μ_3 tels que $\Delta_1 = \lambda_1 \mu_3 - \mu_1 \lambda_3$ ne soit pas nul et que la forme $\mu_3 f + \lambda_3 \varphi$ ne soit pas identiquement nulle; nous pouvons décomposer cette forme en une somme de trois carrés par les méthodes connues, et poser

$$\mu_3 f + \lambda_3 \varphi = -\varepsilon_1 x'^2 - \varepsilon_2 y'^2 - \varepsilon_3 z'^2,$$

avec

$$\mu_1 f + \lambda_1 \varphi = 0;$$

nous aurons la réduction simultanée

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} f &= -\frac{\varepsilon_1 \lambda_1 x'^2}{\Delta_1} - \frac{\varepsilon_2 \lambda_1 y'^2}{\Delta_1} - \frac{\varepsilon_3 \lambda_1 z'^2}{\Delta_1}, \\ \varphi &= \quad \frac{\varepsilon_1 \mu_1 x'^2}{\Delta_1} + \frac{\varepsilon_2 \mu_1 y'^2}{\Delta_1} + \frac{\varepsilon_3 \mu_1 z'^2}{\Delta_1}. \end{aligned}\right.$$

Les formes x', y', z' sont indépendantes, et nous obtenons bien une réduction simultanée de f et φ en une somme de trois carrés; on peut la remplacer par la suivante :

$$(17')\qquad \left\{\begin{aligned} f &= -\lambda_1 \xi^2 - \lambda_1 \eta^2 - \lambda_1 \zeta^2, \\ \varphi &= \quad \mu_1 \xi^2 + \mu_1 \eta^2 + \mu_1 \zeta^2, \end{aligned}\right.$$

et elle est possible d'une infinité de manières.

11. Considérons maintenant le cas, que nous avons réservé, où le discriminant $\Delta(\lambda, \mu)$ est identiquement nul; si ses mineurs le sont également sans que les formes données se réduisent identiquement à zéro, chacune d'elles se réduit à un seul carré. Dans le cas

contraire, considérons deux nombres quelconques λ_1, μ_1 n'annulant pas tous les mineurs de $\Delta(\lambda, \mu)$; la forme $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi$ est réductible à la somme de deux carrés, et nous l'écrirons sous la forme du produit de deux formes linéaires, en posant

$$\mu_1 f + \lambda_1 \varphi = 2y'z';$$

y', z' et l'une des variables x, y, z, soit x, pour fixer les idées, constituent des formes linéaires indépendantes au moyen desquelles nous pouvons évaluer toute forme quadratique telle que $\mu_2 f + \lambda_2 \varphi$, λ_2 et μ_2 étant choisis de façon que $\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2$ ne soit pas nul; soit

$$\begin{aligned}&\varphi_2(x, y', z')\\ &\quad = a_2 x^2 + a'_2 y'^2 + a''_2 z'^2 + 2b_2 y'z' + 2b'_2 z'x + 2b''_2 xy',\end{aligned}$$

ce que devient cette dernière forme après la substitution que nous indiquons; le discriminant de

$$\mu' 2y'z' + \lambda' \varphi_2(x, y', z')$$

qui est

$$\begin{vmatrix} \lambda' a_2 & \lambda' b''_2 & \lambda' b'_2 \\ \lambda' b''_2 & \lambda' a'_2 & \mu' + \lambda' b_2 \\ \lambda' b'_2 & \mu' + \lambda' b_2 & \lambda' a''_2 \end{vmatrix},$$

doit être identiquement nul, comme $\Delta(\lambda, \mu)$; on doit donc avoir

$$a_2 = 0, \qquad b'_2 b''_2 = 0, \qquad a'_2 b'^2_2 + a''_2 b''^2_2 = 0,$$

d'où les trois hypothèses suivantes :

1° $a_2 = b'_2 = a''_2 = 0$; alors on a

$$\mu_2 f + \lambda_2 \varphi = y'(a'_2 y' + 2b_2 z' + 2b''_2 x),$$

et cette forme est décomposable en un produit de deux facteurs dont l'un est y';

2° $a_2 = b''_2 = a'_2 = 0$; on a de même

$$\mu_2 f + \lambda_2 \varphi = z'(a''_2 z' + 2b_2 y' + 2b'_2 x),$$

de sorte que cette forme renferme z' comme facteur;

3° $a_2 = b'_2 = b''_2 = 0$; dans ce cas, $\mu_2 f + \lambda_2 \varphi$ se réduit à

$$\mu_2 f + \lambda_2 \varphi = a'_2 y'^2 + a''_2 z'^2 + 2 b_2 y' z',$$

et ne renferme plus que les variables y' et z'; en résumé, les formes $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi$ et $\mu_2 f + \lambda_2 \varphi$, par suite f et φ ou bien sont décomposables en un produit de deux facteurs avec un facteur commun, ou bien se réduisent à des formes quadratiques de deux variables seulement; dans ce dernier cas, leur réduction simultanée à des formes canoniques est un problème analogue à celui que nous avons traité, mais avec deux variables au lieu de trois.

12. En laissant de côté le cas exceptionnel que nous venons de mentionner, nous voyons que la réduction simultanée des formes f et φ est donnée, dans chacun des cas étudiés, par les formules suivantes :

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{I}) & f = -\lambda_1 \xi^2 - \lambda_2 \eta^2 - \lambda_3 \zeta^2, & \varphi = \mu_1 \xi^2 + \mu_2 \eta^2 + \mu_3 \zeta^2,\\
(\mathrm{II}) & f = -2\lambda_1 \xi\eta - \lambda_3(\xi^2 + \zeta^2), & \varphi = 2\mu_1 \xi\eta + \mu_3(\xi^2 + \zeta^2),\\
(\mathrm{III}) & f = -\lambda_1(\eta^2 + 2\xi\zeta) - 2\lambda_3 \xi\eta, & \varphi = \mu_1(\eta^2 + 2\xi\zeta) + 2\mu_3 \xi\eta,\\
(\mathrm{IV}) & f = -\lambda_1(\xi^2 + \eta^2) - \lambda_3 \zeta^2, & \varphi = \mu_1(\xi^2 + \eta^2) + \mu_3 \zeta^2,\\
(\mathrm{V}) & f = -\lambda_1(\xi^2 + 2\eta\zeta) - \lambda_3 \zeta^2, & \varphi = \mu_1(\xi^2 + 2\eta\zeta) + \mu_3 \zeta^2,\\
(\mathrm{VI}) & f = -\lambda_1(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), & \varphi = \mu_1(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).
\end{array}$$

Cette réduction est générale et s'applique, quelle que soit la nature des coefficients des formes données; lorsqu'ils sont réels, le discriminant est une forme à coefficients réels, et a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées, ou bien trois racines réelles, ce dernier cas se présentant toujours dès que deux ou trois racines sont égales.

Si les trois racines sont réelles, distinctes ou non, nous pouvons toujours choisir pour λ_1, μ_1, λ_2, μ_2, λ_3, μ_3 des nombres réels et diriger les calculs de manière que les formes linéaires x', y', z' aient leurs coefficients réels; la décomposition est alors donnée par les formules (8), (13), (14), (15), (16), (17), et tous les coefficients qui y entrent sont réels.

Si le discriminant a des racines distinctes, dont une réelle et deux imaginaires conjuguées, et si $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est la racine réelle, on peut supposer que les nombres λ_1 et μ_1 sont réels et, dans la formule (8), prendre pour x' une forme linéaire à coefficients réels; les coefficients de x'^2 seront également réels; on peut ensuite choisir λ_3 et μ_3 respectivement conjugués de λ_2 et μ_2, prendre ε_2 et ε_3 égaux à l'unité et diriger le calcul de façon que y' et z' aient des coefficients imaginaires conjugués. De cette manière, f et φ se réduisent au carré d'une forme réelle, affecté d'un coefficient réel, et aux carrés de deux formes imaginaires conjuguées, affectés de coefficients également conjugués. Il est impossible que les imaginaires disparaissent, au cours du calcul, dans les coefficients de y' et de z', car ces formes conjuguées deviendraient identiques, et les fonctions f et φ se réduiraient à deux carrés; il est également impossible de remplacer

$$\frac{\lambda_2 y'^2}{\Delta_2} + \frac{\lambda_3 z'^2}{\Delta_3} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_2 y'^2}{\Delta_2} + \frac{\mu_3 z'^2}{\Delta_3}$$

par la somme des carrés de deux formes réelles, affectés de coefficients réels, car les racines du discriminant seraient toutes trois réelles, contrairement à l'hypothèse.

13. Le cas le plus important que nous mentionnerons est le suivant : les formes f et φ ont leurs coefficients réels, et il existe une forme du faisceau $\mu f + \lambda\varphi$ réductible à la somme des carrés de trois formes linéaires réelles, affectés de coefficients non nuls, réels et de même signe. Supposons, pour fixer les idées, que la forme $\mu_0 f + \lambda_0 \varphi$, où λ_0 et μ_0 sont réels et n'annulent pas $\Delta(\lambda, \mu)$, soit la somme de trois carrés affectés de coefficients positifs; je dis que le discriminant doit satisfaire à l'une des conditions suivantes :

1° S'il a ses racines distinctes, elles sont toutes trois réelles;

2° S'il a une racine double, elle doit annuler les mineurs;

3° S'il a une racine triple, elle doit annuler tous les éléments; autrement dit, on se trouvera placé dans le premier, le quatrième ou le sixième cas, et les éléments de la décomposition seront réels.

Pour le démontrer, nous remarquerons que la forme $\mu_0 f + \lambda_0 \varphi$ est toujours positive et ne peut s'annuler que pour des valeurs nulles attribuées à x, y, z, et nous montrerons qu'une hypothèse faite sur le discriminant, différente de celles que nous avons mentionnées, conduit à des conséquences inadmissibles.

Si nous supposons que les racines soient distinctes, que l'une soit réelle et les deux autres imaginaires, nous pouvons, en partant des formules (8), mettre $\mu_0 f + \lambda_0 \varphi$ sous la forme suivante :

$$\mu_0 f + \lambda_0 \varphi = \varepsilon_1 X^2 + Y^2 + Z^2,$$

où X est une forme réelle, Y et Z deux formes imaginaires conjuguées; si l'on pose

$$Y = Y_1 + i Y_2, \qquad Z = Y_1 - i Y_2,$$

on a

$$\mu_0 f + \lambda_0 \varphi = \varepsilon_1 X^2 + 2(Y_1 + Y_2)(Y_1 - Y_2),$$

et le second membre s'annule pour toutes les valeurs de x, y, z satisfaisant aux équations $X = 0$, $Y_1 + Y_2 = 0$, valeurs qui ne sont pas toutes nulles, et cela est impossible.

Si nous nous plaçons dans le deuxième cas de réduction, nous pouvons, en partant des formules (13), écrire

$$\mu_0 f + \lambda_0 \varphi = \varepsilon_1 X^2 + 2XY + \varepsilon_3 Z^2,$$

où X, Y, Z sont des formes réelles; le second membre s'annule pour les valeurs non toutes nulles de x, y, z, déduites des équations $X = 0$, $Z = 0$. De la même manière, on aurait, dans le troisième cas de réduction, en partant des formules (14),

$$\mu_0 f + \lambda_0 \varphi = 2XY + \varepsilon_1 (Y^2 + 2XZ),$$

et le second membre s'annulerait pour les valeurs satisfaisant aux équations $X = 0$, $Y = 0$. Enfin, dans le cinquième cas, les formules (16) conduiraient à la réduction suivante :

$$\mu_0 f + \lambda_0 \varphi = \varepsilon_1 X^2 + 2XY + \varepsilon_3 Z^2,$$

et le second membre s'annulerait encore en posant $X = 0$, $Z = 0$; la proposition se trouve ainsi démontrée.

En supposant, par exemple, que l'une des formes données soit

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2,$$

on retrouve, de cette manière, toutes les propriétés des racines de l'équation en S.

14. Les considérations qui précèdent s'appliquent à la recherche des points communs à deux coniques; si, par rapport à un même triangle de référence, les équations de ces courbes sont $f = 0$, $\varphi = 0$, nous pouvons faire la transformation de coordonnées qui permet de les ramener aux formes les plus simples, et rapporter les deux courbes au triangle de référence dont les côtés ont

pour équations $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ ou, ce qui revient au même, $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, x', y', z' ayant les valeurs que nous avons données dans chacun des cas; nous allons reprendre successivement les six hypothèses que nous avons examinées, et retrouver les résultats classiques connus.

I. Les équations des coniques se ramènent à la forme

$$-f = \frac{\varepsilon_1 \lambda_1 x'^2}{\Delta_1} + \frac{\varepsilon_2 \lambda_2 y'^2}{\Delta_2} + \frac{\varepsilon_3 \lambda_3 z'^2}{\Delta_3} = 0,$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon_1 \mu_1 x'^2}{\Delta_1} + \frac{\varepsilon_2 \mu_2 y'^2}{\Delta_2} + \frac{\varepsilon_3 \mu_3 z'^2}{\Delta_3} = 0.$$

Si l'on remarque que l'on a

$$\Delta_1(\lambda_2 \mu_3 - \mu_2 \lambda_3) = \Delta_2(\lambda_3 \mu_1 - \mu_3 \lambda_1) = \Delta_3(\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2),$$

on voit que les coordonnées des points communs sont fournies par les équations

$$\varepsilon_1 x'^2 = \varepsilon_2 y'^2 = \varepsilon_3 z'^2;$$

il existe ainsi quatre points communs formant un quadrangle complet dont le triangle diagonal est le triangle de référence; ce triangle est en même temps conjugué par rapport aux deux coniques, et les équations des couples de sécantes communes, qui sont respectivement

$$\mu_1 f + \lambda_1 \varphi = 0, \qquad \mu_2 f + \lambda_2 \varphi = 0, \qquad \mu_3 f + \lambda_3 \varphi = 0,$$

deviennent

$$\varepsilon_2 y'^2 - \varepsilon_3 z'^2 = 0, \qquad \varepsilon_3 z'^2 - \varepsilon_1 x'^2 = 0, \qquad \varepsilon_1 x'^2 - \varepsilon_2 y'^2 = 0.$$

Si les coefficients de f et φ sont réels, et si le discriminant a ses racines réelles, le triangle conjugué est réel; les quatre points communs sont réels lorsque ε_1, ε_2, ε_3 sont de même signe, imaginaires dans le cas contraire. Si le discriminant n'a qu'une racine réelle, on peut poser $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, prendre pour x' une forme réelle, et pour y' et z' deux formes imaginaires conjuguées $y' = y'_1 + iz'_1$, $z' = y'_1 - iz'_1$; le triangle de référence a un côté réel et les deux autres imaginaires conjugués se coupant en un sommet réel, mais on peut le remplacer au besoin par celui dont les côtés réels ont pour équations

$$x' = 0, \qquad y'_1 = 0, \qquad z'_1 = 0.$$

Les coniques ont alors deux points communs réels tels que l'on ait

$$z'_1 = 0, \qquad x' = \pm y'_1,$$

et deux points communs imaginaires donnés par les équations

$$y'_1 = 0, \qquad x' = \pm iz'_1.$$

15. II. Les formules (13) montrent que les équations des coniques se ramènent à la forme

$$-f = \lambda_3 x'^2 + 2\lambda_1 x'y' + \varepsilon\lambda_3 z'^2 = 0,$$
$$\varphi = \mu_3 x'^2 + 2\mu_1 x'y' + \varepsilon\mu_3 z'^2 = 0;$$

les points communs sont fournis par les équations

$$x'y' = 0, \qquad x'^2 + \varepsilon z'^2 = 0,$$

qui représentent les deux couples de sécantes communes, le second correspondant à la racine double. Les deux coniques ont deux points communs confondus à l'intersection du côté $z' = 0$ et de la droite $x' = 0$, qui est tangente commune aux deux courbes en ce point; les deux autres points sont distincts et sont fournis par $y' = 0$, $x'^2 + \varepsilon z'^2 = 0$; ils sont réels ou imaginaires suivant que ε est négatif ou positif. Les deux coniques sont tangentes en un point et le triangle de référence est formé de la tangente commune au point de contact, de la sécante passant par les points simples, et de la droite conjuguée harmonique de la tangente par rapport au couple de sécantes correspondant à la racine double.

III. Les formules (14) donnent pour équations réduites des coniques

$$-f = 2\lambda_3 x'y' + \lambda_1(y'^2 + 2x'z') = 0,$$
$$\varphi = 2\mu_3 x'y' + \mu_1(y'^2 + 2x'z') = 0;$$

les points communs sont donnés par les équations

$$x'y' = 0, \qquad y'^2 + 2x'z' = 0,$$

dont la première est celle du couple de sécantes unique $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi = 0$; elles donnent un point double $x' = 0$, $y' = 0$ et deux autres points simples $y' = 0$, $x' = 0$ et $y' = 0$, $z' = 0$; les coniques ont ainsi trois points communs confondus au sommet $x' = 0$, $y' = 0$, la droite $x' = 0$ étant la tangente commune; le triangle de référence est formé de la tangente au point triple, de la sécante joignant ce point au quatrième point commun, et d'une droite particulière passant par ce point, variable avec le choix que l'on fait de λ_3 et μ_3.

IV. Les formules (15) donnent pour équations réduites

$$-f = \lambda_1(\varepsilon_1 x'^2 + \varepsilon_2 y'^2) + \varepsilon_3 \lambda_3 z'^2 = 0,$$
$$\varphi = \mu_1(\varepsilon_1 x'^2 + \varepsilon_2 y'^2) + \varepsilon_3 \mu_3 z'^2 = 0;$$

les points communs sont donnés par les équations

$$z'^2 = 0, \qquad \varepsilon_1 x'^2 + \varepsilon_2 y'^2 = 0,$$

qui représentent les couples de sécantes communes; les coniques ont deux points doubles communs sur la droite $z' = 0$, réels ou imaginaires suivant que ε_1 et ε_2 sont de signes différents ou de même signe. Les coniques sont bitangentes et le triangle de référence, qui est conjugué commun par rapport aux deux coniques, est formé de la corde des contacts $z' = 0$ et de deux droites arbitraires conjuguées harmoniques par rapport aux sécantes correspondant à la racine simple.

V. Les formules (16) donnent des équations réduites de la forme

$$-f = \lambda_1 (x'^2 + 2y'z') + \varepsilon\lambda_3 z'^2 = 0,$$
$$\varphi = \mu_1 (x'^2 + 2y'z') + \varepsilon\mu_3 z'^2 = 0,$$

de sorte que les points communs sont fournis par les équations

$$z'^2 = 0, \qquad x'^2 + 2y'z' = 0,$$

dont la première représente le couple unique de sécantes communes $\mu_1 f + \lambda_1 \varphi = 0$; les coniques ont quatre points confondus au sommet $x' = 0$, $z' = 0$, et ont en ce point même tangente, la droite $z' = 0$. Le triangle de référence est formé de la tangente commune, d'une droite passant par le point commun et d'un dernier côté passant par le pôle de la droite précédente.

VI. Les deux coniques sont confondues et ont tous leurs points communs.

Dans le cas où le discriminant $\Delta(\lambda, \mu)$ est identiquement nul, les deux coniques sont chacune un couple de droites, elles ont une droite commune ou bien les quatre droites passent toutes par le même point.

16. Nous terminerons par la remarque suivante relative aux triangles conjugués communs par rapport à deux coniques : s'il existe un tel triangle et si on le prend comme triangle de référence, les équations des

deux courbes doivent être de la forme

$$l_1\,x'^2 + l_2\,y'^2 + l_3\,z'^2 = 0,$$
$$m_1 x'^2 + m_2 y'^2 + m_3 z'^2 = 0;$$

il faut donc, comme nous l'avons vu au n° 3, que les diviseurs élémentaires du discriminant soient du premier degré, c'est-à-dire que les coniques aient quatre points communs distincts, ou soient bitangentes, ou soient confondues; nous avons vu que ces conditions sont suffisantes; dans le premier cas, il n'existe qu'un seul triangle répondant à la question, c'est le triangle diagonal du quadrangle des quatre points communs; dans le second, il y a une infinité de triangles conjugués ayant un côté et un sommet commun, la corde des contacts et le pôle de cette corde; dans le troisième cas, tout triangle conjugué par rapport à l'une des coniques est un triangle conjugué commun.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE JUILLET 1896. — COMPOSITIONS.

Besançon.

Analyse. — I. *Étant donnés deux points fixes* O *et* A, *déterminer une courbe, sachant que la tangente en l'un quelconque de ses points* M *passe par le point* A' *symétrique de* A *par rapport à* OM. *Discuter la forme des courbes obtenues.*

En prenant OA pour axe polaire et O pour pôle, on obtient une équation de Bernoulli; les courbes demandées sont représentées par l'équation

$$r = \frac{a \sin\theta}{\theta - \theta_0},$$

le rayon vecteur admet une infinité de maxima : la courbe admet une asymptote à distance finie.

II. *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{3x^5 - 2x^3 + 4x^4 - 3ax^2}{(x+a)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

où a est une constante plus grande que 1.

On divise le numérateur de la fraction par $(x+a)^2$, ce qui permet de décomposer l'intégrale en deux parties. La première partie est constituée par des termes de la forme

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

dont la valeur s'obtient immédiatement. Pour obtenir l'intégrale restante, on intègre le long d'un contour formé : 1° d'une circonférence de rayon très grand ayant pour centre l'origine; 2° d'une circonférence de rayon très petit ayant pour centre le point $(-a)$; 3° d'une coupure allant du point (-1) au point $(+1)$. La valeur demandée est zéro.

Mécanique. — I. *Transformation de Lagrange pour le mouvement d'un point.*

II. *Une barre homogène pesante glisse par une extrémité* A *sur un cercle tracé dans un plan vertical et passe constamment par un point fixe* O *de la circonférence situé sur un diamètre horizontal. Déterminer le mouvement de la barre et les réactions des points* A *et* O.

L'équation des forces vives suffit pour déterminer le mouvement. Les réactions s'obtiennent ensuite en écrivant les équations du mouvement du centre de gravité de la barre.

Épreuve pratique. — *On demande de calculer pour le 27 mai 1885, à* $9^h\,25^m$, *temps moyen de Paris, la distance angulaire du centre de la Lune au centre de Jupiter :*

1° *En partant des coordonnées équatoriales des deux axes ;*

2° *En interpolant les distances lunaires de la* Connaissance des Temps.

Dijon.

Analyse. — I. *Faire voir qu'on reproduit une équation aux dérivées partielles donnée, linéaire par rapport aux dérivées de la fonction inconnue, par l'élimination des éléments d'indétermination contenus dans son équation intégrale générale, entre les équations engendrées par la différentiation de cette dernière.* (Question de cours.)

II. *De quelles formes doivent être les fonctions indéterminées* $P(x, y)$, $Q(x, y)$, *pour que les équations aux différentielles totales*

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x} + Pu,$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{y^2 - x^2}{y} + Qu$$

forment un système passif (c'est-à-dire aient une intégrale générale renfermant une constante arbitraire)?

III. *Intégrer ces équations en supposant* $P = \frac{1}{x}$, $Q = \frac{1}{y}$.

II. En différentiant la première équation par rapport à y et substituant à $\frac{du}{dy}$ le second membre de la dernière équation, en différentiant ensuite celle-ci par rapport à x et substituant à $\frac{du}{dx}$ le second membre de la première, on obtient pour $\frac{d^2 u}{dx\,dy}$ deux expressions dont l'identité, exprimée quelles que soient x, y, u considérées un instant comme trois variables indépendantes, conduit aux deux conditions

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = 0,$$
$$xP + yQ - 2 = 0;$$

et l'intégration de ce système mixte donne les expressions cherchées

$$P = \frac{1}{x}\left[1 + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right], \qquad Q = \frac{1}{y}\left[1 - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

où φ représente une fonction arbitraire d'une seule variable.

III. Le système particulier à intégrer est

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{x^2 - y^2}{x} + \frac{u}{x}, \\ \frac{du}{dy} &= \frac{y^2 - x^2}{x} + \frac{u}{y}. \end{aligned} \right.$$

En prenant la première équation isolément, y considérant y comme une variable paramétrique et l'intégrant, il vient, par la méthode propre aux équations linéaires, une certaine fonction de x, de y et, en outre, d'une fonction arbitraire de y, dont la détermination procurée par l'autre équation donne, pour l'intégrale cherchée,

$$u = x^2 + y^2 + Cxy,$$

où C est une constante arbitraire.

On pourrait aussi intégrer les équations (α), rendues homogènes par la suppression des termes indépendants de u dans les seconds membres, ce qui conduit à

$$u = Cxy,$$

puis remplacer C par la fonction de x et de y que donne la méthode de la variation des constantes arbitraires étendue au cas dont il s'agit.

On pourrait encore intégrer l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u,$$

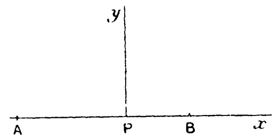
résultant d'une combinaison évidente des équations (α), puis déterminant la fonction arbitraire intervenant dans l'intégrale générale, de manière que celle-ci satisfasse à l'une des équations proposées, choisie au hasard.

Mécanique. — I. *Forme d'équilibre d'un fil homogène pesant entre deux points. Formules relatives à cette forme d'équilibre.*

II. *Un fil homogène pesant est attaché par ses deux extrémités à deux points fixes* A *et* B *situés à la même hauteur, et passe sur une poulie infiniment petite* P *située entre* A *et* B *et à la même hauteur. On demande les positions d'équilibre du fil. On néglige les frottements de la poulie sur son axe et du fil sur la poulie.*

On posera $PA = a$, $PB = b$, *et l'on désignera par* l *la longueur du fil.*

II. Le fil a la forme de deux arcs de chaînette l'un allant de A en P, l'autre de P en B.



Les tensions en P étant égales pour chaque arc de chaînette, les axes étant Px horizontal dirigé vers B et Py vertical dirigé vers le haut, les équations des chaînettes seront

$$y - y_0 = \frac{h}{2}\left[e^{\left(x+\frac{a}{2}\right)\frac{1}{h}} + e^{-\left(x+\frac{a}{2}\right)\frac{1}{h}}\right],$$

$$y - y_0 = \frac{k}{2}\left[e^{\left(x-\frac{b}{2}\right)\frac{1}{k}} + e^{-\left(x-\frac{b}{2}\right)\frac{1}{k}}\right].$$

On en tire, pour déterminer h et k, les deux équations

$$h\left(e^{\frac{a}{2h}} + e^{-\frac{a}{2h}}\right) = k\left(e^{\frac{b}{2k}} + e^{-\frac{b}{2k}}\right),$$

$$h\left(e^{\frac{a}{2h}} - e^{-\frac{a}{2h}}\right) = k\left(e^{\frac{b}{2k}} - e^{-\frac{b}{2k}}\right) = l,$$

d'où on tire, pour déterminer h, l'équation

$$\frac{2b}{\sqrt{4h^2 - l^2 + 2lh\left(e^{\frac{a}{2h}} - e^{-\frac{a}{2h}}\right)}} = \mathrm{L}\left(l + 2he^{-\frac{a}{2h}}\right) - \mathrm{L}\left(2he^{\frac{a}{2h}} - l\right).$$

ASTRONOMIE. — *Connaissant l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, ainsi que l'obliquité de l'écliptique, calculer la longitude et la latitude.*

$$Æ = 12^{\mathrm{h}}37^{\mathrm{m}}5^{\mathrm{s}},99,$$
$$\delta = -(2^\circ 33' 49'',6),$$
$$\omega = 23^\circ 27' 8'',98\,;$$

on trouve

$$L = 189^\circ 31' 53'', 1,$$
$$\lambda = 1^\circ 19' 16'', 6.$$

Rennes.

Analyse. — *Étant donnés un plan* P *et un point fixe* O *de ce plan, on propose :*

1° *De former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que la portion* MN *de leur normale comprise entre le pied* M *de cette normale et le plan* P *soit constamment égale à* ON ;

2° *D'intégrer cette équation;*

3° *De déterminer la fonction arbitraire de manière que les surfaces soient de révolution autour de la perpendiculaire* OZ *au plan* P;

4° *De trouver sur la surface*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

(*le plan* P *est le plan des* xy) *à laquelle on est ainsi conduit, les lignes dont la normale principale rencontre constamment* OZ.

La quatrième question se ramène aisément à une quadrature. A l'égard des trois premières questions on pourra observer qu'une solution singulière, au point de vue géométrique, est constituée par les cylindres à génératrices parallèles à OZ.

Le calcul, conduit sans précaution, donne non pas ces cylindres, mais leurs transformés dans une inversion de pôle O. Ce sont les solutions propres de la question proposée.

Mécanique. — *Un plateau circulaire homogène et horizontal tourne sur son axe de figure qui est fixe.*

Il est creusé d'une rainure circulaire concentrique à l'axe, dans laquelle on dépose sans vitesse une petite bille pesante.

La section droite de la rainure est un rectangle ouvert par le haut et à côtés verticaux, sa largeur surpasse un peu le diamètre de la bille, sa profondeur est au moins égale au rayon de la bille, de manière que celle-ci peut porter à la fois sur le fond et sur l'une des parois de la rainure.

L'appareil, ayant la vitesse angulaire ω_0 au moment où l'on y dépose la bille, est abandonné à lui-même.

Étudier le mouvement du système sous l'action des frottements qui vont naître entre la bille et le plateau.

On s'assurera d'abord que la bille porte sur la paroi de la rainure qui est la plus éloignée de l'axe; et il y aura deux frottements en jeu. Alors, en désignant par λ le rapport du moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation de la bille dans la situation ci-dessus définie, au moment d'inertie du plateau, le théorème des aires permet d'exprimer la vitesse de rotation ω du plateau et la vitesse angulaire ω' de la bille en fonction de la vitesse angulaire $\Omega = \omega' - \omega$ par ces formules

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \frac{\omega_0 + \Omega}{\lambda}, \\ \omega &= \frac{\omega_0 - \lambda\Omega}{1 + k}; \end{aligned} \right.$$

soit a la distance du centre de la bille à l'axe.

L'évaluation du travail *des frottements* donne (théorème des forces vives) l'équation du mouvement entre les époques t et $t + dt$

$$(2) \qquad \Omega \left[\frac{d\Omega}{1+\lambda} - f\left(\left(\frac{g}{a} + \frac{(\omega_0 + \Omega)^2}{(1+\lambda)^2}\right)\right) dt \right] = 0$$

(f coefficient de frottement); dans la première phase du mouvement Ω est < 0.

Dans cette première phase on égalera donc à zéro la parenthèse facteur du premier membre de l'équation précédente.

On trouvera ainsi

$$(3) \qquad \begin{cases} \omega' = \sqrt{\dfrac{g}{a}} \operatorname{tang}\left(f\sqrt{\dfrac{g}{a}}\, t\right), \\ \omega = \omega_0 - \lambda\sqrt{\dfrac{g}{a}} \operatorname{tang}\left(f\sqrt{\dfrac{g}{a}}\, t\right), \end{cases}$$

d'où l'on déduit aisément les rotations finies θ du plateau et θ' du rayon qui suit la bille.

La première phase du mouvement se prolonge jusqu'à l'instant où la bille va se figer au plateau; les deux corps auront alors la vitesse angulaire $\omega_1 = \frac{\omega_0}{1+\lambda}$, indépendante de f, et la durée τ de cette première phase sera

$$\tau = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{a}{g}} \operatorname{arc\,tang}\left(\omega_1\sqrt{\frac{a}{g}}\right).$$

Durant cette période on aura

$$f\theta' = -\log\cos\left(f\sqrt{\frac{g}{a}}\, t\right);$$

$$f\theta = \omega_0 f t + \lambda \log\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\, ft.$$

Dans la seconde phase du mouvement la bille fait corps avec le plateau, et l'équation (2) doit être interprétée

$$\Omega = 0;$$

on ne sait alors plus rien sur le frottement mutuel des deux corps sinon qu'il est inférieur au frottement *statique* exigé par la rupture de l'équilibre relatif. Dans la première phase du mouvement, la bille de masse m éprouve, de la paroi verticale externe, la pression centripète $-ma\omega'^2$, de la paroi horizontale, la poussée mg et tangentiellement à la rainure, et dans le sens du mouvement l'impulsion $mf(g + a\omega'^2)$.

La résultante de ces trois forces fait, avec le rayon centrifuge de la bille, avec la verticale ascendante et avec la vitesse de la bille, des angles dont les cosinus sont respectivement proportionnels à

$$1 - e^{2f\theta'}, \quad 1, \quad fe^{2f\theta'}.$$

ÉPREUVE DE CALCUL. — I. *Dans un triangle géodésique on a mesuré les trois angles* A, B, C, *et le côté* a *opposé à l'angle* A

$$A = 40°36'56'',81, \qquad a = 6075^{\text{toises}},9001,$$
$$B = 75°39'29'',81,$$
$$C = 63°43'33'',79.$$

On demande de faire sur A, B, C *les corrections probables et d'achever la résolution du triangle par la méthode de Legendre. Le rayon* ρ *de la sphère qui porte le triangle est*

$$\rho = 3266330 \text{ toises}.$$

II. *La colatitude* λ *de Rennes est*

$$\lambda = 41°53'05'',$$

calculer la colatitude géocentrique λ_0 *de la même ville, connaissant l'excentricité* e *du méridien terrestre.*

$$e^2 = 0,0068395.$$

Caen.

Analyse et Géométrie. — I. *Intégrer le système des équations aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 \log u}{\partial x\, \partial y} = au, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

où a désigne une constante donnée différente de zéro, et u une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y.

II. *En désignant par r et θ deux variables indépendantes, trouver pour la fonction $f(r, \theta)$ toutes les déterminations telles que la surface représentée en coordonnées rectangulaires par les formules*

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$
$$z = f(r, \theta)$$

admette une première série de lignes asymptotiques se projetant sur le plan XOY *suivant des droites passant par l'origine, et une deuxième série de lignes asymptotiques se projetant sur le même plan suivant les spirales logarithmiques*

$$r = \mathrm{C}\, e^{m\theta},$$

où m désigne un paramètre fixe différent de zéro, et C *une constante arbitraire.*

I. Posant $u = e^v$, on a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = ae^v, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};$$

la seconde donne $v = \varphi(x+y)$: la première équation se réduit à une équation différentielle ordinaire qui s'intègre aisément et conduit, pour la valeur de u, à l'intégrale

$$\sqrt{\frac{A}{u}} = Be^{\frac{x+y}{2}\sqrt{A}} - \frac{a}{2B}e^{-\frac{x+y}{2}\sqrt{A}}.$$

II. Les projections des asymptotiques sur le plan des xy sont définies par l'équation

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & -2\sin\theta\, dr\, d\theta - r\cos\theta\, d\theta^2 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 2\cos\theta\, dr\, d\theta - r\sin\theta\, d\theta^2 \\ \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \theta} & \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} dr^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\theta} dr\, d\theta + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} d\theta^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation doit être équivalente à

$$d\theta(dr - mr\, d\theta) = 0;$$

$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0$, F est de la forme $r\varphi(\theta) + \psi(\theta)$. Pour l'identification on trouve qu'on doit avoir

$$\varphi''(\theta) + \varphi(\theta) = 0, \qquad \frac{\psi''(\theta)}{\psi'(\theta)} = m,$$

$$z = F(r, \theta) = (Ae^{\theta} + Be^{-\theta})r + Ce^{2m\theta} + D.$$

Mécanique. — I. *Déterminer le mouvement d'un point* M, *de masse égale à l'unité, assujetti à glisser sans frottement sur une surface fixe, définie par les équations*

$$x = u\sin^2 v, \qquad y = u\sin v\cos v, \qquad z = u\cos v,$$

où x, y, z désignent des coordonnées rectangulaires, u et v des paramètres indépendants. La seule force qui sollicite le point M *est dirigée suivant la perpendiculaire* MP *à l'axe des z, et égale à $\frac{a^2b^2}{\overline{\mathrm{MP}}^3}$, a et b étant des constantes. A l'instant initial on a*

$$u = a, \qquad v = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{du}{dt} = 0, \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{b}{a}.$$

II. *Une sphère homogène, soustraite à l'action de toute force extérieure, peut tourner librement autour d'un point* O *de sa surface, lequel est fixe dans l'espace. A l'instant initial, la sphère tourne avec une vitesse* ω *autour d'un axe instantané donné* OH, *faisant avec le rayon* OS *un angle dont la tangente est égale à* $\frac{2}{7}$. *Déterminer le mouvement que va prendre la sphère : faire connaître, pour un instant donné, l'accélération d'un point quelconque du solide et la pression exercée sur le point* O.

I. $$2T = u'^2 + a^2(1+\sin^2 v)v'^2; \qquad U = \frac{a^2 b^2}{u^2 \sin^2 v}.$$

L'équation de Lagrange relative à u donne

$$\frac{du'}{dt} - u(1+\sin^2 v)\,v'^2 + \frac{2a^2b^2}{u^3 \sin^2 v} = 0;$$

celle des forces vives

$$u'^2 + u^2(1+\sin^2 v)\,v'^2 - \frac{2a^2b^2}{u^2\sin^2 v} = 0;$$

ajoutant à la première, multipliée par u :

$$u\frac{du'}{dt} + u'\frac{du}{dt} = 0, \qquad uu' = \text{const.} = 0, \qquad u = a.$$

La trajectoire est la courbe de Viviani. L'équation des forces vives donne

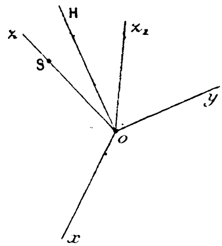
$$\frac{b}{a}\sqrt{2}\,dt = -\sin v\sqrt{1+\sin^2 v}\,dv,$$

$$\frac{bt\sqrt{2}}{a} = \frac{1}{2}\cos v\sqrt{2-\cos^2 v} + \arcsin\frac{\cos v}{\sqrt{2}}.$$

II. A l'instant initial, l'axe du couple des quantités de mouvement est dans le plan SOH ; si Oy est perpendiculaire à OS dans ce plan,

$$G_y = B_q = \frac{7}{5}\,MR^2\,\frac{2\omega}{\sqrt{53}}, \qquad G_z = \frac{2}{5}\,MR^2\,\frac{7\omega}{\sqrt{53}};$$

L'axe Oz_1 du couple est fixe dans l'espace : $SOz_1 = \frac{\pi}{4}$;



la sphère prend un mouvement de Poinsot où les cônes roulants sont de révolution. On trouve

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \qquad \psi' = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{53}}\,\omega, \qquad \varphi' = \frac{5}{\sqrt{53}}\,\omega.$$

En supposant qu'à un instant donné l'axe Oy soit dans le plan zOz_1, les formules de Rivals donnent

$$J_x = -\,\omega^2 x, \qquad J_y = \frac{4z - 49y}{53}\,\omega^2, \qquad J_z = \frac{24y - 4z}{53}\,\omega^2.$$

La pression sur le point O est parallèle à la perpendiculaire abaissée de S sur Oz_1 et égale à $\frac{4\sqrt{2}}{53}\,MR\omega^2$.

Épreuve pratique. — *Calculer, en temps sidéral et en temps moyen, la durée de visibilité de Régulus au-dessus de l'horizon de Caen, ainsi que l'angle sous lequel l'étoile rencontre l'horizon.*

Déclinaison boréale de Régulus......	$12^\circ 29' 26'', 2$
Latitude de Caen....................	$49^\circ 11' 14''$

Poitiers.

Analyse. — I. *Trouver la valeur de l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}},$$

prise dans le sens direct le long d'un cercle de rayon égal à l'unité, ayant pour centre le point $z = i$.

II. *Étant donnée l'équation*

$$\frac{y''}{f(x)} + \frac{X}{f(x)} y' + y = 0, \tag{1}$$

dans laquelle y' *et* y'' *sont les dérivées de* y *par rapport à* x, *et* $f(x)$ *une fonction connue de* x :

1° *Trouver une fonction* $t = \varphi(x)$ *telle que si l'on prend* t *pour variable indépendante l'équation devienne* $\frac{1}{k}\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$, k *étant une constante. Donner l'intégrale générale de l'équation* (1) *et déterminer la fonction inconnue* X *de manière que la transformation soit possible.*

2° *Déterminer* X *de telle sorte qu'en multipliant par* $2y'$ *le premier membre de l'équation* (1), *on obtienne une dérivée exacte. Déduire de là l'intégrale générale.*

Mécanique. — *Un corps homogène de révolution, pesant, est mobile autour de son axe de figure fixé en un de ses points. Tous les points du corps sont, en outre, attirés par un point de la verticale du point fixe proportionnellement à leur masse et à leur distance à ce point. On imprime au corps une très grande vitesse de rotation autour de son axe incliné d'un angle* θ_0 *sur la verticale, et on l'abandonne sans autre* *vitesse initiale. Calculer la précession et la nutation de l'axe à l'instant t. On suppose le centre d'attraction à une distance du point fixe égale à la distance a du centre de gravité du corps au même point.*

COMPOSITION D'ASTRONOMIE. — *Le 7 juillet* 1896, *les coordonnées héliocentriques de Neptune sont*

Longitude............	$77°56'31'',5$
Latitude............	$-1°24'54'',6$
Log rayon vecteur ...	$1,4750517$

Déterminer les coordonnées géocentriques, longitude, latitude, log distance, sachant que l'on a pour le Soleil :

Longitude..........	$104°47'24'',39$
Latitude............	$+0'',48$
Log distance.........	$0,0071999$

I. *Question de cours.* — Aucune difficulté. On trouve

$$\frac{2n!}{n!\,n!}\,\frac{\pi}{2^{2n}}.$$

II. La fonction X est la même dans les deux cas. Si l'équation (1) peut prendre la forme

$$\frac{1}{k}\,\frac{d^2y}{dt^2}+y=0,$$

le premier membre devient une différentielle quand on multiplie par $2\,dy$; il est donc évident qu'en multipliant par $2y'$ le premier membre de l'équation (1), on obtient une dérivée exacte.

MÉCANIQUE. — La force attractive appliquée au centre de gravité se décompose en deux, l'une passant par le point fixe de l'axe de figure, l'autre verticale;

toutes deux sont constantes. On est donc ramené au mouvement d'un corps pesant.

ASTRONOMIE. — Soit $\lambda = +0'',48$. Dans les formules ordinaires on peut prendre $\cos\lambda = 1$ et $\sin\lambda = \text{arc}\,\lambda$, c'est-à-dire $\sin\lambda = \frac{0,48}{206265}$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1681.

(1894, p. 5*.)

On considère les coniques inscrites dans un triangle et passant par un point fixe. Le lieu du second point de rencontre avec chaque conique de la droite joignant un sommet A *au point de contact avec le côté opposé est une quartique unicursale.* (A. CAZAMIAN).

SOLUTION

par M. A. DROZ-FARNY.

Effectuons une transformation homographique de la figure, de manière que les sommets B et C du triangle coïncident avec les ombilics du plan, et soient a et p les transformés du sommet A et du point fixe P.

Il s'agira alors de chercher le lieu géométrique des sommets des paraboles de même foyer a et passant par le point fixe p.

Décrivons de p comme centre une circonférence de rayon pa; toute tangente t à cette circonférence est directrice d'une des paraboles; abaissons de a la perpendiculaire ad sur t. Le lieu de d sera un limaçon de Pascal d'axe ap et de point double a. Le sommet S de cette parabole étant le point milieu de ad, le lieu de S sera aussi un limaçon semblable, le rapport de similitude étant $\frac{1}{2}$. Le limaçon étant une quartique bicirculaire, en revenant à la figure primitive, on aura pour le lieu une quartique unicursale ayant ses trois points doubles aux sommets du triangle.

Question 1682.

(1894, p. 5*.)

On considère les coniques touchant quatre droites données. Deux points quelconques étant pris sur l'une de ces droites, le lieu des points de rencontre des tangentes menées de ces deux points à l'une quelconque des coniques du faisceau est une conique. Si les deux points fixes sont pris sur l'une des coniques du faisceau, le lieu est une cubique.

(A. Cazamian).

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Soient P et Q deux points fixes sur un des côtés AB du quadrilatère circonscrit. Une conique étant déterminée par cinq tangentes, les deux tangentes autres que AB que l'on peut mener de P et de Q à une des coniques du faisceau tangentiel se correspondent homographiquement. Le lieu de leur point d'intersection est donc une conique passant par P et Q, et les deux autres sommets du quadrilatère.

Si les deux points fixes sont sur l'une des coniques du faisceau, effectuons une transformation homographique, de manière que P et Q' coïncident avec les ombilics du plan. Le problème revient alors à chercher le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible à un cercle. Le lieu bien connu est une strophoïde cubique circulaire ayant son point double au centre du cercle et passant par les six sommets du quadrilatère complet. Revenons à la figure primitive.

Le lieu cherché sera une cubique passant par les six sommets du quadrilatère complet déterminé par les quatre droites, par les points P et Q et ayant le pôle de la droite PQ par rapport à la conique qui passe par ces points comme point double.

BOURSES DE LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1896.

On considère les deux paraboles (P), (Q) qui ont respectivement pour équations

$$y^2 - 2x = 0, \qquad x^2 - 2y + m = 0;$$

combien ont-elles de points d'intersection réels?

En un point d'intersection A, on mène la tangente à la parabole (P); cette tangente rencontre la parabole (Q) en un point A' distinct du point A; trouver le lieu du point A' quand m varie.

Les deux paraboles (P), (Q) ont trois tangentes communes; on formera l'équation qui a pour racines les abscisses des points de contact sur la parabole (Q) et l'on montrera comment, en supposant connues les racines de cette équation, on peut déterminer les coordonnées des points de contact des tangentes communes sur les deux paraboles, ainsi que les sommets du triangle circonscrit aux deux paraboles.

Trouver, en supposant que m varie, le lieu du point de contact avec la parabole (Q) d'une tangente commune aux deux paraboles (P), (Q) et le lieu du point d'intersection de deux tangentes communes à ces deux paraboles.

Quelle relation doit-il exister entre les abscisses de deux points de la parabole (R) dont l'équation est

$$y = 2x^2$$

pour que la droite qui joint ces deux points soit tangente à la parabole (P)? Démontrer qu'il y a une infinité de triangles circonscrits à la parabole (P) et inscrits dans la parabole (R).

QUESTIONS.

1747. 1° On pose, a, b, a_0 étant trois quantités réelles :

$$a_n + b_n i = \frac{(a+bi+2)(a+bi+4)\ldots(a+bi+2n)}{(a+2)(a+3)\ldots(a+n+1)} a_0.$$

Démontrer que l'on a

$$(1)\quad a_{2p+1} - C^1_{2p+1}\, a_{2p} + C^2_{2p+1}\, a_{2p-1} - \ldots + (-1)^{2p+1} a_0 \equiv 0,$$

$$(2)\quad b_{2p} \quad - C^1_{2p}\, b_{2p-1} + C^2_{2p}\, b_{2p-2} \quad - \ldots + (-1)^{2p-1} b_1 \equiv 0.$$

2° En particulier, on fera $a + bi = \frac{\rho}{c}(\cos\omega + i\sin\omega)$, puis $c = 0$. De l'identité (1) correspondante, déduire qu'on peut, d'une infinité de manières, satisfaire à l'identité suivante :

$$A_0\cos(2n+1)\omega + A_1\cos\omega\cos 2n\omega + A_2\cos^2\omega\cos(2n-1)\omega$$
$$+ \ldots + A_{2n+1}\cos^{2n+1}\omega \equiv 0,$$

A_0, A_1, A_2, ... A_{2n+1} étant indépendants de ω, et n au moins de ces quantités étant arbitraires. (R. GILBERT.)

1748. Si une conique est inscrite à un triangle ABC en α, β, γ, les droites joignant les milieux des côtés BC, CA, AB aux milieux des droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes au centre de la courbe. Étant donnés le centre d'une conique et trois tangentes, trouver les points de contact. (P. SONDAT.)

1749. On sait que le centre de gravité de l'aire d'un quadrilatère ABCD, dont les diagonales se coupent en O, est le barycentre des cinq points A, B, C, D, O, affectés des coefficients 1, 1, 1, 1, —1.

On a aussi la proposition analogue que voici :

Le centre de gravité du volume d'un octaèdre dont les diagonales AA', BB', CC' concourent en un point O, est le barycentre des points A, A', B, B', C, C', O affectés des coefficients 1, 1, ..., 1, —2. (FONTENÉ.)

ERRATA.

3e série, t. XV, septembre 1896 : page 409, au bas de la page, 2°, en renvoi, *au lieu de*

$$\left(\mu\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2p-2)}, \text{ où } p \text{ désigne,}$$

lisez

$$\left(\mu\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2p)}, \ 2p+1 \text{ désignant.}$$

PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1897.

Sujet.

Établir les propriétés fondamentales des fonctions circulaires, en prenant comme définition de $\frac{\sin \pi x}{\pi}$ *l'expression*

$$(1) \qquad S(x) = x \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{n} \right) e^{\frac{x}{n}} \right],$$

le produit π *étant étendu à toutes les valeurs de l'entier* n *de* $-\infty$ *à* $+\infty$, *zéro excepté.*

Indications.

On pourra introduire la fonction

$$C(x) = \frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{d \log S(x)}{dx},$$

montrer qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d\,C(x)}{dx} = -[\pi^2 + C^2(x)],$$

et en déduire les formules d'addition pour $C(x)$ et pour $S(x)$.

On pourra consulter, à ce sujet, le Chapitre I qui traite des fonctions trigonométriques dans le *Traité des fonctions elliptiques* de MM. Appell et Lacour.

Conditions.

Le concours est ouvert *exclusivement* aux abonnés des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

1° A un crédit de 100fr d'Ouvrages à choisir dans le catalogue de MM. Gauthier-Villars et fils;

2° A la publication du Mémoire;

3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la rédaction AVANT LE 15 MAI 1897, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonyme. Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur et la justification de sa qualité d'abonné. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir du 15 mai, et après le jugement prononcé.

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mémoires; mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du reste que l'insertion d'un travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 15 juillet 1897, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La Rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1° De partager les récompenses ci-dessus mentionnées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite;

2° De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient reportés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire immédiatement connaître s'il désire que la publication de son Travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

LES RÉDACTEURS.

[M¹8b]

EXERCICE SUR LES COURBES DE DIRECTION;

PAR M. PAUL APPELL.

Laguerre a appelé *courbes de direction* [1] les courbes algébriques

$$f(x, y) = 0$$

telles que les cosinus directeurs de la tangente en un point (x, y) puissent être exprimés *rationnellement* en fonctions de x et y. En d'autres termes, ce sont des courbes pour lesquelles la quantité

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

peut s'exprimer rationnellement en fonction de x et y.

---

[1] Voir *Bulletin de la Société mathématique*, 1880.

Pour que cette condition soit remplie, il faut et il suffit que la différentielle ds de l'arc de la courbe soit égale à une fonction rationnelle de x et de y multipliée par dx. En effet, on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\, dx,$$

en vertu de la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{dy}\, dy = 0.$$

Nous nous proposons d'indiquer un moyen de déduire d'une courbe de direction une infinité d'autres courbes de direction.

Soit

$$\text{(1)} \qquad F(X, Y) = 0$$

une de ces courbes. En appelant S l'arc de cette courbe on a

$$\text{(2)} \qquad dS = \sqrt{dX^2 + dY^2} = R(X, Y)\, dX,$$

$R(X, Y)$ désignant une fonction rationnelle de X et Y.

Soient $z = x + yi$ une variable imaginaire, $f(z)$ une fonction rationnelle de z choisie de telle façon que tous les résidus de $f^2(z)$ soient *nuls*. Posons

$$\text{(3)} \qquad Z = X + Yi = \int f^2(z)\, dz.$$

L'intégrale du second membre est alors rationnelle en z et l'on a, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\text{(4)} \qquad X = \varphi(x, y), \qquad Y = \psi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ désignant des fonctions rationnelles de x et y.

Si l'on fait la substitution (4), la courbe (1) se transforme en une autre courbe

$$G(x, y) = 0, \tag{5}$$

qui est aussi *une courbe de direction.*

En effet, l'équation (3) donne

$$dX + i\,dY = f^2(z)(dx + i\,dy).$$

Changeons i en $-i$, appelons z_0 la conjuguée de z et f_0 la fonction déduite de f par le changement de signe de i. Il vient

$$dX - i\,dY = f_0^2(z_0)(dx - i\,dy).$$

Multipliant membre à membre, on a

$$dX^2 + dY^2 = f^2(z) f_0^2(z_0)(dx^2 + dy^2),$$

et, en extrayant les racines,

$$dS = f(z) f_0(z_0)\, ds.$$

Comme, par hypothèse, $\frac{dS}{dX}$ est une fonction rationnelle de X et Y, on a

$$ds = \frac{R(X, Y)}{f(z) f_0(z_0)}\, dX,$$

et, d'après les formules de transformation (4), $\frac{ds}{dx}$ est une fonction rationnelle de x et y : en effet, ces formules montrent que $\frac{dX}{dx}$ est rationnel en x et y. La nouvelle courbe est donc bien une courbe de direction.

Exemples. — En partant de la ligne droite et du cercle, on obtient ainsi une infinité de courbes de direction.

Ainsi prenons

$$X + Yi = 3\int z^2\, dz = z^3;$$

nous aurons

$$X = x^3 - 3xy^2.$$

La droite $X = a^3$ devient la courbe de direction

$$x^3 - 3xy^2 = a^3,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$r^3 \cos 3\theta = a^3.$$

De même, en faisant

$$f^2(z) = 5z^4, \qquad f^2(z) = (2k+1)z^{2k}$$

(k entier positif ou négatif), on déduit de $X = a^k$ la courbe de direction

$$r^{2k+1}\cos(2k+1)\theta = a^{2k+1}.$$

Si l'on prend $f(z) = \frac{1}{z}$, la transformation se ramène à une inversion.

Remarque. — En prenant pour $f(z)$ une fonction transcendante uniforme, telle que les résidus de $f^2(z)$ soient tous nuls, on obtient une transformation faisant correspondre à une courbe algébrique de direction une courbe transcendante telle que l'arc s de cette courbe vérifie une équation de la forme

$$ds = \Phi(x, y)\,dx,$$

Φ étant uniforme. Ainsi, en prenant

$$f(z) = e^{\frac{x+yi}{2a}}$$

(a réel), on a

$$X = ae^{\frac{x}{a}}\cos\frac{y}{a},$$

et la droite $X = a$ devient la courbe

$$e^{\frac{x}{a}}\cos\frac{y}{a} = 1;$$

c'est la chaînette d'égale résistance de Coriolis, pour laquelle

$$ds = \frac{dy}{\cos\frac{y}{a}}.$$

[C2h]

SUR LA DÉFINITION DE L'INTÉGRALE DÉFINIE;

Par M. C. BURALI-FORTI, à Turin.

M. Maurice Fouché a publié, sous le même titre, un article ([1]) dans lequel il démontre, par une méthode simple, deux théorèmes connus, sur l'existence de l'intégrale définie. Une telle méthode est susceptible d'être encore simplifiée, et d'être généralisée ([2]). Ceci est, d'ailleurs, un résultat connu ([3]), que je me propose d'exposer ici sous une forme élémentaire.

1. Soit u une classe (ensemble), de nombres réels, qui contient effectivement des éléments (u est une classe non nulle). Nous écrivons $l'u$, $l_1 u$ au lieu de « limite supérieure des u », « limite inférieure des u ». Si a est un nombre réel, nous disons :

Définition A. — Que $l'u = a$ quand u ne contient

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. XV; mai 1896.

([2]) On obtient une simplification, en substituant au couple des classes *contiguës* une seule classe et sa limite supérieure ou inférieure (§ 1); on généralise la méthode parce qu'on peut obtenir les intégrales *supérieures* ou *inférieures* avec la seule condition que la fonction soit limitée dans l'intervalle (§ 3).

([3]) G. Peano, *Sull'integrabilità delle funzioni* (*Atti Acc. Torino*, 1883). *Lezioni di Analisi infinitesimale* (Vol. I, p. 130-145. Torino, 1893).

pas de nombres plus grands que a, et qu'elle contient toujours des nombres plus grands que x, quel que soit le nombre x plus petit que a.

Définition B. — Que $l_1 u = a$ quand u ne contient pas de nombres plus petits que a, et qu'elle contient toujours des nombres plus petits que x, quel que soit le nombre x plus grand que a.

Si la classe u admet un maximum, ce maximum est $l'u$. Si la classe u admet un minimum, ce minimum est $l_1 u$. Si u est une classe de nombres réels et positifs, alors $l_1 u = 0$ quand, quel que soit le nombre réel h, des nombres plus petits que h existent dans u; c'est-à-dire quand des nombres aussi petits qu'on veut existent dans u.

Si nous supposons que les nombres réels ne soient pas encore introduits, alors les définitions A, B, dans lesquelles nous substituons au mot *nombre réel* le mot *nombre rationnel,* donnent une méthode aussi simple pour définir le nombre irrationnel. Nous ne pouvons pas développer ici cet argument ([1]), qui conduit à simplifier la méthode donnée par MM. Dedekind ([2]) et Tannery ([3]).

Revenons maintenant aux classes des nombres réels quelconques. Nous disons que la classe u « a une limite supérieure (ou inférieure) », ou que « u est limitée supérieurement (ou inférieurement) », ou que « $l'u$ (ou $l_1 u$) est un nombre réel » quand il existe un nombre réel tel que $l'u = a$ (ou $l_1 u = a$). Si u, v sont des classes de nombres réels, avec $u - v$ nous indiquons la classe

---

([1]) Que je développe dans l'article *Les nombres réels,* publié dans la *Revue de Mathématiques,* 1896.

([2]) *Stetigkeit und irrationale Zahlen,* 1872.

([3]) *Introduction à la théorie des fonctions,* 1885.

dont les éléments sont les différences entre un élément de u et un élément de v. Si $u-v$ est une classe de nombres réels positifs ou nuls, alors chaque nombre de u n'est pas plus petit que chaque nombre de v, et réciproquement. Cela posé, nous avons les théorèmes suivants [1] :

Théorème I. — *Si u est une classe non nulle de nombres réels, si a est un nombre réel, et si des nombres plus petits (ou plus grands) que a n'existent pas dans u, la classe u est limitée supérieurement (ou inférieurement).*

Théorème II. — *Si u, v sont des classes non nulles de nombres réels ayant une limite supérieure et inférieure* [2], *et si la classe u est contenue dans la classe v (chaque u est un v), on a $l'u \leqq l'v$, et $l_1 u \geqq l_1 v$.*

Théorème III. — *Si u, v sont des classes non nulles de nombres rationnels, et si $u-v$ est une classe de nombres positifs ou nuls* [3], *la condition nécessaire et suffisante pour que $l_1 u = l'v$ est que $l_1(u-v)=0$.*

Les théorèmes que nous venons d'énoncer sont presque intuitifs ; leur démonstration est très facile. Nous en verrons l'application.

2. Soient a, b des nombres réels tels que $a<b$. Par la notation $a\bar{\ }b$ nous indiquons la classe des nombres égaux ou plus grands que a, et celle des nombres égaux

---

(1) *Formulaire de Mathématiques,* publié par la *Revue de Mathématiques* (Turin, 1895, *voir* § 3).

(2) Cette condition restrictive devient inutile, lorsqu'on a défini la signification des relations $l'u=\infty$, $l_1 u = \infty$ et l'on admet que $-\infty < a < \infty$.

(3) Par cette hypothèse et par le théorème I, on déduit que $l_1 u$ et $l'v$ sont des nombres réels.

ou plus petits que b; ce qui revient à dire que $a^{-}b$ indique l'intervalle de a à b, les extrêmes étant compris.

Soit $f(x)$ une fonction définie quand x varie de a à b (ou définie dans l'intervalle $a^{-}b$). Suivant une notation introduite par M. Dedekind, nous indiquons par $f(a^{-}b)$ la classe dont les éléments sont les nombres $f(x)$, lorsque x varie de a à b. Si x_0, x_1 sont des éléments de $a^{-}b$, alors $f(x)$ est définie dans l'intervalle $x_0{}^{-}x_1$ et la notation $f(x_0{}^{-}x_1)$ a été expliquée.

Nous disons que « $f(x)$ est limitée supérieurement (ou inférieurement) dans l'intervalle $a^{-}b$ », quand la classe $f(a^{-}b)$ est limitée supérieurement (ou inférieurement), c'est-à-dire, quand $l'f(a^{-}b)$ ou $l_1 f(a^{-}b)$ est un nombre réel. Si $f(x)$ est limitée supérieurement (ou inférieurement) dans $a^{-}b$, $f(x)$ est aussi limitée supérieurement (ou inférieurement), dans un intervalle compris dans $a^{-}b$ (§ 1, théorème I). Nous disons que $f(x)$ est limitée dans $a^{-}b$ lorsque $f(x)$ est limitée supérieurement et inférieurement dans $a^{-}b$.

Soit $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n$ une suite de nombres de $a^{-}b$ telle que

$$(1) \qquad x_0 = a, \qquad x_n = b, \qquad x_0 < x_1 < \ldots, \qquad < x_{n-1} < x_n$$

et posons

$$(2) \quad \begin{cases} S'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) = \displaystyle\sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1})\, l' f(x_{r-1}{}^{-}x_r), \\ S_1(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) = \displaystyle\sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1})\, l_1 f(x_{r-1}{}^{-}x_r). \end{cases}$$

Si $f(x)$ est limitée dans $a^{-}b$, chaque suite (1), S' et S_1, définit un nombre réel et déterminé. Les nombres S', S_1 sont fonctions de f et de la suite (1); cela justifie la notation adoptée.

Conservant les hypothèses précédentes, nous indiquons par

$$s'(f;a,b), \qquad s_1(f;a,b)$$

les classes dont les éléments sont les nombres respectifs S′, S_1, correspondant à toutes les suites (1). Les classes s', s_1 sont fonctions de f, de a et b, ce qui justifie la notation adoptée.

Théorème. — *Si a, b sont des nombres réels, $a < b$ et si $f(x)$ est une fonction définie et limitée dans $a{}^{-}b$:*

(*a*). *$l_1\, s'(f; a, b)$ et $l'\, s_1(f; a, b)$ sont des nombres réels ;*

(*b*). *Chaque nombre de la classe $s'(f; a, b)$, n'est pas plus petit que chaque nombre de la classe $s_1(f; a, b)$.*

Démonstration. — On déduit du théorème II du § 1, que

$$l'f(x_{r-1}{}^{-}x_r) \leqq l'f(a{}^{-}b), \qquad l_1f(x_{r-1}{}^{-}x_r) \geqq l_1f(a{}^{-}b);$$

de plus, il est évident que

$$l'f(x_{r-1}{}^{-}x_r) \geqq l_1f(x_{r-1}{}^{-}x_r).$$

Alors les formules (2) nous donnent

$$(3)\quad \begin{cases} S'(f;\, a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \leqq (b-a)\, l'f(a{}^{-}b), \text{ [1]} \\ S_1(f;\, a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \geqq (b-a)\, l_1f(a{}^{-}b). \end{cases}$$

$$(4)\quad S'(f;\, a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \geqq S_1(f;\, a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b),$$

et l'on en tire

$$S'(f;\, a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \geqq (b-a)\, l_1f(a{}^{-}b),$$
$$S_1(f;\, a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \leqq (b-a)\, l'f(a{}^{-}b),$$

Par exemple, la première de celles-ci indique que chaque nombre de $s'(f; a, b)$ est ou égal ou supérieur

---

[1] On peut observer que $(b-a)\, l'f(a{}^{-}b) = S'(f;\, a, b)$.

au nombre $(b-a)l_1 f(a \frown b)$, et par conséquent (§ 1, théor. I), la classe $s'(f; a, b)$ a une limite inférieure. La partie (a) est ainsi démontrée.

Si nous décomposons chaque intervalle $x_{r-1} \frown x_r$ en parties, on déduit des formules (3) que

$$(5)\quad \begin{cases} S'(f; a, \ldots, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots, b) \leqq S'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b), \\ S_1(f; a, \ldots, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots, b) \geqq S_1(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b). \end{cases}$$

Soit $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{m-1}, x'_m$ une suite analogue à la suite (1), et $x''_0, x''_1, \ldots, x''_{p-1}, x''_p$ la suite analogue à la suite (1) qui a pour éléments tous les éléments des suites x, x'. On a [formules (5)],

$$S'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \geqq S_1(f; a, x''_1, \ldots, x''_{p-1}, b),$$

et, par la formule (4),

$$S'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \geqq S_1(f; a, x''_1, \ldots, x''_{p-1}, b),$$

ou encore [formules (5)],

$$S'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \geqq S_1(f; a, x'_1, \ldots, x'_{m-1}, b),$$

ce qui démontre la partie (b) du théorème.

3. Conservons les hypothèses précédentes et écrivons les signes $\overline{\int_a^b}$, $\underline{\int_a^b}$ au lieu de *intégrale supérieure de, intégrale inférieure de,* puis définissons les quantités $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ en posant

$$(1)\quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = l_1 s'(f; a, b), \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = l' s_1(f; a, b).$$

L'introduction de l'intégrale définie supérieure et inférieure dans l'analyse est due à MM. Darboux (1) et

(1) *Sur les fonctions discontinues* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 1875).

Ascoli [1], qui ont publié leurs articles presque en même temps [2]. La définition sous la forme que nous venons d'énoncer est due à M. Peano [3] auquel est due aussi la démonstration du théorème du § 2. De ce théorème et de la définition (1), il résulte :

THÉORÈME I. — *Si a, b sont des nombres réels, $a < b$, et si $f(x)$ est une fonction définie et limitée dans l'intervalle $a \vdash\!\!\dashv b$, $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ et $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ sont des nombres réels bien déterminés.*

Nous disons que la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle $a \vdash\!\!\dashv b$ quand

$$(2) \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

et nous indiquons la valeur commune des nombres (2) par le symbole

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Les hypothèses du théorème I étant conservées :

THÉORÈME II. — *Si $f(x)$ est croissante (ou décroissante) dans $a \vdash\!\!\dashv b$, $f(x)$ est intégrable dans cet intervalle.*

THÉORÈME III. — *Si $f(x)$ est continue dans $a \vdash\!\!\dashv b$, alors $f(x)$ est intégrable dans cet intervalle.*

Démonstration du théorème II. — Supposons que la suite (1) du § 2 décompose $a \vdash\!\!\dashv b$ en parties égales,

---

[1] *Sulla definizione di integrale* (*Atti Acc. Lincei*, 1875).

[2] G. PEANO, *Sulla definizione di integrale* (*Annali di Matematica*, 1895).

[3] *Voir* note [3], p. 495.

c'est-à-dire que

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}.$$

L'hypothèse nous donne

$$l' f(x_{r-1} \sqcap x_r) = f(x_r), \qquad l_1 f(x_{r-1} \sqcap x_r) = f(x_{r-1}),$$

et alors [§ 2, formules (2)], on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) - \mathrm{S}_1(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) \\ &\quad = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]. \end{aligned}$$

Un nombre h étant donné, on peut déterminer n de manière que $\frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$ soit plus petit que h; alors, en vertu de la partie (b) du théorème du § 2, on a

$$l_1[s'(f; a, b) - s_1(f; a, b)] = 0$$

et, en ayant égard au théorème III du § 1, on a

$$l_1 s'(f; a, b) = l' s'(f; a, b),$$

c'est-à-dire

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Démonstration du théorème III. — $f(x)$ étant continue dans $a \sqcap b$, M. Cantor a démontré que, h étant un nombre donné, on peut toujours diviser l'intervalle $a \sqcap b$ au moyen d'une suite analogue à la suite (1) du § 2, de telle sorte que $l' f(x_{r-1} \sqcap x_r) - l_1 f(x_{r-1} \sqcap x_r) < h$; c'est-à-dire telle que dans chaque intervalle, l'oscillation (suivant M. Dini) de $f(x)$ soit plus petite que h. Le nombre h étant donné et la suite étant déterminée, on a

$$\mathrm{S}'(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) - \mathrm{S}_1(f; a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b) < h(b-a).$$

On complète la démonstration comme pour le théorème II.

[I3b]

GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DE WILSON;

PAR M. LOGNON.

On sait que, si $n+1$ est un nombre premier, on a,

$$(1)\qquad n!+1=(n+1)e_1,$$

e_1 étant un nombre entier.

Je dis que, si $n+1$ est premier, on a

$$(2)\qquad (n!)^p+(-1)^{p+1}=(n+1)e_p,$$

e_p étant un entier et p un entier positif quelconque.

En effet, pour $p=1$, la formule (2) se confond avec la formule (1). Je vais alors supposer que l'égalité (2) est vérifiée pour $p=k$ et montrer qu'elle l'est encore pour $p=k+1$.

Soit donc

$$(n!)^k+(-1)^{k+1}=(n+1)e_k;$$

multiplions les deux membres par $n!$

$$(n!)^{k+1}+(-1)^{k+1}n! =(n+1)e_k n!.$$

Mais, d'après (1),

$$n! =(n+1)e_1-1.$$

Dans la formule précédente, remplaçons

$$(-1)^{k+1}n! \quad \text{par} \quad (-1)^{k+1}[(n+1)e_1-1];$$

nous avons

$$(n!)^{k+1}+(-1)^{k+1}[(n+1)e_1-1]=(n+1)n!e_k$$

ou

$$(n!)^{k+1}+(-1)^{k+2}=(n+1)[n!e_k+(-1)^{k+2}e_1],$$
$$(n!)^{k+1}+(-1)^{k+2}=(n+1)e_{k+1}.$$

C. Q. F. D.

[E5]

SUR LES INTÉGRALES DE FRESNEL;

PAR M. EUGÈNE FABRY.

Dans le numéro d'août de ce Journal, M. Jamet donne une méthode simple et rigoureuse pour résoudre la question suivante : Démontrer que l'intégrale $\int e^{-z^2}dz$, prise le long d'un arc égal à $\frac{\pi}{4}$, sur une circonférence ayant pour centre l'origine, à partir du point $z = \text{R}$, tend vers zéro lorsque le rayon de la circonférence augmente indéfiniment.

On peut arriver au même résultat par la méthode suivante, qui me paraît plus simple et plus directe. L'intégrale considérée

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{R}\,i e^{\theta i}\,d\theta}{e^{\text{R}^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}}$$

a un module plus petit que

$$\text{R}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{e^{\text{R}^2\cos 2\theta}}.$$

Décomposons cette intégrale en deux parties, en choisissant un arc θ_0 fixe compris entre o et $\frac{\pi}{4}$. On a

$$\text{R}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{e^{\text{R}^2\cos 2\theta}} < \text{R}\,\frac{\theta_0}{e^{\text{R}^2\cos 2\theta_0}}$$

et

$$R\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{e^{R^2\cos 2\theta}} < R\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{e^{R^2\cos 2\theta}} \frac{\sin 2\theta}{\sin 2\theta_0}$$

$$= \frac{1 - e^{-R^2\cos 2\theta_0}}{2R\sin 2\theta_0} < \frac{1}{2R\sin 2\theta_0};$$

on voit que ces deux parties tendent vers o avec $\frac{1}{R}$.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE JUILLET 1896. — COMPOSITIONS.

Nancy.

ANALYSE. — I. *On considère les fonctions analytiques uniformes qui n'admettent d'autres singularités que trois points singuliers isolés* $z = 0$, $z = a$, $z = \infty$, *les parties principales correspondantes étant respectivement*

$$\sin\frac{k\pi}{z}, \qquad \frac{k-a}{(z-a)^2} - \frac{1}{z-a}, \qquad \varphi(z);$$

k *désigne un nombre réel entier,* a *une constante quelconque, et* $\varphi(z)$ *la partie principale de la fonction*

$$\frac{3}{2} z^4 \log\frac{z+1}{z-1}$$

envisagée dans le domaine de l'infini, le signe log *indiquant la détermination qui s'annule à l'infini.*

Soit $f(z)$ *celle des fonctions considérées qui est nulle pour* $z = k$:

1° *Former l'expression explicite de* $f(z)$ *et calculer son résidu à l'infini ;*

2° *Trouver les périodes de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz:$$

3° *Trouver la valeur de l'intégrale*

$$\int \frac{\varphi(z) f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

prise le long d'une circonférence concentrique au point $z = k$ et de rayon aussi petit qu'on voudra.

II. *Soit* S *la surface définie par les équations*

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v),$$

et soient a, b, c les cosinus directeurs de la normale MW *en un point quelconque* M (u, v) *de cette surface. On pose*

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

$$E' = \sum a\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad F' = \sum a\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \qquad G' = \sum a\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2};$$

calculer, en chaque point M *de la courbe représentée par les équations*

$$u = \varphi(t), \qquad v = \psi(t):$$

1° *L'angle ϖ que fait sa normale principale avec la direction* MW ;

2° *Son rayon de courbure* R $\left(\textit{on pourra calculer séparément } \frac{\cos\varpi}{R} \textit{ et } \frac{\sin\varpi}{R}\right)$.

Appliquer les formules obtenues à l'hélicoïde gauche

$$x = v\cos u,$$
$$y = v\sin u,$$
$$z = ku.$$

I. Le développement en série, dans le domaine de l'infini, de

$$\frac{3}{2} z^4 \log \frac{z+1}{z-1}$$

donne $\varphi(z) = z + 3z^3$. La fonction $f(z)$ est, à une constante additive près, la somme des trois parties principales, et est déterminée par la condition d'être nulle pour $z = k$, de sorte que l'on a

$$f(z) = \sin \frac{k\pi}{z} + \frac{k-a}{(z-a)^2} - \frac{1}{z-a} + z - k + 3z^3 - 3k^3.$$

Comme les résidus de cette fonction pour les points 0 et a sont $k\pi$ et -1, son résidu à l'infini est $1 - k\pi$, et les périodes de l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ sont $2k\pi^2 i$ et $-2\pi i$.

Comme $\varphi(k)$ n'est pas nul et a la valeur $k + 2k^3$, le résidu de $\frac{\varphi(z) f'(z)}{f(z)}$ pour $z = k$ est égal à $n(k + 2k^3)$, n désignant l'ordre de multiplicité du zéro $z = k$ de $f(z)$, et l'intégrale proposée de cette fonction est égale à $2n\pi i(k + 3k^3)$.

II. Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les cosinus directeurs de la normale principale et de la binormale à la courbe ; on a

$$\frac{\cos\varpi}{R} = \frac{1}{R}(a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1) = a\frac{d^2x}{ds^2} + b\frac{d^2y}{ds^2} + c\frac{d^2z}{ds^2},$$

et l'on trouve immédiatement

$$\frac{\cos\varpi}{R} = \frac{E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2};$$

on a, d'autre part,

$$\frac{\sin\varpi}{R} = \frac{1}{R}(a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix}.$$

En multipliant les deux membres par le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

qui a pour valeur $\sqrt{EG - F^2}$, désignant par s', u', v' les dérivées de l'arc s, de u et de v par rapport à t, et posant

$$T = \tfrac{1}{2}(E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2),$$

on trouve

$$\frac{\sin\varpi}{R} = \frac{1}{S'^3\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial u'} & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial u'}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial u} \\ \dfrac{\partial T}{\partial v'} & \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial v'}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dans le cas de l'hélicoïde, on a

$$F = E' = G' = 0,$$

car les lignes coordonnées sont rectangulaires et sont les lignes asymptotiques de la surface; de plus, $E = v^2 + k^2$, $G = 1$ et $F' = \dfrac{k}{\sqrt{v^2 + k^2}}$; on en déduit

$$\frac{\cos\varpi}{R} \quad \text{et} \quad \frac{\sin\varpi}{R}.$$

Mécanique. — *Un solide rigide homogène de révolution est fixé par un point O de son axe de révolution Oz. Outre la pesanteur, une force dont la fonction des forces est proportionnelle au carré du cosinus de l'angle θ que fait Oz avec la zénithale Oζ est distribuée sur le solide; soit λ le coefficient de proportionnalité de sorte que cette fonction des forces est égale à $\lambda\cos^2\theta$.*

A l'instant initial, après avoir incliné de 60° sur Oζ l'axe positif Oz sur lequel est situé le centre de gra-

vité du solide, on imprime à ce solide une rotation initiale autour de cet axe, puis on laisse le corps solide se mouvoir librement autour de son point fixe O.

On suppose que la masse M *du solide, l'accélération* g *due à la pesanteur, le nombre* n *qui mesure sur* Oz *la vitesse angulaire de rotation, la distance* l *du centre de gravité du corps au point* O, *les moments d'inertie, équatorial et axial,* A *et* C *du solide pour le point* O, *sont liés par la relation*

$$3\text{MA}gl = 2\text{C}^2n^2;$$

on demande d'étudier le mouvement de Oz, *ainsi que le mouvement du solide autour de* Oz *dans les deux cas suivants :*

$$\lambda = \text{M}gl, \qquad \lambda = -\text{M}gl.$$

Dans le deuxième cas, après avoir discuté, on exprimera explicitement en fonction de t, *au moyen des fonctions elliptiques, les trois angles d'Euler* θ, ψ, φ *qui déterminent la position du solide dans l'espace.*

La somme des moments des forces données par rapport à Oz et par rapport à Oζ est nulle; on a trois intégrales premières en prenant :

1° La troisième équation d'Euler qui donne $r = n$;

2° Le théorème des forces vives qui donne, en tenant compte des conditions initiales

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\text{A}(p^2+q^2) &= \tfrac{1}{2}\text{A}(\sin^2\theta\psi'^2+\theta'^2)\\ &= -\text{M}gl(\cos\theta-\cos\theta_0)+\lambda(\cos^2\theta-\cos^2\theta_0);\end{aligned}$$

3° Le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à Oζ qui fournit, comme dans le cas de la toupie,

$$\text{A}\sin^2\theta\psi' + \text{C}n(\cos\theta-\cos\theta_0) = 0.$$

En éliminant ψ' entre les deux équations, remplaçant

$\cos\theta_0$ par $\frac{1}{2}$ et $C^2 n^2$ par sa valeur, on obtient l'équation suivante pour déterminer θ :

$$A\,\theta'^2 = 2\lambda(\cos^2\theta - \tfrac{1}{4}) - 2Mgl(\cos\theta - \tfrac{1}{2}) - \frac{3Mgl(\cos\theta - \frac{1}{2})^2}{2\sin^2\theta},$$

ou, en posant $\cos\theta = u$,

$$\begin{aligned} A\,u'^2 = {} & 2\lambda(u^2 - \tfrac{1}{4})(1 - u^2) \\ & - 2Mgl(u - \tfrac{1}{2})(1 - u^2) - \tfrac{3}{2}Mgl(u - \tfrac{1}{2})^2. \end{aligned}$$

Premier cas. $\lambda = +Mgl$; l'équation devient

$$u'^2 = -\frac{2Mgl}{A}(u - \tfrac{1}{2})^3(u + \tfrac{1}{2});$$

on peut effectuer l'intégration; en tenant compte des conditions initiales, on a constamment $u = \frac{1}{2}$, et l'angle θ reste égal à $60°$; mais alors on a $\psi' = 0$ et $\varphi' = n$; l'axe Oz reste fixe dans l'espace, et le solide tourne autour de cet axe avec une vitesse constante.

Deuxième cas. $\lambda = -Mgl$; on a

$$u'^2 = \frac{2Mgl}{A}(u - \tfrac{1}{2})(u + \tfrac{1}{2})(u^2 + u - \tfrac{9}{4});$$

le dernier trinome restant négatif quand u reste inférieur à 1 en valeur absolue, u variera de $\frac{1}{2}$ à $-\frac{1}{2}$, et θ variera entre $60°$ et $120°$. Les relations

$$\psi' = \frac{Cn}{A}\,\frac{\frac{1}{2} - \cos\theta}{\sin^2\theta},$$
$$\varphi' = n - \psi'\cos\theta$$

montrent que ψ varie toujours dans le même sens, ψ' passant par un minimum et un maximum pour $\theta = 60°$ et $\theta = 120°$.

Pour effectuer l'intégration dans ce cas, nous poserons

$$\frac{Mgl}{6A} = m, \qquad u = \frac{1}{2} - \frac{9m}{2x - m},$$

et nous aurons

$$x'^2 = 4x^3 - 117m^2x + 340m^3:$$

par conséquent, x est égal à $p(t)$; on a ensuite

$$\psi' = \frac{36 m^{\frac{3}{2}}(2x - m)}{(2x + 17m)(2x - 7m)},$$

$$\varphi' = n - \frac{18 m^{\frac{3}{2}}(2x - 19m)}{(2x + 17m)(2x - 7m)},$$

et l'on est ramené à intégrer des fractions rationnelles simples, ce qui se fait au moyen de la fonction ζ.

Épreuve pratique. Astronomie. — *Le 9 août, la longitude du Soleil, au moment de son passage au méridien de Paris, est*

$$130^\circ 42' 28''.$$

1° *Déterminer son ascension droite et sa déclinaison;*

2° *Déterminer, le même jour, l'heure sidérale du coucher de l'astre. (On ne tiendra pas compte de la variation de ses coordonnées dans l'intervalle.)*

On donne l'obliquité de l'écliptique et la latitude de Paris

$$\omega = 23^\circ 27' 12'', 8,$$
$$\lambda = 48^\circ 50' 47''.$$

Lyon.

Analyse. — *Intégrer*

$$(x+1)^3 y''' + (x+1)^2 y'' - 5(x+1)y' + 8y = x^2 + 1 + \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Tout se réduit à intégrer l'équation sans second membre. Posons $x + 1 = e^t$, d'où, pour un entier positif n quelconque,

$$(x+1)^n \frac{d^n y}{dx^n} = P_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_{ni} \frac{d^i y}{dt^i};$$

avec $P_1 = \frac{dy}{dt}$ et (a_{ni}= const.),

$$P_n = \frac{dP_{n-1}}{dt} - (n-1)P_{n-1}.$$

Il viendra ainsi

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 8y = 0,$$

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 - 4\alpha + 8 = (\alpha - 2)^2(\alpha + 2).$$

On a ainsi un système fondamental d'intégrales

$$e^{2t} = (x+1)^2, \qquad e^{-2t} = (x+1)^{-2}, \qquad te^{2t} = (x+1)^2 L(x+1).$$

MÉCANIQUE. — *Questions de cours : mouvement d'un point sur une surface; pression. Mouvement d'un corps solide, homogène, pesant, de révolution, fixé par un point de son axe.*

Grenoble.

ANALYSE. — I. *Calculer le volume compris dans le trièdre des coordonnées positives, entre les faces* xOy, xOz, *les deux surfaces* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $a^2y = bx^2$ *et le plan parallèle à* yOz *mené par le point de rencontre des traces des deux surfaces sur le plan* xOy.

On a successivement

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^a dx \int_0^{b\frac{x^2}{a^2}} c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy \\
&= \frac{bc}{2}\left(\int_0^a \frac{x^3}{a^3}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx + \int_0^a \frac{x^2}{a^2} \arc\sin\frac{x}{a}\, dx\right) \\
&= \frac{abc}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{4}{45}\right).
\end{aligned}$$

II. *Intégration de l'équation*

$$\left(2x\frac{dy}{dx} - y\right)^2 + 4x = 0.$$

Intégrale générale, et recherche de la solution singulière, en partant, soit de l'intégrale générale, soit de l'équation différentielle proposée.

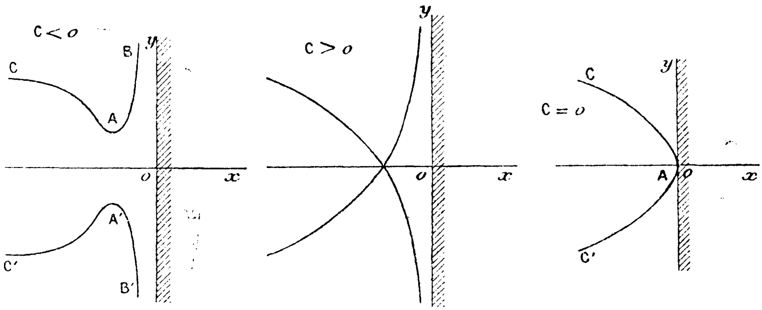
L'équation, mise sous la forme

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \pm \frac{1}{\sqrt{-x}},$$

est immédiatement intégrable; son intégrale générale est donnée par

$$(1) \qquad xy^2 + (x+c)^2 = 0.$$

Suivant les valeurs attribuées à la constante c, on a les formes suivantes pour les courbes intégrales :



Pour la *solution singulière*, en partant de l'intégrale générale, et posant $F(x, y, c) = xy^2 + (x+c)^2$, d'où $\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 + 2(x+c)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy$, on doit éliminer entre $F = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial c} = 2(x+c) = 0$. On trouve $xy^2 = 0$, ce qui donne, soit $y^2 = 0$, soit $x = 0$. Or, $y^2 = 0$ entraînant $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, est, non une solution, mais un lieu de points doubles des courbes intégrales.

D'autre part, $x = 0$ donne $\frac{\partial F}{\partial x} \gtrless 0$: c'est donc une solution. Mais comme on a alors $c = -x = 0$, d'où, d'après (1), $x(y^2 + x) = 0$, la solution $x = 0$ n'est qu'une partie de la solution particulière qui correspond à $c = 0$, et qui se compose d'une parabole et de la tangente en son sommet.

Il n'y a donc pas de solution singulière.

En partant de l'équation différentielle et posant $\varphi(x, y, y') = (2xy' + y)^2 + 4x$, en supposant y' fini, la solution singulière résulterait de l'élimination de y' entre

$$\varphi(x, y, y') = 0 \tag{2}$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 4x(2xy' + y) = 0, \tag{3}$$

à la condition que l'on ait (criterium de Darboux)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 3y'(2xy' + y) + 2 = 0. \tag{4}$$

De (3) on tire, soit $x = 0$, soit $2xy' + y = 0$. Avec $x = 0$, l'équation (2) donne $y^2 = 0$, et l'équation (4) n'est pas satisfaite. Elle ne l'est pas non plus quand on pose $2xy' + y = 0$.

Donc il n'existe pas de solution singulière pour laquelle y' soit fini.

Pour rechercher si $y' = \infty$ fournit une solution singulière, on peut changer de variable; en posant $x' = \dfrac{dx}{dy}$, on aura

$$\psi(y, x, x') = (2x + yx')^2 + 4xx'^2 = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x'} = 2(y^2 + 4x)x' + 4xy = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} x' = 2x'(2x'^2 + 3yx' + 6x) = 0. \tag{7}$$

Soit $x' = 0$; (5) donne $x^2 = 0$, (6) est satisfaite ainsi que (7); mais, dans ce cas, le criterium est insuffisant, car $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 4(x'^2 + yx' + 2x)$ et $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 2(2x + yx')x'$ s'annulent en même temps.

La méthode élémentaire ne suffit donc pas ici pour décider si $x^2 = 0$ est une solution singulière. On a vu que c'était une portion de solution particulière.

MÉCANIQUE. — *Une tige matérielle* AB, *pesante et homogène, sans épaisseur, qui se meut dans un plan vertical, a une de ses extrémités* A *qui glisse sans frottement sur une horizontale $x'x$, et elle peut pivoter librement dans le plan autour de* A. *On demande son mouvement et la réaction de la droite $x'x$.*

Cas particulier : on supposera au début la tige très peu écartée de la verticale menée dans le sens de la pesanteur et abandonnée à elle-même sans vitesse. On cherchera l'angle formé par la tige avec la verticale et l'on calculera la durée d'une oscillation infiniment petite. On comparera cette durée avec ce qu'elle serait dans les mêmes conditions si A *était fixe.*

Soient $2l$ la longueur de la tige, M sa masse; prenons $x'x$ pour axe des x, un point O de cette droite pour origine, la verticale du point O dans le sens de la pesanteur pour axe des y. Nous avons trois inconnues, l'abscisse x de A, l'angle θ de AB avec l'axe des y et la réaction normale N. Le principe du mouvement du centre de gravité et celui des forces vives nous fournissent trois équations :

$$\frac{dx}{dt} + l\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = c, \tag{1}$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2l\cos\theta\frac{dx}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{4l^2}{3}\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2gl\cos\theta + h, \tag{2}$$

et

$$(3) \qquad Ml\frac{d^2\cos\theta}{dt^2} = Mg + N.$$

(1) et (2) déterminent le mouvement, (3) donnera N.

Éliminant x entre (1) et (2), on obtient :

$$(4) \qquad \left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right)\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}\cos\theta + \frac{h}{l^2},$$

et le problème est ramené à une quadrature. Dans le cas particulier, en appelant α l'angle d'écart, (4) devient :

$$\left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right)\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha).$$

En remplaçant $\cos\alpha$ et $\cos\theta$ par $1 - \frac{\alpha^2}{2}$, $1 - \frac{\theta^2}{2}$, et négligeant $\sin^2\theta$, on trouve pour la durée de l'oscillation: $T = \pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$. Si A était fixe, la durée serait $T' = \pi\sqrt{\frac{4l}{3g}}$; donc $T = \frac{T'}{2}$. On peut voir de plus que le mouvement est le même que celui d'un pendule elliptique formé par deux masses m et $m' = \frac{m}{3}$ reliées par un fil de longueur $\frac{4l}{3}$, m' glissant sans frottement sur Ox.

Épreuve pratique : Astronomie. — *On a mesuré l'azimut* A_1 *d'une étoile* E *par rapport à une mire* M, *l'heure sidérale étant* H_s. *Déterminer la position du plan méridien par rapport à la mire, connaissant l'ascension droite* Æ *et la déclinaison* D *de l'étoile, ainsi que la latitude* λ *du lieu d'observation.*

Calculer l'influence que peut avoir sur la détermination du méridien une erreur de l'heure sidérale H_s *inférieure à une seconde en valeur absolue.*

Chercher à quelle heure sidérale l'observation aurait dû être faite pour rendre minima l'influence de l'erreur de l'heure.

Données numériques :

H_s......	$19^h 37^m 56^s,5$
A_1.....	$166^\circ 48' 52'', 5$
$Æ$.....	$140^\circ 33' 46'',65$
$\mathcal{D}$.....	$81^\circ 47' \ 8'', 8$
λ......	$45^\circ 11' 23''$

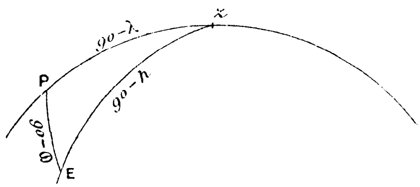
1° Le triangle de position donne

$$\cos\mathcal{D} \sin\alpha = \cos h \sin A, \tag{1}$$

$$\tan\mathcal{D} \cos\lambda - \sin\lambda \cos\alpha = -\sin\alpha \cot A. \tag{2}$$

L'angle horaire α est donné par

$$Æ + \alpha = 15 H_s. \tag{3}$$



Posant

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{tang}\,\mathcal{D}}{\cos\alpha}, \tag{4}$$

on tire de (2)

$$\cot A = -\frac{\cot\alpha \sin(\varphi - \lambda)}{\cos\varphi}. \tag{5}$$

Les formules (3), (4), (5) donnent successivement

α...........	$153^\circ 55' 20'',85$
φ...........	$-\ 82^\circ 22' 59'',91$
A..........	$176^\circ \ 7' \ 9'',01$
$A - A_1$.....	$10^\circ 18' 16'',51$

Le choix de la valeur convenable de A, mal définie par (5), résulte de la considération de la formule (1) qui montre que $\sin A$ et $\sin\alpha$ doivent être de même signe.

2° En différentiant (2) où α seul est supposé variable, on en tire

$$(6)\qquad dA = \sin^2 A(\sin\lambda + \cot\alpha \cot A)\,d\alpha.$$

Si $d\alpha = \pm 1^s = \pm 15''$, $dA = \pm 2'',55$.

3° En introduisant l'angle de position E, on a

$$(7)\qquad dA = \frac{\cos E \sin A}{\sin\alpha}\,d\alpha.$$

et si l'on peut avoir $\cos E = 0$, on aura $dA = 0$. Alors le triangle ZPE serait rectangle, et l'angle horaire α_1, pour l'instant considéré, serait donné par

$$(8)\qquad \cos\alpha_1 = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\operatorname{tang}\text{ⓓ}},$$

ce qui exige que l'on ait $\lambda <$ ⓓ, condition remplie par les données.

On trouve

$$\alpha_1 = 81^\circ 38' 50'',56,$$

et l'heure sidérale correspondante sera

$$H'_s = 14^h 48^m 50^s,47.$$

Montpellier.

Analyse. — 1° *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface* S *représentée par l'équation*

$$z = a^2 x^4 - 6ab x^2 y^2 + b^2 y^4 + e.$$

Montrer que ce sont des courbes gauches du quatrième ordre, et que deux lignes asymptotiques qui se coupent sont situées sur une même surface du second ordre.

2° *a et b étant positifs, évaluer le volume limité par la surface* S *donnée, le plan* XOY, *et le cylindre elliptique*

$$a(x-\lambda)^2 + b(y-\mu)^2 = h.$$

en supposant que les traces de ces deux surfaces sur le plan XOY *ne se coupent pas.*

1° L'équation différentielle des lignes asymptotiques peut s'écrire sous la forme

$$(ax\,dx - by\,dy)^2 = ab(y\,dx + x\,dy)^2.$$

En intégrant on pourra représenter les deux systèmes de lignes asymptotiques par les équations

$$\begin{cases} ax^2 - by^2 = 2xy\sqrt{ab} + \alpha, \\ z = 4\alpha xy\sqrt{ab} + \alpha^2 + c, \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^2 - by^2 = -2xy\sqrt{ab} + \beta, \\ z = -4\beta\sqrt{ab}\,xy + \beta^2 + c; \end{cases}$$

ces deux courbes sont situées sur la surface du second ordre

$$z = (\alpha + \beta)(ax^2 + by^2) + 2(\alpha - \beta)xy\sqrt{ab} - \alpha\beta + c.$$

2° En posant

$$x - \lambda = \frac{\rho}{\sqrt{a}}\cos\theta, \qquad y - \mu = \frac{\rho}{\sqrt{b}}\sin\theta,$$

on a

$$v = \int_0^{\sqrt{h}} \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} \frac{z}{\sqrt{ab}}\,d\theta.$$

En développant la valeur de z et supprimant les termes d'ordre impair en $\sin\theta$ ou $\cos\theta$, dont l'intégrale est nulle, on a

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_0^{\sqrt{h}} \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} [a^2\lambda^4 + b^2\mu^4 - 6ab\lambda^2\mu^2 + c \\ &\qquad + 6(a\lambda^2 - b\mu^2)\rho^2\cos 2\theta + \rho^4\cos 4\theta]\,d\theta \\ &= \frac{\pi h}{\sqrt{ab}}(a^2\lambda^4 + b^2\mu^4 - 6ab\lambda^2\mu^2 + c). \end{aligned}$$

Ce volume est équivalent à un cylindre droit ayant même base et pour hauteur la parallèle à l'axe OZ passant par le centre de l'ellipse de base et limitée à la surface S.

MÉCANIQUE. — 1° *Les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point d'une surface fixe sont déterminées par les équations*

$$x = u \sin v, \qquad y = u \cos v, \qquad z = \sqrt{u^2 - 1},$$

où u, v *sont deux paramètres variables. Un point matériel, non pesant, de masse égale à l'unité se meut sans frottement sur cette surface, sous l'influence d'une force attractive proportionnelle à la distance, issue de l'origine des coordonnées, et dont l'intensité est égale à l'unité pour l'unité de distance.*

On demande : 1° *de former l'équation aux dérivées partielles dont il suffit, d'après le théorème de Jacobi, de connaître une intégrale complète pour avoir les équations finies du mouvement;* 2° *de trouver une intégrale complète de cette équation;* 3° *de déterminer la trajectoire et la loi du mouvement en supposant que l'on a, à l'origine du mouvement,*

$$x = 2, \qquad y = 0,$$

et que la vitesse initiale est parallèle à l'axe des y *et égale à l'unité.*

2° *Un point matériel pesant, sollicité par une force pour laquelle il existe une fonction des forces, est astreint à se déplacer sans frottement sur une courbe fixe située dans un plan vertical. Peut-on déterminer la fonction des forces de manière que le point soit en équilibre quelle que soit sa position sur la courbe?*

Examiner en particulier le cas où la courbe donnée est une parabole dont l'axe est vertical.

1° La force vive est

$$2T = \Sigma x'^2 = \frac{2u^2-1}{u^2-1}u'^2 + u^2v'^2 = \frac{u^2-1}{2u^2-1}p^2 + \frac{q^2}{u^2},$$

relation où l'on a posé

$$p = \frac{\delta T}{\delta u'} = u'\frac{2u^2-1}{u^2-1} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{\delta T}{\delta v'} = u^2 v'.$$

Soit

$$K = pu' + qv' - T;$$

la fonction des forces est

$$U = -\int r\,dr = -\frac{r^2}{2} = \frac{1}{2} - u^2.$$

Si l'on pose

$$H = K - U = \frac{u^2-1}{2u^2-1}\frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2u^2} + \frac{2u^2-1}{2},$$

l'équation de Jacobi est

$$2\frac{\delta S}{\delta t} + \frac{u^2-1}{2u^2-1}\left(\frac{\delta S}{\delta u}\right)^2 + \frac{1}{u^2}\left(\frac{\delta S}{\delta v}\right)^2 + 2u^2 - 1 = 0.$$

On obtient une intégrale complète en prenant pour S une fonction de la forme

$$S = -ht + \alpha v + f(u),$$

d'où

$$-2h + \frac{u^2-1}{2u^2-1}\overline{f'(u)}^2 + \frac{\alpha^2}{u^2} + 2u^2 - 1 = 0$$

et

$$S = -ht + \alpha v \pm \int\sqrt{\frac{2hu^2 - \alpha^2 - u^2(2u^2-1)}{u^2-1}(2u^2-1)}\,\frac{du}{u}.$$

Le mouvement est alors déterminé par les équations

$$\frac{\delta S}{\delta h} = -t \pm \int\sqrt{\frac{2u^2-1}{(u^2-1)[2hu^2 - \alpha^2 - u^2(2u^2-1)]}}\,u\,du = \beta,$$

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha} = v \mp \alpha\int\sqrt{\frac{2u^2-1}{(u^2-1)[2hu^2 - \alpha^2 - u^2(2u^2-1)]}}\,\frac{du}{u} = \gamma,$$

et la vitesse sera donnée par les formules

$$u' = \pm \frac{1}{u}\sqrt{\frac{2hu^2 - \alpha^2 - u^2(2u^2-1)}{2u^2-1}(u^2-1)},$$

$$v' = \frac{\alpha}{u^2}.$$

Pour $t = 0$, on suppose

$$x = 2, \qquad y = 0, \qquad x' = 0, \qquad y' = 1:$$

par suite

$$u = 2, \qquad v = \frac{\pi}{2}, \qquad u' = 0, \qquad v' = -\tfrac{1}{2};$$

on en déduit

$$\alpha = -2, \qquad h = 4.$$

Les équations du mouvement deviennent alors

$$v = \frac{\pi}{2} \mp \int_2^u \frac{2\,du}{u\sqrt{(u^2-1)(4-u^2)}} = \frac{\pi}{2} \mp \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-u^2}{u^2-1}},$$

$$t = \pm \int_2^u \frac{2\,du}{\sqrt{(u^2-1)(4-u^2)}} = \mp \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{4-u^2}{u^2-1}};$$

u ne pouvant varier qu'entre 1 et 2, on doit prendre partout le second signe. Ces équations peuvent encore se mettre sous la forme

$$u^2 = 1 + 3\cos^2 t, \qquad \cos^2 v = \frac{4-u^2}{3u^2} = \frac{\sin^2 t}{1+3\cos^2 t},$$

ou encore

$$x = 2\cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = \sqrt{3}\cos t;$$

la trajectoire est donc une ellipse située dans le plan $z = x\frac{\sqrt{3}}{2}$, et le rayon vecteur passant par le centre décrit des aires proportionnelles au temps.

2° Soit $\varphi(x, y) = 0$ l'équation de la courbe dans son plan, et $F(x, y)$ la fonction des forces, le point étant supposé assujetti à rester dans le plan de la courbe. La courbe φ doit être une courbe de niveau, c'est-à-dire qu'elle doit avoir une équation de la forme $F = c$, de sorte que l'on peut prendre

$$F = f[\varphi(x, y)],$$

f étant une fonction arbitraire.

Si

$$\varphi = x^2 - 2py,$$

OY étant l'axe vertical, on a

$$F = f(x^2 - 2py);$$

les composantes de la force seront

$$X = 2xf', \qquad Y = -2pf',$$

f' étant une fonction arbitraire de $x^2 - 2py$.

On a un cas particulier simple, si f' est supposé constant.

Astronomie. — *Calculer l'heure sidérale à laquelle un astre a un azimut donné :*

Ascension droite de l'astre..	$+\ 65°42'\ 7'',9$
Déclinaison..	$-\ 53°58'53'',6$
Azimut donné..............	$+320°\ 5'34'',4$
Latitude du lieu............	$-\ 67°28'42'',8$

λ étant la colatitude, δ la distance polaire, E l'angle des grands cercles joignant l'étoile au pôle et au zénith, on a

$$\sin E = \frac{\sin\lambda}{\sin\delta}\sin(A - 180°),$$

$$\cot\frac{360° - Æ}{2} = \operatorname{tang}\frac{A - E - 180°}{2}\,\frac{\sin\dfrac{\lambda + \delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta - \lambda}{2}}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} E &= 155^\circ 17' 57'', 9, \\ \text{Æ} &= 338^\circ\ 5' 41'', 5, \\ H = \text{Æ} + \text{Æ} &= 303^\circ 47' 49'', 4, \end{aligned}$$

ou

$$20^h 15^m 11^s, 29.$$

Marseille.

Analyse. — *M. Sophus Lie a proposé le changement de variables défini par les trois équations*

$$\begin{aligned} x' + \sqrt{-1}\, y' + z + x z' &= 0, \\ x(x' - \sqrt{-1}\, y') + y - z' &= 0, \\ z' + p - q\,(x' - \sqrt{-1}\, y') &= 0. \end{aligned}$$

Démontrer que l'on peut déterminer ρ, p' *et* q' *de sorte que la relation*

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' - \rho(dz - p\,dx - q\,dy) = 0$$

soit une conséquence identique des deux premières équations différentiées totalement, quand la troisième équation est supposée vérifiée. Calculer alors

$$x' + \sqrt{-1}\, y',\ x' - \sqrt{-1}\, y',\ z',\ p' \text{ et } q'$$

en fonction de x, y, z, p *et* q.

Si le point xyz *décrit une ligne droite, démontrer que, quelles que soient les valeurs de* p *et* q, *le point* $x'y'z'$ *est sur une sphère déterminée.*

Si l'on imagine un plan passant par la ligne droite et dont l'orientation, en variant d'une manière continue, détermine les valeurs de p *et de* q ($dz = p\,dx + q\,dy$ *dans ce plan*), *le point* $x'y'z'$ *tracera une ligne sur la sphère. Le plan tangent à la sphère en chaque point de cette ligne sera déterminé. On aura* $dz' = p'\,dx' + q'\,dy'$. *C'est dans ce sens que l'on peut dire qu'à une droite la transformation fait correspondre une sphère.*

En remarquant : 1° *que la tangente à une ligne asymptotique a trois points confondus avec la surface;* 2° *qu'une sphère tangente à la surface a avec cette surface une intersection qui présente ordinairement au point de contact un point double à tangentes distinctes, mais que les tangentes sont confondues suivant la direction de l'un des axes de l'indicatrice, quand la sphère a pour centre l'un des centres principaux de courbure (on dit alors que la sphère est osculatrice), on peut démontrer qu'à la tangente asymptotique la transformation fait correspondre une sphère osculatrice, et que, comme conséquence, les lignes asymptotiques d'une surface deviennent par la transformation les lignes de courbure de la surface transformée.*

Différentions les deux premières équations, ajoutons-les ensuite après les avoir respectivement multipliées par des indéterminées λ_1 et λ_2, et identifions avec l'équation différentielle proposée. Nous aurons

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(dx' + \sqrt{-1}\,dy' + dz + z'\,dx + x\,dz') \\
&\quad + \lambda_2[dx(x' - \sqrt{-1}\,y') + x\,dx' - \sqrt{-1}\,x\,dy' + dy - dz'] \\
&= dz' - p'\,dx' - q'\,dy' - \rho(dz - p\,dx - q\,dy).
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients des mêmes différentielles dans les deux membres, on a

$$\begin{aligned}
1 &= \lambda_1 x - \lambda_2, \\
-p' &= \lambda_1 + \lambda_2 x, \\
-q' &= \sqrt{-1}\,(\lambda_1 - \lambda_2 x), \\
-\rho &= \lambda_1, \\
\rho p &= \lambda_1 z' + \lambda_2(x' - \sqrt{-1}\,y'), \\
\rho q &= \lambda_2.
\end{aligned}$$

On a, avec les équations proposées, neuf équations pour déterminer les huit quantités x', y', z', p', q', ρ, λ_1 et λ_2 en fonction des autres. Le calcul va nous montrer que ces neuf équations sont compatibles à cause de la troisième équation proposée. En effet, on a facilement

$$\rho = \frac{\lambda_1}{-1} = \frac{\lambda_2}{q} = \frac{1}{-x-q} = \frac{-p'}{-1+qx} = \frac{-q'}{\sqrt{-1}(-1-qx)}$$
$$= \frac{\rho p}{-z'+q(x'-\sqrt{-1}\,y')}.$$

L'égalité du premier et du dernier rapport donne précisément

$$p = -z' + q(x' - \sqrt{-1}\,y'),$$

ce qui est la troisième équation de M. Lie.

On a facilement ensuite les formules ([1])

$$x' + \sqrt{-1}\,y' = -z - x\,\frac{px+qy}{q-x},$$
$$x' - \sqrt{-1}\,y' = \frac{y+p}{q-x},$$
$$z' = \frac{px+qy}{q-x},$$
$$p' = \frac{qx-1}{q+x},$$
$$q' = -\sqrt{-1}\,\frac{qx+1}{q+x}.$$

Ce sont les formules d'un changement de cinq variables en cinq nouvelles variables. Au point de vue géométrique, on peut considérer x, y, z, p, q comme définissant l'ensemble d'un point d'une surface et du plan tangent en ce point, et x', y', z', p', q' définiront un point de la surface *transformée* et son plan tangent. En effet, si $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ exprime la condition à laquelle satisfait un déplacement infiniment petit dans le plan tangent, il résulte du calcul précédent que la même condition $dz' - p'\,dx' - q'\,dy' = 0$ sera satis-

([1]) *Voir* GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*, p. 266.

faite pour la surface transformée et réciproquement. On peut énoncer ce résultat en disant que la transformation transforme deux surfaces tangentes en deux surfaces tangentes (transformations de contact de M. Lie).

Si l'on suit une courbe sur une surface, x, y, z, p, q ne dépendront que d'un seul paramètre. Il en sera de même de x', y', z', p', q'. Donc, à tous les points d'une courbe et aux plans tangents en ces points à la surface, correspondent points de courbe et plans tangents dans la transformation.

On peut encore considérer une courbe isolément et se donner des variables p et q en chaque point x, y, z, par exemple par la position d'un plan tangent à la courbe en chaque point; on aura des transformations correspondantes.

Dans le cas d'une ligne droite, dont les équations sont

$$\begin{gathered} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \end{gathered}$$

on aura en même temps les deux premières équations de M. Lie, ce qui donnera la condition

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ z' & 0 & 1 & x' + \sqrt{-1}\,y' \\ x' - \sqrt{-1}\,y' & 1 & 0 & -z' \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation d'une sphère.

La loi suivant laquelle p est lié à q en chaque point de la droite détermine une courbe sphérique et les plans tangents à la sphère en chacun des points de cette courbe. A trois points confondus sur la droite correspondront trois points confondus sur la sphère : c'est de là que se tire la dernière partie de la question proposée.

MÉCANIQUE. — *Dans un plan donné, un canal circulaire* A *est mobile sans frottement autour de son centre qui est fixe. Dans ce canal, dont l'intérieur est dépoli, se meut un point* B, *non pesant.*

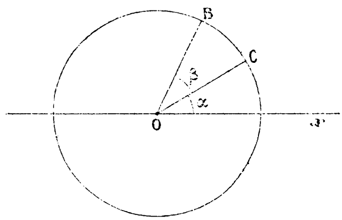
On donne au système un mouvement initial. Étudier le mouvement subséquent.

Étudier le cas particulier suivant :

La masse du canal est égale à dix fois la masse du point B. *Le rayon du canal est égal à deux mètres. Le coefficient de frottement du point à l'intérieur du canal est égal à un dixième.*

A l'instant initial, le canal est sans vitesse et le point B *a une vitesse égale à l'unité.*

Soient O le centre fixe du canal A et Ox une droite fixe dans le plan où se meut le canal. Désignons par C



un point invariablement lié au canal et situé sur sa circonférence.

Soient α l'angle xOC et β l'angle COB, ces angles étant comptés de droite à gauche. Nous appellerons M la masse du canal A et m la masse du mobile B. Nous désignerons par R le rayon du canal dont le moment d'inertie sera alors MR^2.

Puisque le canal est dépoli, l'action du canal sur le point ne sera pas normale au canal, si la vitesse relative du point sur le canal n'est pas nulle. Cette action pourra se décomposer en deux forces, l'une normale N, l'autre tangentielle Nf, en désignant par f le coefficient de frottement. Cette composante tangentielle, dont la valeur absolue est Nf, sera dirigée en sens contraire du mouvement relatif du point B.

Les composantes de la réaction du point B sur le canal seront égales et contraires aux précédentes.

Dans ce qui suit, on supposera que la valeur initiale de $\frac{d\beta}{dt}$ est positive. On verrait sans difficulté comment il faudrait modifier les équations si la valeur initiale de $\frac{d\beta}{dt}$ était négative.

La composante N de l'action du canal sur le point B est évidemment dirigée suivant BO. Nous la compterons donc dans le sens BO, et par conséquent la composante tangentielle sera égale à $-Nf$ si on la compte dans le sens où β croît.

Si l'on projette sur la tangente et sur la normale en B, les équations du mouvement du point seront

$$(1)\qquad m\mathrm{R}\frac{d^2(\alpha+\beta)}{dt^2} = -\mathrm{N}f.$$

$$(2)\qquad m\mathrm{R}\left[\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}\right]^2 = \mathrm{N}.$$

Enfin, si l'on étudie le mouvement du canal, le théorème du moment des quantités de mouvement, par rapport au point O, donnera

$$(3)\qquad \mathrm{MR}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \mathrm{N}f.$$

Des équations (1) et (3), on tire l'équation

$$\mathrm{M}m\mathrm{R}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\mathrm{N}f(\mathrm{M}+m),$$

qui montre que $\frac{d\beta}{dt}$ va toujours en décroissant, tandis que l'équation (3) montre que $\frac{d\alpha}{dt}$ va toujours en croissant. Enfin l'équation (1) montre que $\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}$ va toujours en décroissant.

Des équations (1) et (2), l'on tire

$$\frac{d^2(\alpha+\beta)}{dt^2}+f\left[\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}\right]^2=0,$$

d'où l'on tire, en désignant par u_0 la valeur initiale de $\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}$,

$$\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}=\frac{u_0}{1+u_0 ft}. \tag{4}$$

Ensuite, les équations (1) et (3) donnent

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2}+m\frac{d^2(\alpha+\beta)}{dt^2}=0,$$

d'où l'on tire, en désignant par v_0 la valeur initiale de $\frac{d\alpha}{dt}$,

$$M\frac{d\alpha}{dt}+m\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}=Mv_0+mu_0. \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) donnent alors

$$M\frac{d\alpha}{dt}=Mv_0+mu_0-\frac{mu_0}{1+u_0 ft}, \tag{6}$$

$$M\frac{d\beta}{dt}=\frac{(M+m)u_0}{1+u_0 ft}-(Mv_0+mu_0). \tag{7}$$

Pour $t=0$, $\frac{d\beta}{dt}$ est égal à $-u_0-v_0$ qu'on a supposé positif, puisqu'on a supposé que la valeur initiale de $\frac{d\beta}{dt}$ était positive. Cette quantité $\frac{d\beta}{dt}$ va en décroissant, et elle s'annulera pour une valeur de t fournie par la relation

$$t=\frac{M(u_0-v_0)}{fu_0(Mv_0+mu_0)}. \tag{8}$$

Dans cette expression, le numérateur est positif; quant au dénominateur, il peut être positif ou négatif. S'il est positif, $\frac{d\beta}{dt}$ deviendra nul au bout d'un certain temps et, à partir de cet instant, les équations (6) et (7) ne conviendront plus. Alors le point B restera fixe sur le canal et tout le système tournera d'un mouvement uniforme autour du point O. Si, au contraire, le dénominateur est négatif, $\frac{d\beta}{dt}$ ne s'annule jamais et les équations (6) et (7) conviennent indéfiniment. Mais alors l'équation (4) montre que la vitesse absolue du point B tend vers zéro lorsque t augmente indéfiniment.

Ce dernier cas se réalisera en supposant u_0 positif, avec v_0 négatif et suffisamment grand en valeur absolue. La vitesse absolue de B tendant vers zéro, la pression N tend également vers zéro, comme le montre l'équation (2) et, par suite, le frottement Nf tend également vers zéro. On comprend ainsi que le frottement, devenant infiniment petit, n'arrive pas à détruire la vitesse du canal qui, tout en décroissant en valeur absolue, tend vers une limite différente de zéro.

L'équation (4) demande une observation. Il semble que, si u_0 était négatif, $\frac{d(\alpha+\beta)}{dt}$ pourrait croître indéfiniment.

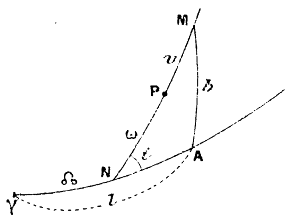
Mais, pour en rester dans l'hypothèse admise où la valeur initiale de $\frac{d\beta}{dt}$ est positive, on voit que, si u_0 est négatif, il faut que v_0 soit aussi négatif. Mais alors la valeur de t, fournie par l'équation (8), est positive, et elle est inférieure à la valeur de t, qui annulerait $1+u_0ft$. On n'a donc pas à examiner le cas de $1+u_0ft=0$, car les équations cessent de convenir avant d'atteindre la valeur de t, qui vérifierait cette dernière équation.

Pour terminer la solution, il reste à trouver les valeurs de α, β, $\alpha+\beta$ en fonction du temps, ce qui ne présente aucune difficulté.

Le cas particulier indiqué ne présente aucune complication, il permet seulement de préciser la question par des données numériques.

En résumé, les vitesses absolues du point et du canal tendent à devenir égales. Si la vitesse absolue du canal n'est pas trop grande, l'égalité se produira et, à partir de cet instant, le canal et le point formeront un système invariable animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de O. Mais si la vitesse absolue du canal est trop grande par rapport à la vitesse absolue du point B et si les deux vitesses absolues sont de sens contraire, le mouvement se continuera sans que les vitesses deviennent jamais égales, la vitesse du point B tendra vers zéro et la vitesse angulaire du canal tendra vers une limite différente de zéro.

Astronomie. — *Connaissant l'anomalie vraie v d'une planète, ainsi que la longitude du nœud ascen-*



dant, l'inclinaison i et l'argument ω de la latitude du périhélie de l'orbite, calculer la longitude l et la latitude b héliocentrique de cette planète.

$$
\begin{aligned}
v &= 158^\circ 29' 17'', 8,\\
☊ &= 80^\circ 46' 39'', 0,\\
i &= 10^\circ 37' 10'', 0,\\
\omega &= 68^\circ 51' 10'', 0.
\end{aligned}
$$

On peut se servir des formules

$$\operatorname{tang}(l - \Omega) = \operatorname{tang} u \cos - i,$$
$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} i \sin(l - \Omega),$$

où

$$u = v + \omega.$$

Les tangentes suffisent pour déterminer les angles $(l - \Omega)$ et b, car $\sin(l - \Omega)$ et $\sin u$ ont le même signe et b est compris entre -90° et $+90^\circ$.

On a

$$u = 227^\circ 20' 27'',8,$$

$\operatorname{tang} u$	$0,0355.293$
$\cos i$	$\bar{1},9924.973$
$\operatorname{tang}(l - \Omega)$	$0,0280.266$

$$l - \Omega = 226^\circ 50' 50'',9,$$
$$l = 307^\circ 37' 29'',9,$$

$\sin(l - \Omega)$	$-\bar{1},8630.465$
$\operatorname{tang} i$	$\bar{1},2729.924$
$\operatorname{tang} b$	$-\bar{1},1360.389$

$$b = -7^\circ 47' 19'',95.$$

Les signes placés devant les logarithmes se rapportent à la quantité elle-même.

Toulouse.

Analyse. — I. *On donne deux nombres réels positifs* m, n *dont la somme* $m + n$ *est égale à l'unité, et l'on demande de calculer la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{a - x}\, dx,$$

dans laquelle a *désigne un nombre réel donné et choisi de façon que cette intégrale ait un sens.*

Appliquer au cas où l'on a

$$m = n = \frac{1}{2}.$$

II. x, y, z *désignant des coordonnées cartésiennes rectangulaires, déterminer une surface satisfaisant à l'équation*

$$(y+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial z}{\partial y} = x+y$$

et passant par le cercle défini par les équations

$$x = 0, \qquad y^2 + z^2 = 1.$$

Déterminer aussi une surface satisfaisant à la même équation et passant par la droite définie par les équations

$$x = y = z.$$

III. *Définition et détermination des lignes de courbure d'une surface donnée.*

Mécanique. — I. *Étudier le mouvement d'un point matériel assujetti à décrire la courbe parfaitement polie représentée par l'équation*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \qquad a \text{ const.}$$

et soumis à l'action d'une force perpendiculaire à Ox, *dirigée vers cet axe et variant en raison inverse de la racine cubique de l'ordonnée. On supposera que le mobile part sans vitesse initiale du point de coordonnées* $x = 0$, $y = a$ *et qu'il commence à se mouvoir sur l'arc compris dans l'angle* yOx *formé par les parties positives des axes de coordonnées.*

Montrer que cet arc de courbe est brachistochrone pour cette loi de force.

II. *Un corps solide partant du repos est assujetti à tourner autour d'un de ses points* O *supposé fixe et mis en mouvement par un couple de percussion. On demande de déterminer la valeur de la force vive* $2T$ *que prend le corps.*

Supposons maintenant que le même corps partant du repos soit mis en mouvement par le même couple de percussion, mais que l'on fixe un autre de ses points A *de façon qu'il soit contraint de tourner autour d'un axe fixe* OA. *Calculer la force vive* $2T'$ *qu'il aurait dans ce cas et montrer que cette force vive est inférieure à celle qu'il aurait acquise dans le premier cas, c'est-à-dire que l'on a*

$$T' < T.$$

On donne en grandeur et en direction les axes principaux d'inertie du corps relativement au point O *et le moment du couple de percussion.*

Épreuve pratique. — *En un point dont la latitude est* $43°36'45'',3$, *on a observé une étoile. On a trouvé l'angle horaire égal à* $3^h 45^m 8^s,15$ *et la déclinaison à* $+8° 12' 46'',9$. *On demande de corriger ces coordonnées de la réfraction atmosphérique. On admettra qu'à la distance zénithale* z *à laquelle se trouve la position observée, la correction à apporter à la distance zénithale observée pour avoir la distance zénithale vraie est* $\alpha \tan z$, *où*

$$\alpha = 58'',3.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1744.

(1896, p. 440.)

Soit ω *le centre de courbure d'une courbe* (m), *correspondant au point* m. *On considère une droite* D *qui coupe le segment* ωm *suivant un angle donné et le divise suivant un rapport donné. Construire le point où* D *touche son enveloppe, ainsi que les centres de courbure successifs de cette enveloppe.* (E. DUPORCQ.)

SOLUTION

Par M. LA GÉOCINE.

Soit ω' le centre de courbure de la développée de (m) correspondant à ω. Appelons a le point où D coupe $m\omega$ et a' le point qui partage $\omega\omega'$ comme a partage $m\omega$: la droite $a'a$ est la normale en a à la courbe lieu des points tels que a. Les droites, telles que D, faisant toujours le même angle donné avec les rayons de courbure de (m), la perpendiculaire D' abaissée de ω' sur D est une normale à l'enveloppe de D. Cette droite D' passe par a' et fait avec $\omega\omega'$ un angle égal à l'angle constant de D avec $m\omega$; on peut alors, comme précédemment, construire le point où elle touche son enveloppe, c'est-à-dire le centre de courbure de l'enveloppe de D. La droite D' étant déterminée d'une façon analogue à D, on peut construire le centre de courbure de son enveloppe et ainsi de suite.

QUESTIONS.

1750. Soit m un point quelconque d'une conique de centre O; par les points O et m, on mène les droites Op et mp, également inclinées sur les axes, respectivement, que la droite Om et la tangente en m. La perpendiculaire élevée à mp au point p passe par le centre de courbure en m. (E. DUPORCQ.)

[U3]

SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS;

PAR M. D. GRAVÉ, à Saint-Pétersbourg.

Le problème qui consiste à déterminer le mouvement de trois corps s'attirant mutuellement en raison directe de leurs masses et d'une certaine fonction de leurs distances réciproques, se ramène, comme l'on sait, à la résolution du problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement, et attirés vers un centre fixe, avec des forces proportionnelles à certaines fonctions : 1° de leurs masses; 2° de la distance entre ces deux corps; 3° des distances des deux corps au centre fixe.

Nous parvenons ainsi à la considération d'un système de douze équations du premier ordre :

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi}, & \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \eta}, & \dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \zeta}, \\
\dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x}, & \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y}, & \dfrac{d\zeta}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial z}, \\
\dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi_1}, & \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \eta_1}, & \dfrac{dz_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \zeta_1}, \\
\dfrac{d\xi_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x_1}, & \dfrac{d\eta_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_1}, & \dfrac{d\zeta_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial z_1},
\end{array}
$$

où

$$
H = U - \frac{1}{2m}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \frac{1}{2m_1}(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) .
$$

U étant la fonction des forces; m, m_1 les masses de deux points; x, y, z, x_1, y_1, z_1 les coordonnées des points; ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 proportionnelles aux projections des vitesses des points sur les axes des coordonnées.

M. Bertrand [1] introduit des variables nouvelles :

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \qquad u_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$
$$q = x x_1 + y y_1 + z z_1,$$
$$v = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad v_1 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$
$$w = x\xi + y\eta + z\zeta, \qquad w_1 = x_1\xi_1 + y_1\eta_1 + z_1,\zeta_1,$$
$$r = x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta, \qquad r_1 = x\xi_1 + y\eta_1 + z\zeta_1,$$
$$s = \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1.$$

Une de ces dix variables est une fonction des autres, car l'équation

$$D = \begin{vmatrix} u & q & w & r_1 \\ q & u_1 & r & w_1 \\ w & r & v & s \\ r_1 & w_1 & s & v_1 \end{vmatrix} = 0$$

est satisfaite identiquement.

Les variables de M. Bertrand satisfont aux équations différentielles suivantes [2] :

$$\frac{du}{dt} = \frac{2w}{m}, \qquad \frac{du_1}{dt} = \frac{2w_1}{m_1}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{r}{m} + \frac{r_1}{m_1},$$
$$\frac{dv}{dt} = 2\alpha w + 2\beta r, \qquad \frac{dv_1}{dt} = 2\alpha_1 w_1 + 2\beta r_1,$$
$$\frac{dw}{dt} = \frac{v}{m} + \alpha u + \beta q, \qquad \frac{dw_1}{dt} = \frac{v_1}{m_1} + \alpha_1 u_1 + \beta q,$$
$$\frac{dr}{dt} = \frac{s}{m_1} + \alpha q + \beta u_1, \qquad \frac{dr_1}{dt} = \frac{s}{m} + \alpha_1 q + \beta u,$$
$$\frac{ds}{dt} = \alpha_1 r + \alpha r + \beta(w + w_1),$$

ou α, α_1, β sont des coefficients qui dépendent des forces et s'expriment par u, u_1, q.

---

(1) BERTRAND, *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVII, p. 32).

(2) BOUR, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIe Cahier, t. XXI, p. 35.

Nous nous proposons ici de résoudre la question suivante : trouver toutes les intégrales des équations de M. Bertrand indépendantes de la loi des forces.

Soit l'intégrale cherchée

$$V(u, u_1, v, v_1, w, w_1, r, r_1, q, s).$$

La dérivée de cette fonction, prise par rapport au temps, doit s'annuler à cause des conditions du problème, ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial u}\,\frac{2}{m}\,w + \frac{\partial V}{\partial u_1}\,\frac{2}{m_1}\,w_1 + \frac{\partial V}{\partial v}\,(2\alpha w + 2\beta r)\\
&\quad + \frac{\partial V}{\partial v_1}(2\alpha_1 w_1 + 2\beta r_1) + \frac{\partial V}{\partial q}\left(\frac{r}{m} + \frac{r_1}{m}\right)\\
&\quad + \frac{\partial V}{\partial w}\left(\frac{v}{m} + \alpha u + \beta q\right) + \frac{\partial V}{\partial w_1}\left(\frac{v_1}{m_1} + \alpha_1 u_1 + \beta q\right)\\
&\quad + \frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{s}{m_1} + \alpha q + \beta u_1\right) + \frac{\partial V}{\partial r_1}\left(\frac{s}{m} + \alpha_1 q + \beta u\right)\\
&\qquad\qquad + \frac{\partial V}{\partial s}\,[\alpha_1 r + \alpha r_1 + \beta(w + w_1)] = 0.
\end{aligned}$$

Pour trouver toutes les intégrales, qui soient indépendantes de la loi d'attraction, il faut égaler à zéro séparément les coefficients des α, α_1, β, ainsi que le terme indépendant des forces.

En posant

$$a = 2w\,\frac{\partial V}{\partial u} + v\,\frac{\partial V}{\partial w} + s\,\frac{\partial V}{\partial r_1} + r\,\frac{\partial V}{\partial q},$$

$$b = 2w_1\,\frac{\partial V}{\partial u_1} + v_1\,\frac{\partial V}{\partial w_1} + s\,\frac{\partial V}{\partial r} + r_1\,\frac{\partial V}{\partial q},$$

nous obtenons le système de quatre équations

$$(1)\qquad \frac{1}{m}\,a + \frac{1}{m_1}\,b = 0,$$

$$(2)\qquad 2w\,\frac{\partial V}{\partial v} + u\,\frac{\partial V}{\partial w} + q\,\frac{\partial V}{\partial r} + r_1\,\frac{\partial V}{\partial s} = 0,$$

$$(3)\qquad 2w_1\,\frac{\partial V}{\partial v_1} + u_1\,\frac{\partial V}{\partial w_1} + q\,\frac{\partial V}{\partial r} + r\,\frac{\partial V}{\partial s} = 0,$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &2r\frac{\partial V}{\partial v}+2r_1\frac{\partial V}{\partial v_1}+q\left(\frac{\partial V}{\partial w}+\frac{\partial V}{\partial w_1}\right)\\ &\qquad+u_1\frac{\partial V}{\partial r}+u\frac{\partial V}{\partial r_1}+(w+w_1)\frac{\partial V}{\partial s}=0.\end{aligned}\right.$$

En combinant ces équations deux à deux, au moyen du symbole de Poisson, nous parvenons au système complet suivant :

$$a=0,\qquad b=0,\qquad (2)=0,\qquad (3)=0,\qquad (4)=0,$$

$$(5)\quad 2u\frac{\partial V}{\partial u}-2v\frac{\partial V}{\partial v}+r_1\frac{\partial V}{\partial r_1}-r\frac{\partial V}{\partial r}+q\frac{\partial V}{\partial q}-s\frac{\partial V}{\partial s}=0,$$

$$(6)\quad 2u_1\frac{\partial V}{\partial u_1}-2v_1\frac{\partial V}{\partial v_1}+r\frac{\partial V}{\partial r}-r_1\frac{\partial V}{\partial r_1}+q\frac{\partial V}{\partial q}-s\frac{\partial V}{\partial s}=0,$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &r\left(\frac{\partial V}{\partial w}-\frac{\partial V}{\partial w_1}\right)+(w_1-w)\frac{\partial V}{\partial r_1}\\ &\qquad+2q\frac{\partial V}{\partial u}+u_1\frac{\partial V}{\partial q}-2s\frac{\partial V}{\partial v_1}-v\frac{\partial V}{\partial s}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &r_1\left(\frac{\partial V}{\partial w_1}-\frac{\partial V}{\partial w}\right)+(w-w_1)\frac{\partial V}{\partial r}\\ &\qquad+2q\frac{\partial V}{\partial u_1}+u\frac{\partial V}{\partial q}-2s\frac{\partial V}{\partial v}-v_1\frac{\partial V}{\partial s}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &2r\frac{\partial V}{\partial u_1}+2r_1\frac{\partial V}{\partial u}+s\left(\frac{\partial V}{\partial w}+\frac{\partial V}{\partial w_1}\right)\\ &\qquad+v\frac{\partial V}{\partial r}+v_1\frac{\partial V}{\partial r_1}+(w+w_1)\frac{\partial V}{\partial q}=0.\end{aligned}\right.$$

Voici la Table des valeurs du symbole de Poisson :

	a.	b.	(2).	(3).	(4).
a..........	0	0	(5)	0	(7)
b..........	0	0	0	(6)	(8)
(2).......	—(5)	0	0	0	0
(3).......	0	—(6)	0	0	0
(4).......	—(7)	—(8)	0	0	0
(5).......	$2a$	0	—2(2)	0	—(4)
(6).......	0	$2b$	0	—2(3)	—(4)
(7).......	0	(9)	—(4)	0	—2(3)
(8).......	(9)	0	0	—(4)	—2(2)
(9).......	0	0	(8)	(7)	(5)+(6)

	(5).	(6).	(7).	(8).	(9).
a.........	$-2a$	o	o	$-(9)$	o
b.........	o	$-2b$	$-(9)$	o	o
(2).......	$2(2)$	o	(4)	o	$-(8)$
(3).......	o	$2(3)$	o	(4)	$-(7)$
(4).......	(4)	(4)	$2(3)$	$2(2)$	$-(5)-(6)$
(5).......	o	o	(7)	$-(8)$	(9)
(6).......	o	o	$-(7)$	(8)	(9)
(7).......	$-(7)$	(7)	o	$(5)-(6)$	$2a$
(8).......	(8)	$-(8)$	$(6)-(5)$	o	$2b$
(9).......	$-(9)$	$-(9)$	$-2a$	$-2b$	o

Montrons que le système ci-dessus admet une intégrale complète au moyen de la méthode de Bool-Korkine. En intégrant l'équation $a = 0$, nous parvenons au système

$$\frac{du}{2w} = \frac{dw}{v} = \frac{dr_1}{s} = \frac{dq}{r}.$$

Les trois intégrales indépendantes sont

$$uv - w^2 = \alpha_1, \qquad ws - vr_1 = \alpha_2, \qquad rr_1 - qs = \alpha_3.$$

Introduisons les nouvelles variables α_1, α_2, α_3 au lieu des anciennes u, w, r_1, q,

$$V = W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, u_1, v_1, w_1, v, r, s).$$

Les autres équations se transforment en un système nouveau

$$(1_1) \qquad 2w_1\frac{\partial W}{\partial u_1} + v_1\frac{\partial W}{\partial w_1} + s\frac{\partial W}{\partial r} = 0,$$

$$(2_1) \qquad 2v\frac{\partial W}{\partial v} + r\frac{\partial W}{\partial r} + s\frac{\partial W}{\partial s} + \alpha_2\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = 0,$$

$$(3_1) \qquad \alpha_1 s\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} - \alpha_2\frac{\partial W}{\partial s} - \frac{\alpha_2 r + \alpha_3 v}{s}\frac{\partial W}{\partial r} = 0,$$

$$(4_1) \qquad 2w_1\frac{\partial W}{\partial v_1} + u_1\frac{\partial W}{\partial w_1} + r\frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\alpha_2 r + \alpha_3 v}{s}\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = 0,$$

$$(5_1)\quad \left\{\begin{aligned} &2s\frac{\partial W}{\partial v_1}+r\frac{\partial W}{\partial w_1}+2\frac{\alpha_2 r+\alpha_3 v}{s}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\\ &\quad+(w_1 v-rs)\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}+v\frac{\partial W}{\partial s}\\ &\quad+\left(u_1 s-w_1 r+\frac{\alpha_2 r+\alpha_3 v}{s}\right)\frac{\partial W}{\partial \alpha_3}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(6_1)\quad \left\{\begin{aligned} &2rv\frac{\partial W}{\partial v}-2\alpha_2\frac{\partial W}{\partial v_1}-\frac{\alpha_2 r+\alpha_3 v}{s}\frac{\partial W}{\partial w_1}+u_1 v\frac{\partial W}{\partial r}\\ &\quad+w_1 v\frac{\partial W}{\partial s}+2\alpha_1 r\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}+[r\alpha_2-v(\alpha_1+\alpha_3)]\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\\ &\qquad+\left(r\alpha_1-u_1\alpha_2+w_1\frac{\alpha_2 r+\alpha_3 v}{s}\right)\frac{\partial W}{\partial \alpha_3}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(7_1)\quad 2u_1\frac{\partial W}{\partial u_1}-2v_1\frac{\partial W}{\partial v_1}+r\frac{\partial W}{\partial r}-s\frac{\partial W}{\partial s}-\alpha_2\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}=0,$$

$$(8_1)\quad \left\{\begin{aligned} &s\frac{\partial W}{\partial w}+v\frac{\partial W}{\partial r}+2r\frac{\partial W}{\partial u_1}-2\alpha_2\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\\ &\quad+(s^2-vv_1)\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}+(v_1 r-w_1 s-\alpha_2)\frac{\partial W}{\partial \alpha_3}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(9_1)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_2\frac{\partial W}{\partial w_1}+vw_1\frac{\partial W}{\partial r}+2\frac{\alpha_2 r+\alpha_3 v}{s}\frac{\partial W}{\partial u_1}+2sv\frac{\partial W}{\partial v}\\ &\quad+vv_1\frac{\partial W}{\partial s}+2s\alpha_1\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}+\alpha_1 s\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\\ &\qquad+\left(\alpha_1 s-w_1\alpha_2+v_1\frac{\alpha_2 r+\alpha_3 v}{s}\right)\frac{\partial W}{\partial \alpha_3}=0.\end{aligned}\right.$$

En intégrant l'équation (1_1), nous parvenons au système

$$\frac{du_1}{2w_1}=\frac{dw_1}{v_1}=\frac{dr}{s}.$$

Les deux intégrales indépendantes sont

$$u_1 v_1-w_1^2=\beta_1,\qquad w_1 s-v_1 r=\beta_2.$$

Introduisons, au lieu des variables u, w, r, les nouvelles β_1, β_2,

$$W=\Omega(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,v,v_1,s).$$

Le système transformé aura la forme

$$(1_1) \qquad 2v\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} + \beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3} + s\frac{\partial\Omega}{\partial s} = 0,$$

$$(2_2) \qquad s\alpha_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} - \alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial s} + \frac{\alpha_3 vv_1 - \alpha_2\beta_2}{s}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2} = 0,$$

$$(3_2) \qquad s\beta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2} - \beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial s} + \frac{\alpha_3 vv_1 - \alpha_2\beta_2}{s}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} = 0,$$

$$(4_2) \qquad 2v_1\frac{\partial\Omega}{\partial v_1} + \alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} + \beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2} + s\frac{\partial\Omega}{\partial s} = 0,$$

$$(5_2) \qquad \left\{\begin{aligned} &2vs\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \alpha_1 s\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right) \\ &\quad + \frac{\alpha_3 vv_1 - \alpha_2\beta_2}{s}\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right) \\ &\quad + vv_1\frac{\partial\Omega}{\partial s} + s\alpha_2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(6_2) \qquad \left\{\begin{aligned} &2\beta_2 v\frac{\partial\Omega}{\partial v} + 2\alpha_2 v_1\frac{\partial\Omega}{\partial v_1} \\ &\quad + \alpha_1\beta_2\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right) + \alpha_2\beta_1\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right) \\ &\quad + [\alpha_2\beta_2 + vv_1(\alpha_1 + \alpha_3)]\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} \\ &\qquad\qquad + [\alpha_2\beta_2 + vv_1(\beta_1 + \alpha_3)]\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2} = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(7_2) \qquad \left\{\begin{aligned} &\beta_1\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right) + \frac{\alpha_3 vv_1 - \alpha_2\beta_2}{s^2}\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right) \\ &\qquad + \beta_2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}\right) + 2v_1\frac{\partial\Omega}{\partial v_1} + \frac{vv_1}{s}\frac{\partial\Omega}{\partial s} = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(8_2) \qquad \left\{\begin{aligned} &\beta_2\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right) \\ &\quad + \alpha_2\left(2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}\right) + (vv_1 - s^2)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Soustrayant de l'équation (1_2) l'équation (4_2), nous obtenons l'équation

$$v\frac{\partial\Omega}{\partial v} - \frac{\partial\Omega}{\partial v_1} = 0$$

qui donne l'intégrale $vv_1 = l$.

Introduisons, au lieu de vv_1, la lettre l; nous obtenons le système

$$\Omega = \Psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, l, s),$$

$$(1_3) \qquad 2l\frac{\partial\Psi}{\partial l} + \alpha_2\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} + \beta_2\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2} + s\frac{\partial\Psi}{\partial s} = 0,$$

$$(2_3) \qquad s^2\alpha_1\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} - \alpha_2 s\frac{\partial\Psi}{\partial s} + (\alpha_3 l - \alpha_2\beta_2)\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2} = 0,$$

$$(3_3) \qquad s^2\beta_1\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2} - \beta_2 s\frac{\partial\Psi}{\partial s} + (\alpha_3 l - \alpha_2\beta_2)\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} = 0$$

$$(4_3) \qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha_2\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right) + \beta_2\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right)\\ &\qquad + (l - s^2)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(5_3) \qquad \left\{\begin{aligned} &2l\frac{\partial\Psi}{\partial l} + \frac{l}{s}\frac{\partial\Psi}{\partial s} + \frac{\alpha_3 l - \alpha_2\beta_2}{s^2}\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right)\\ &\qquad + \beta_1\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right) + \beta_2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(6_3) \qquad \left\{\begin{aligned} &2l\frac{\partial\Psi}{\partial l} + \frac{l}{s}\frac{\partial\Psi}{\partial s} + \alpha_1\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right)\\ &\qquad + \frac{\alpha_3 l - \alpha_2\beta_2}{s^2}\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(7_3) \qquad \left\{\begin{aligned} &2l\frac{\partial\Psi}{\partial l}(\alpha_2 + \beta_2) + \alpha_1\beta_2\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right)\\ &\qquad + \alpha_2\beta_1\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_3}\right) + [\alpha_2\beta_2 + l(\alpha_1 + \alpha_3)]\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2}\\ &\qquad\qquad + [\alpha_2\beta_2 + (\beta_1 + \alpha_3)l]\frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2} = 0.\end{aligned}\right.$$

L'intégration de l'équation (1_3) donne trois solutions indépendantes

$$\lambda = \frac{l}{s^2}, \qquad \mu = \frac{\alpha_2}{s}, \qquad \nu = \frac{\beta_2}{s}.$$

Au lieu des variables α_2, β_2, l, s, introduisons les nouvelles λ, μ, ν;

$$\Psi = \Theta(\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \lambda, \mu, \nu).$$

Après la transformation, nous aurons le système

$$(1_4) \qquad 2\lambda\mu\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}+(\alpha_1+\mu^2)\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}+\alpha_3\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial\nu}=0,$$

$$(2_4) \qquad 2\lambda\mu\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}+\alpha_3\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}+(\beta_1+\nu)\frac{\partial\Theta}{\partial\nu}=0,$$

$$(4_4) \quad \left\{\begin{aligned}&(1-\lambda)\left(2\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}\right)+(\mu-\lambda\nu)\frac{\partial\Theta}{\partial\nu}\\&\quad+\alpha_1\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_3}\right)+(\alpha_3\lambda-\mu\nu)\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_3}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

$$(3_4) \quad \left\{\begin{aligned}&\mu\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_3}\right)+\nu\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_3}\right)\\&\qquad\qquad+(\lambda-1)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}+\frac{\partial\Theta}{\partial\nu}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

$$(5_4) \quad \left\{\begin{aligned}&(1-\lambda)\left(2\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}\right)+(\mu-\lambda\nu)\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}\\&\quad+(\alpha_3\lambda-\mu\nu)\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_3}\right)+\beta_1\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_3}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

L'équation (1_4) donne

$$\frac{d\lambda}{2\lambda\mu}=\frac{d\mu}{\alpha_1+\mu^2}=\frac{d\nu}{\alpha_3\lambda}.$$

Les deux intégrales indépendantes sont

$$\varepsilon=\frac{\lambda}{\alpha_1+\mu^2}, \qquad \delta=\frac{\alpha_3\mu\lambda}{\alpha_1+\mu^2}-\nu.$$

Au lieu des variables λ, μ, ν, introduisons les nouvelles ε, δ

$$\Theta=U(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \varepsilon, \delta).$$

Après la transformation, on a

$$(1_5) \qquad 2\varepsilon\delta\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}+(\delta^2-\varepsilon^2\alpha_1\alpha_3^2+\beta_1)\frac{\partial U}{\partial\delta}=0,$$

$$(2_5) \quad 2\frac{\partial U}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial U}{\partial\alpha_3}+\alpha_3\varepsilon\left(2\frac{\partial U}{\partial\beta_1}+\frac{\partial U}{\partial\alpha_3}\right)-2\varepsilon^2\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}-\varepsilon\delta\frac{\partial U}{\partial\delta}=0,$$

$$(3_5) \quad -\delta\left(2\frac{\partial U}{\partial\beta_1}+\frac{\partial U}{\partial\alpha_3}\right)+[\varepsilon^2\alpha_1\alpha_3-\varepsilon(\alpha_1+\alpha_3)+1]\frac{\partial U}{\partial\delta}=0.$$

Intégrons la première équation (1_5)

$$\frac{d\varepsilon}{2\varepsilon\delta} = \frac{d\delta}{\delta^2 - \varepsilon^2\alpha_1\alpha_3^2 + \beta_1}.$$

L'intégrale sera

$$\Delta = \varepsilon\alpha_1\alpha_3^2 + \frac{\delta^2 + \beta_1}{\varepsilon}.$$

Au lieu de ε, δ, introduisons Δ,

$$U = H(\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \Delta).$$

Après la transformation, nous aurons

$$(1_6) \qquad 2\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H}{\partial \alpha_3} + 2(\beta_1 - \alpha_3)\frac{\partial H}{\partial \Delta} = 0.$$

$$(2_6) \qquad 2\frac{\partial H}{\partial \beta_1} + \frac{\partial H}{\partial \alpha_3} + 2(\alpha_1 + \alpha_3)\frac{\partial H}{\partial \Delta} = 0.$$

Intégrons l'équation (1_6),

$$\frac{d\alpha_1}{2} = \frac{d\alpha_3}{1} = \frac{d\Delta}{2(\beta_1 + \alpha_3)}$$

On aura deux intégrales indépendantes

$$\alpha_1 - 2\alpha_3 = \theta, \qquad \Delta - \alpha_3^2 - 2\beta_1\alpha_3 = \rho.$$

Au lieu des variables α_1, α_3, Δ, prenons θ et ρ,

$$H = \Phi(\beta_1, \theta, \rho).$$

Faisons la transformation, et nous aurons définitivement

$$(1_7) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + (\theta - \beta_1)\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0,$$

Pour intégrer cette dernière équation, considérons le système

$$\frac{d\beta_1}{1} = \frac{d\theta}{-1} = \frac{d\rho}{\theta - \beta_1}.$$

Les deux intégrales indépendantes sont

$$C = \beta_1 + \theta, \qquad D = C\beta_1 - \beta_1^2 - \rho.$$

Nous obtenons ainsi la solution complète cherchée du système en question

$$V = \Pi(C, D),$$

où Π est une fonction arbitraire.

Il ne reste plus qu'à exprimer les quantités C, D au moyen des variables de M. Bertrand.

La fonction C se détermine aisément

$$C = \beta_1 + \theta = \alpha_1 + \beta_1 - 2\alpha_3 = uv - w^2 + u_1 v_1 - w_1^2 - 2(rr_1 - qs)$$

et représente, comme il n'est pas difficile de s'en convaincre, la somme des carrés des intégrales des surfaces.

Pour déterminer la fonction D, nous avons les relations

$$D = \theta\beta_1 - \rho, \qquad \theta = \alpha_1 - 2\alpha_3, \qquad \rho = \Delta - \alpha_3^3 - 2\beta_1\alpha_3,$$

$$\Delta = \alpha_1\alpha_3^2\varepsilon + \frac{\delta^2 + \beta_1}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\alpha_1 + \mu^2}, \qquad = \frac{\alpha_3\,\mu\lambda}{\alpha_1 + \mu^2} - \nu,$$

$$\lambda = \frac{l}{s^2}, \qquad \mu = \frac{\alpha_2}{s}, \qquad \nu = \frac{\beta_2}{s}, \qquad l = vv_1,$$

$$\beta_1 = u_1 v_1 - w_1^2, \qquad \beta_2 = w_1 s - v_1 r, \qquad \alpha_1 = uv - w^2,$$

$$\alpha_2 = ws - vr_1, \qquad \alpha_3 = rr_1 - qs,$$

d'où il vient

$$D = \begin{vmatrix} u & q & w & r_1 \\ q & u & r & w_1 \\ w & r & v & s \\ r_1 & w_1 & s & v_1 \end{vmatrix}.$$

Ainsi, nous voyons que les équations de M. Bertrand n'admettent pas d'intégrales indépendantes de la loi des forces autres que celles qui sont déjà connues.

[A31] [G6c]

SUR LES RACINES DE L'ÉQUATION $x = a^x$;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

Dans ce qui suit, je me propose de montrer que les racines de l'équation

$$x = a^x$$

sont les valeurs vers lesquelles convergent certaines expressions déjà étudiées [1], et que l'on peut considérer comme représentant symboliquement une suite de substitutions uniformes particulières. L'expression

$$\overset{m}{\dot{a}}\Big| i$$

est dite *la surpuissance* $m^{\text{ième}}$ de a, l'initial étant i. Elle représente l'expression

$$a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a^i}}}}},$$

dans laquelle a est écrit m fois; m est l'exposant de la surpuissance. Occupons-nous d'abord des racines réelles de l'équation proposée, qui peut encore s'écrire

$$x^{\frac{1}{x}} = a.$$

Considérons la fonction $y = x^{\frac{1}{x}}$; nous avons

$$y' = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - \mathrm{L}x).$$

---

(1) *Sur les fonctions itératives* (*Association française pour l'avancement des Sciences*, Bordeaux, 1895).

La dérivée sera nulle pour $x = 0$, pour $x = e$ et pour $x = \infty$.

Quand x est plus grand que 1, y est plus grand que 1. Quand x est compris entre 0 et 1, y est aussi compris entre 0 et 1. De plus, pour $x = 1$, $y' = 1$. Par suite, la courbe qui, en coordonnées rectangulaires, la représente, est tangente à OX pour $x = 0$; quand x croît de 0 à 1, ses ordonnées croissent de 0 à 1; pour $x = 1$, elle est tangente à la bissectrice des axes. Quand x croît de 1 à e, les ordonnées croissent de 1 à $e^{\frac{1}{e}}$ valeur maximum; enfin, quand x croît de e à ∞, les ordonnées décroissent asymptotiquement de $e^{\frac{1}{e}}$ à 1.

Par suite, quand a est compris entre 0 et 1, l'équation admet une racine réelle comprise entre 0 et 1; quand a est compris entre 1 et $e^{\frac{1}{e}}$, il y a une racine réelle comprise entre 1 et e, et une deuxième racine réelle comprise entre e et ∞; pour $a = e^{\frac{1}{e}}$, il y a une racine double dont la valeur est e.

Prenons d'abord le cas

$$1 < a < e^{\frac{1}{e}},$$

et considérons l'expression

$$\left.\begin{matrix} m \\ \dot{a} \end{matrix}\right| \begin{matrix} e \\ . \end{matrix}$$

On a identiquement

$$\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e.$$

Si je remplace $e^{\frac{1}{e}}$ par le nombre plus petit a, j'aurai $a^e < e$. Élevons a à la puissance exprimée par les deux membres de cette inégalité, nous aurons une inégalité de même sens

$$a^{a^e} < a^e,$$

et, en général,

$$e > \left.\overset{1}{\dot{a}}\right|^{e} > \left.\overset{2}{\dot{a}}\right|^{e} \ldots > \left.\overset{m}{\dot{a}}\right|^{e}.$$

Donc $\left.\overset{m}{\dot{a}}\right|^{e}$ décroît quand m augmente. Je dis maintenant qu'il tend vers une limite ; on a identiquement

$$a^u = \left(u^{\frac{1}{u}}\right)^u = u,$$

u étant la racine réelle comprise entre 1 et e. Si je remplace l'exposant u par un nombre plus grand φ, j'aurai $a^\varphi > u$. Or le premier terme de la série ci-dessus est plus grand que u ; donc tous les autres seront aussi plus grands que u ; $\left.\overset{m}{\dot{a}}\right|^{e}$ tend donc vers une limite ; cette limite ne peut être que u, car si elle était $u' \lessgtr u$, on aurait $a^{u'} = u'$; cela ne se peut, car il y aurait une deuxième racine réelle comprise entre 1 et e ; donc

$$\lim \left.\overset{m}{\dot{a}}\right|^{e} = u.$$

Soit encore : $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ et considérons l'expression

$$\left.\overset{-m}{\dot{a}}\right|^{e}.$$

L'exposant négatif (¹) représente symboliquement l'opération qui consiste à prendre le logarithme, de telle sorte qu'il y a équivalence entre les expressions

$$\left.\overset{-1}{\dot{a}}\right|^{e} \quad \text{et} \quad \log_a e,$$

(¹) *Loc. cit.*

et en général entre les expressions

$$\left.\overset{-m}{\dot{a}}\right|^{e} \quad \text{et} \quad \log_a \log_a \ldots \log_a e,$$

où le signe $\log_a$ figure m fois. On a identiquement $\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e$ ou

$$\log_{e^{\frac{1}{e}}} e = e.$$

Si la base, au lieu d'être $e^{\frac{1}{e}}$, est le nombre plus petit a, le deuxième membre devient plus grand que e, et l'on a

$$\log_a e > e, \quad \log_a \log_a e > \log_a e, \quad \ldots,$$

ou

$$e < \left.\overset{-1}{\dot{a}}\right|^{e} < \left.\overset{-2}{\dot{a}}\right|^{e} \ldots < \left.\overset{-m}{\dot{a}}\right|^{e}.$$

D'autre part, ces valeurs ne croissent pas sans limite, car, si l'on désigne par U la racine comprise entre e et ∞, on a

$$U = a^U,$$

c'est-à-dire

$$\log_a U = U.$$

Si, dans le premier membre, je remplace U par un nombre plus petit, le deuxième membre sera plus petit que U, donc tous les autres termes seront aussi plus petits que U :

$$\left.\overset{-(m-1)}{\dot{a}}\right|^{e} < \left.\overset{-m}{\dot{a}}\right|^{e} < U;$$

$\left.\overset{-m}{\dot{a}}\right|^{e}$ croît donc en tendant vers une limite. Pour une raison analogue à celle du cas précédent, cette limite ne peut être que U ; donc

$$\lim \left.\overset{-m}{\dot{a}}\right|^{e} = U.$$

Soit maintenant $0 < a < 1$.

Les valeurs de $\overset{m}{\dot{a}}\Big|^{i}$, l'initial i étant quelconque, mais réel, croissent et décroissent alternativement. En effet, soient trois valeurs successives

$$a^i,\quad a^{a^i},\quad a^{a^{a^i}}.$$

Je dis que si a^i est plus grand (ou plus petit) que a^{a^i}, $a^{a^{a^i}}$ sera aussi plus grand (ou plus petit) que a^{a^i}. Par hypothèse

$$a^i > (\text{ou} <)\, a^{a^i};$$

mais, a étant compris entre 0 et 1, on a

$$a^{a^i} < (\text{ou} >)\, a^{a^{a^i}};$$

c'est la proposition à démontrer, et elle est démontrée généralement, puisque, étant indépendante de l'initial, on peut remplacer i par $\overset{n}{\dot{a}}\Big|^{i}$, n étant un entier quelconque.

Les valeurs de $\overset{m}{\dot{a}}\Big|^{i}$ correspondant à différentes valeurs de m de même parité, croissent (ou décroissent) constamment. Il suffit de prouver que, si

$$a^i < (\text{ou} >)\, a^{a^{a^i}},$$

on a aussi

$$\overset{3}{\dot{a}}\Big|^{i} < (\text{ou} >)\, \overset{5}{\dot{a}}\Big|^{i}.$$

En effet, de l'inégalité qui exprime l'hypothèse, on tire

$$\overset{2}{\dot{a}}\Big|^{i} > (\text{ou} <)\, \overset{4}{\dot{a}}\Big|^{i},$$

puis la proposition à démontrer; et celle-ci est démontrée généralement pour la même raison que tout à l'heure.

Cela posé, prenons le cas de a compris entre $\frac{1}{e^e}$ et 1; la racine est comprise entre $\frac{1}{e}$ et 1. Considérons l'expression

$$\left.\overset{m}{\dot{a}}\right|^{\frac{1}{e}}$$

quand m prend les valeurs $0, 1, 2, \ldots$; elle prend les valeurs

$$\frac{1}{e}, \quad a^{\frac{1}{e}}, \quad a^{a^{\frac{1}{e}}}, \quad \ldots.$$

Posons

$$a = \frac{1}{e^{\alpha}},$$

α étant plus petit que e; on a, pour les valeurs ci-dessus,

$$\frac{1}{e}, \quad \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{e}}}, \quad \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{e^{\frac{\alpha}{e}}}}}, \quad \ldots.$$

Comparons leurs dénominateurs; on a d'abord $e^{\frac{\alpha}{e}} < e$; le deuxième terme est donc plus grand que le premier; il en est de même du troisième, car, d'après une propriété déjà signalée, on a

$$\alpha^{\frac{1}{\alpha}} < e^{\frac{1}{e}};$$

on en tire

$$\alpha < e^{\frac{\alpha}{e}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\alpha}{e^{\frac{\alpha}{e}}} < 1 \qquad \text{et} \qquad e^{\frac{\alpha}{e^{\frac{\alpha}{e}}}} < e^1 = e, \qquad \ldots.$$

Par conséquent, aux valeurs paires et croissantes de m correspondent des valeurs croissantes de l'expression considérée; aux valeurs impaires, des valeurs décroissantes, mais toujours supérieures aux valeurs croissantes : c'est une condition nécessaire pour que les unes et les autres tendent vers une seule limite ; mais elle n'est pas suffisante, car les deux limites pourraient être distinctes. Il ne peut d'ailleurs exister plus de deux limites, car alors, évidemment, l'une ou l'autre des lois d'alternance ou de croissance, signalées plus haut, ne serait pas satisfaite.

Dans notre cas, les deux limites se confondent ; en effet, si les deux limites p et q étaient distinctes, on aurait

$$a^p = q, \qquad a^q = p, \qquad \text{d'où} \qquad p^p = q^q.$$

Or la fonction $y = x^x$ est égale à 1 pour $x = 0$ et $x = 1$; sa dérivée étant

$$y' = x^x(1 + \mathrm{L}x),$$

le minimum a lieu pour $x = \frac{1}{e}$; il faudrait donc que l'une des limites p et q fût comprise entre 0 et $\frac{1}{e}$, l'autre entre $\frac{1}{e}$ et 1. Comme les valeurs fournies par l'expression $\left.\overset{m}{\dot{a}}\right|^{\frac{1}{e}}$ sont toutes supérieures à $\frac{1}{e}$, cette expression ne peut tendre que vers une seule limite, qui est la racine de notre équation.

Quand a est plus petit que $\frac{1}{e^e}$, la racine est comprise entre 0 et $\frac{1}{e}$. Considérons l'expression $\left.\overset{-m}{\dot{a}}\right|^{\frac{1}{e}}$; comme plus haut, on verra qu'alors, aux valeurs paires de m, correspondent des valeurs décroissantes toutes supérieures aux valeurs croissantes qui correspondent aux valeurs impaires de m, et que les valeurs obtenues tendent vers une seule limite qui est la racine.

On peut donc conclure que les racines réelles sont les valeurs limites correspondant aux quatre combinaisons des signes de l'expression

$$\left.\begin{matrix} \pm m \\ \dot{a} \end{matrix}\right| e^{\pm 1},$$

savoir

$$\begin{array}{lll} -\,- \text{ si l'on a } & 0 < a < \dfrac{1}{e^e}, & \left.\begin{array}{l} +\,+ \\ -\,+ \end{array}\right\} \text{ si l'on a } 1 < a < e^{\frac{1}{e}}. \\ +\,- \quad \text{»} & \dfrac{1}{e^e} < a < 1, & \end{array}$$

La surpuissance pouvant être considérée comme un algorithme fondamental, faisant naturellement suite à ceux de l'addition, de la multiplication et de l'élévation aux puissances, les racines de notre équation se trouvent exprimées en symboles fondamentaux. C'est un résultat analogue à celui par lequel on exprime la racine réelle de l'équation $e^x = \mathrm{K}$, savoir

$$x = \lim m \left(\mathrm{K}^{\frac{1}{m}} - 1\right).$$

Dans le cas $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, et en ce qui concerne la plus petite racine, nous aurions pu suivre une autre démonstration. M. Kœnigs [1] a montré que, α désignant une racine de l'équation $x - f(x) = 0$, la substitution $[x, f(x)]$ peut tendre vers α si $f(x)$ est holomorphe au point α, et si l'on a $\bmod \left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)_\alpha < 1$. Quand on inverse la fonction, on a en général une fonction non holomorphe et, par suite, plusieurs déterminations. Pour converger vers une seule limite, il faut prendre seulement, parmi ces dernières, celle qui est contenue dans

---

[1] *Sur les équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale*, 1884-1885).

le domaine du point α. Le théorème de M. Kœnigs s'applique au cas signalé et, avec cette restriction, nous pouvions l'appliquer aux autres cas; pour ceux-ci, bien que la fonction logarithmique ne soit pas holomorphe, nous avons eu convergence parce qu'elle n'a qu'une seule détermination réelle. C'est la méthode que nous suivrons pour les racines imaginaires, dont l'étude fera l'objet d'une prochaine Note.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1896. SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES;

PAR M. PIERRE DELIX.

On donne un cercle C *qui a pour équations en coordonnées rectangulaires :* $x = a$ *et* $y^2 + z^2 = a^2$.

On considère : 1° *le cône* S *qui a pour base le cercle, et pour sommet le point de l'axe* Oz *qui est à la distance* λa *de l'origine;* 2° *la surface* S_1 *engendrée par des droites parallèles au plan des* xy, *et qui s'appuient sur l'axe* Oz *et sur le cercle donné.*

On demande :

I. *De former les équations des deux surfaces* S *et* S_1;

II. *De trouver l'expression du sinus de l'angle des plans tangents aux deux surfaces en un point du cercle qui a pour cote* $z = \mu a$, *et de calculer ce sinus, avec trois décimales seulement, pour* $\lambda = \frac{1}{2}$ *et* $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

III. *De déterminer l'intersection des deux surfaces, d'en construire deux projections pour* $\lambda = \frac{1}{2}$, *d'en* *suivre les principales transformations quand λ varie de o à l'infini.*

I. 1° Les équations d'une génératrice du cône sont

(1) $$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z - \lambda a}{p}.$$

La condition pour que cette droite rencontre le cercle

(2) $$x = a, \qquad y^2 + z^2 = a^2$$

est

(3) $$n^2 a^2 + (pa + \lambda ma)^2 = a^2 m^2.$$

Supprimant le facteur a^2 et éliminant m, n, p entre les équations (1) et (3), homogènes en ces quantités, on a l'équation du cône S

(4) $$y^2 - x^2 + (z - \lambda a + \lambda x)^2 = 0.$$

2° Le conoïde S_1 peut être considéré comme engendré par les génératrices du cône S contenues dans le plan

(5) $$z - \lambda a = 0,$$

lorsque λ varie. Son équation s'obtient donc par l'élimination de λ entre (4) et (5), ce qui donne

(6) $$a^2(y^2 - x^2) + z^2 x^2 = 0.$$

II. Le plan tangent à chacune des surfaces au point dont les coordonnées sont

$$x = a, \qquad y = a\sqrt{1 - \mu^2}, \qquad z = \mu a,$$

passe par la tangente au cercle en ce point. Il a donc une équation de la forme

$$h(x - a) + ay\sqrt{1 - \mu^2} + a\mu z - a^2 = 0.$$

Pour le cône, il doit passer par le point (o, o, λa), ce qui donne

$$-h'a + \lambda\mu a^2 - a^2 = 0,$$

d'où

$$h' = a(\lambda\mu - 1).$$

Pour le conoïde, il doit passer par le point $(0, 0, \mu a)$, ce qui donne

$$-h''a + \mu^2 a^2 - a^2 = 0,$$

d'où

$$h'' = a(\mu^2 - 1).$$

Or, l'angle V des plans

$$h'x + ky + lz + m' = 0$$

et

$$h''x + ky + lz + m'' = 0,$$

est donné par

$$\sin^2 V = \frac{(h'' - h')^2 (k^2 + l^2)}{(h'^2 + k^2 + l^2)(h''^2 + k^2 + l^2)}.$$

Remplaçant h', h'', k, l par leurs valeurs, on a

$$\sin^2 V = \frac{\mu^2(\mu - \lambda)^2}{[(\lambda\mu - 1)^2 + 1][(\mu^2 - 1)^2 + 1]}.$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on a

$$\sin^2 V = \frac{16 \times 3 \times (\sqrt{3} - 1)^2}{[(\sqrt{3} - 4)^2 + 16][(3 - 4)^2 + 16]} = \frac{96(2 - \sqrt{3})}{17(35 - 8\sqrt{3})}.$$

Faisant $\sqrt{3} = 1,7321$, on trouve

$$\sin^2 V = 0,071552,$$

et

$$\sin V = 0,267.$$

III. Considérations générales. — Le cône étant du deuxième ordre et le conoïde du quatrième, leur courbe d'intersection est du huitième ordre. Mais cette courbe comprend :

1° Le cercle donné commun aux deux surfaces;

2° Les génératrices communes obtenues en menant par le sommet du cône un plan parallèle à Oxy.

Le reste de l'intersection sera donc une quartique gauche Γ.

En outre, le plan Oxz étant un plan de symétrie commun pour les deux surfaces le sera pour leur courbe d'intersection, et la projection de cette courbe sur ce plan sera d'un degré moitié moindre.

En résumé, on voit *a priori* que les projections de la courbe d'intersection seront ainsi constituées :

Sur le plan Oxz : 1° la droite sur laquelle se projette le cercle ($x = a$); 2° la droite sur laquelle se projettent les deux génératrices communes ($z = \lambda a$); 3° une conique γ_y, projection de la quartique gauche Γ;

Sur le plan Oyz : 1° la droite double ($z = \lambda a$) sur laquelle se projettent les deux génératrices communes; 2° le cercle ($y^2 + z^2 = a^2$), projection du cercle donné; 3° une quartique γ_x, projection de la quartique gauche Γ;

Sur le plan Oxy : 1° la droite double ($x = a$), projection du cercle donné; 2° les droites $[y^2 = (1 - \lambda^2)x^2]$, projections des génératrices communes; 3° une quartique γ_z, projection de la quartique gauche Γ.

Remarquons que la courbe d'intersection est tout entière comprise, d'une part entre les plans $z = a$ et $z = -a$, tangents au conoïde, d'autre part entre les plans $y = x$, $y = -x$, tangents à la fois aux deux surfaces.

Équations. — Cherchons maintenant les équations de ces diverses projections (¹) :

1° *Sur* Oxz. — Les équations (4) et (6) donnent

(¹) L'énoncé ne demande d'étudier que deux d'entre elles. Comme le choix était arbitraire, on envisage ici les trois. Les deux plus simples, qu'il était tout naturel de choisir, étaient celles sur Oxz, qui s'imposait, et sur Oyz.

immédiatement, par élimination de $y^2 - x^2$,

$$x^2 z^2 = a^2(z + \lambda x - \lambda a)^2,$$

ou

$$xz = \pm a(z + \lambda x - \lambda a).$$

Prenant le signe $+$, on obtient les équations

$$(7) \qquad x - a = 0, \qquad z - \lambda a = 0,$$

déjà prévues. Avec le signe $-$ on a

$$(x + a)z + \lambda a(x - a) = 0,$$

ou

$$(8) \qquad (x + a)(z + \lambda a) - 2\lambda a^2 = 0,$$

hyperbole équilatère (*fig.* 1) dont les asymptotes sont

$$x + a = 0, \qquad z + \lambda a = 0,$$

et qui passe par les points $(o, \lambda a)$ et (a, o), c'est-à-dire par le sommet du cône et le centre du cercle, comme on pouvait aisément le prévoir *a priori*.

La partie utile de cette hyperbole est limitée aux points

$$D\left(x = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}a, \quad z = a\right) \quad \text{et} \quad E\left(x = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}a, \quad z = -a\right).$$

Les tangentes aux divers points C, S, D, E s'obtiennent facilement en doublant les ordonnées des points de contact, comptées sur l'asymptote Ωv. Ceci montre, en particulier, que la tangente en C passe par le point H situé sur la parallèle à Ox menée par S.

2° *Sur* Oyz. — Considérons séparément les projections des parties de l'intersection situées sur chacun des plans (7) et sur le cylindre hyperbolique (8), qu'on peut à volonté combiner, soit avec le cône, soit avec le conoïde.

Ainsi, d'une part, l'élimination de x entre la première équation (7) et l'équation (6), de l'autre la seconde équation (7), donnent

$$y^2 + z^2 - a^2 = 0, \qquad z - \lambda a = 0,$$

équations prévues *a priori*. Il faut noter qu'ici la seconde de ces équations doit être prise comme double, attendu qu'elle représente à la fois les projections des deux génératrices communes.

L'élimination de x entre les équations (6) et (8) donne ensuite

$$(9) \qquad y^2(z + \lambda a)^2 + (z^2 - a^2)(z - \lambda a)^2 = 0,$$

équation de la quartique γ_x.

3° *Sur* Oxy. — La première équation (7) et l'élimination de z entre la seconde équation (7) et l'équation (4) donnent

$$x - a = 0, \qquad y^2 - x^2(1 - \lambda^2) = 0,$$

solutions prévues d'avance. La première de ces équations, qui représente la projection du cercle commun doit être prise comme double, puisque le plan Oxy n'est pas un plan de symétrie pour l'ensemble de la courbe d'intersection.

L'élimination de z entre les équations (6) et (8) donne ensuite

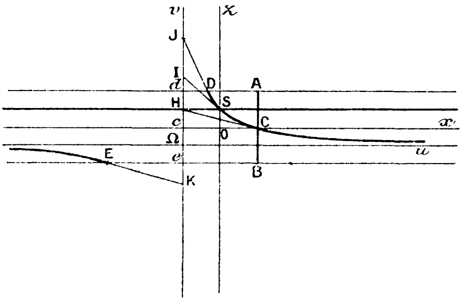
$$(10) \qquad (y^2 - x^2)(x + a)^2 + \lambda^2 x^2 (x - a)^2 = 0.$$

C'est l'équation de la quartique γ_z.

Constructions. — Nous allons construire les diverses projections pour $\lambda = \frac{1}{2}$, mais sans remplacer dans les formules λ par sa valeur numérique, en sorte que tout ce que nous dirons restera vrai *pour* λ *inférieur à* 1 *en valeur absolue*.

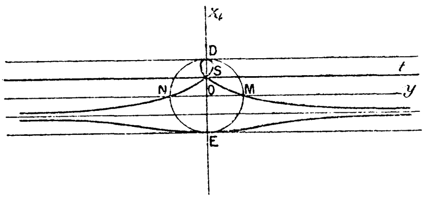
1° *Hyperbole* γ_y (*fig.* 1). — La construction de cette hyperbole résulte des remarques faites ci-dessus sur son équation. Observons que, dans le cas de $\lambda = \frac{1}{2}$, on a $\Omega H = SH$, et, par suite, que le point S est un sommet de l'hyperbole.

Fig. 1.



2° *Quartique* γ_x (*fig.* 2). — C'est une quartique unicursale bicirculaire symétrique par rapport à Oz (¹).

Fig. 2.



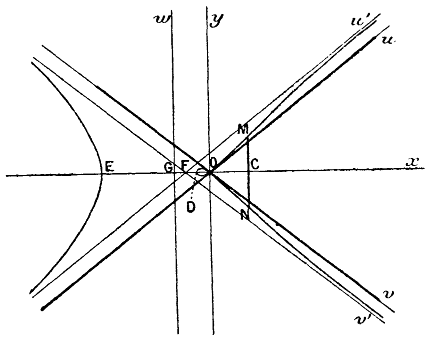
Elle rencontre normalement cet axe aux points D et E ($z = \pm a$) et a en S, projection du sommet du cône, un point double où les coefficients angulaires des tangentes sont $\pm \frac{2\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$. Elle a pour asymptote double la droite $z + \lambda a = 0$ et rencontre l'axe des y aux points M

(¹) Bien que cette courbe rappelle par sa forme générale la *conchoïde de Nicomède*, il ne faut pas la confondre avec celle-ci. Pour la conchoïde de Nicomède l'asymptote double, si l'on conservait les points D, E, S, serait l'axe Oy lui-même.

et N ($y = \pm a$) où les coefficients angulaires des tangentes sont $\mp \frac{\lambda}{2}$.

3° *Quartique* γ_z (*fig.* 3). — Cette quartique, symétrique par rapport à Ox qu'elle coupe normalement en D $\left(x = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} a\right)$ et en E $\left(x = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} a\right)$, a un point double à l'origine où les tangentes ont pour coefficients

Fig. 3.



angulaires $\pm\sqrt{1 - \lambda^2}$. Elle admet une asymptote double à une branche imaginaire ($x + a = 0$) et deux asymptotes simples qui sont les parallèles aux tangentes à l'origine menées par le point F $\left(y = 0,\ x = -\frac{2\lambda^2 a}{1 - \lambda^2}\right)$. Elle est tangente aux bissectrices des angles formés par les axes aux points où elles sont rencontrées par la droite $x = a$, projection du cercle, ce qui était évident *a priori*.

Les projections des génératrices communes coïncident avec les tangentes à l'origine.

Discussion. — I. *Projection sur* Oxz. — Quel que soit λ, la disposition générale de l'hyperbole reste la même. Elle passe constamment au point C et son asymptote cv est fixe. Il n'y a à considérer que les valeurs limites $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$.

Pour $\lambda = 0$, la droite HS coïncide avec Ox, l'hyperbole se réduit aux droites Ox et cv, ce qui était évident *a priori*, car, lorsque le sommet est à l'origine, les deux surfaces ont en commun les bissectrices des angles des axes Ox et Oy, le cercle donné et son symétrique par rapport à O, ce qui donne en projection deux fois l'axe Ox, la droite AB et sa symétrique de par rapport à O.

Pour $\lambda = \infty$, la droite HS est rejetée à l'infini, et l'hyperbole se réduit à la droite AB, déjà comptée une fois, et à la droite de l'infini. Ceci est également évident *a priori*, le cône se réduisant alors à un plan double mené par le cercle.

II. *Projection sur* Oyz. — 1° Pour $\lambda = 0$, la droite double St se confond avec Oy, la quartique se décompose en Oy pris deux fois et le cercle déjà compté une fois. On a donc en tout quatre fois Oy et deux fois le cercle DE, ce qui était évident *a priori*, car, en outre de la remarque déjà faite à propos de la projection sur Oxz, on peut observer que les deux surfaces se raccordant le long des bissectrices des angles que font Ox et Oz, celles-ci doivent être considérées comme des droites doubles de l'intersection.

2° Pour $0 < \lambda < 1$, on a la courbe de la *fig.* 2.

3° Pour $\lambda = 1$, la droite St passe par le point D ; en outre, l'équation (9) se décompose en

$$z + a = 0$$

et

$$y^2(z + a) + (z - a)^3 = 0,$$

cissoïde de Dioclès ayant un point de rebroussement en D où elle est tangente à DE et asymptote à la parallèle à Oy menée par E. La projection comprend donc alors la cissoïde, le cercle, la parallèle à Oy menée par E et la parallèle à Oy menée par D, comptée deux fois.

3° Pour $\lambda > 1$, l'asymptote double étant extérieure à l'intervalle DE correspond à une branche imaginaire. La courbe est fermée. Elle ne cesse d'ailleurs pas de passer par les points M et N ainsi que par les points D et E où ses tangentes sont parallèles à Oy.

4° Pour $\lambda = \infty$, la droite double St est rejetée à l'infini, la courbe (9) devient

$$a^2(y^2 + z^2 - a^2) = 0.$$

On a donc quatre fois la droite à l'infini du plan et deux fois le cercle DE.

III. *Projections sur* Oxy. — 1° Pour $\lambda = 0$, les droites Ou et Ov coïncident avec les bissectrices des angles de Ox et Oy. La courbe (γ) se réduit à

$$(x^2 - y^2)(x + a)^2 = 0,$$

c'est-à-dire aux mêmes bissectrices et à la droite $G\omega$ prise deux fois. Somme toute, on a les droites MN, $G\omega$ et les deux bissectrices prises toutes quatre en double. Cela résultait, *a priori*, des remarques précédentes.

2° Pour $0 < \lambda < 1$, on a la courbe de la *fig.* 3.

3° Pour $\lambda = 1$, les droites Ou et Ov coïncident avec Oy qui compte, dès lors, comme solution double de même que MN. Quant à la quartique, elle se réduit à sa branche de droite qui devient parabolique et présente en O un point de rebroussement avec Ox pour tangente.

4° Pour $\lambda > 1$, les points D et E sont du côté des x positifs, les asymptotes sont devenues imaginaires, ainsi que les droites Ou et Ov. On a une courbe fermée toujours tangente aux bissectrices des angles des axes en M et N.

5° Pour $\lambda = \infty$, l'équation (10) se réduit à

$$x^2(x-a)^2 = 0,$$

ce qui donne l'axe Oy, solution double, et la droite MN comptée deux fois, en outre des deux autres fois où elle intervient en tant que projection du cercle.

Quant aux droites Ou et Ov, elles coïncident alors toutes deux avec Oy.

SOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ EN 1896 AU CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. E. DUPORCQ.

On donne une ellipse E *qui, rapportée à ses axes, a pour équation* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

1° *On considère des ellipses* S *dont les axes coïncident en position avec ceux de l'ellipse* E *et ont* 2A, 2B *pour longueur. Trouver la relation qui doit lier* A, B *pour que l'on puisse inscrire dans* E *une infinité de triangles* PQR *circonscrits à* S *et, dans ces conditions, trouver le lieu des sommets des rectangles formés par les tangentes aux ellipses* S *en leurs sommets. Montrer que, dans ces mêmes conditions, les normales à* E *aux points* P, Q, R *concourent en un point* N.

2° *Examiner si les ellipses* S *obtenues au n°* 1 *représentent toutes les ellipses concentriques à* E, *et telles qu'on puisse inscrire dans* E *une infinité de triangles*

PQR *circonscrits à* S, *les normales à* F *aux points* P, Q, R *étant concourantes.*

3° *Montrer que parmi les ellipses* S, *il y en a pour lesquelles les normales* PN, QN, RN *aux points* P, Q, R *de l'ellipse* E *passent respectivement par les pôles* P′, Q′, R′ *par rapport à* E *des côtés* QR, RP, PQ *du triangle* PQR.

4° S *satisfaisant aux conditions énoncées au n°* 3, *trouver le lieu des centres des cercles conjugués au triangle* P′Q′R′; *l'enveloppe de ces cercles est le lieu des points de rencontre* N *des normales* PN, QN, RN *à l'ellipse* F.

1° Parmi les triangles PQR inscrits à l'ellipse E et circonscrits à l'ellipse S, considérons celui pqr dont un sommet coïncide avec l'une des extrémités p du grand axe de E : le côté qr touche évidemment S en l'un de ses sommets α. Soient q' et r' les points où les côtés pq et pr coupent la tangente menée à S en son sommet α', opposé à α. On sait que

$$\overline{\alpha q}\,\overline{\alpha' q'} = B^2$$

ou

$$\overline{\alpha q}^2 \frac{\overline{p\alpha'}}{\overline{p\alpha}} = B^2,$$

ce qui s'écrit, si le centre O est intérieur au segment $p\alpha$:

$$\left(1 - \frac{A^2}{a^2}\right)\frac{a+A}{a-A} = \frac{B^2}{b^2},$$

et, s'il lui est extérieur,

$$\left(1 + \frac{A^2}{a^2}\right)\frac{a-A}{a+A} = \frac{B^2}{b^2}.$$

Il devra donc y avoir, entre les *longueurs* A et B, une des trois relations suivantes :

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} - 1 = 0,$$

$$\frac{A}{a} - \frac{B}{b} - 1 = 0,$$

$$\frac{A}{a} - \frac{B}{b} + 1 = 0,$$

puisque, A, B, a et b désignant des longueurs, il est impossible que

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + 1 = 0.$$

Si, au contraire, on considère A et B comme les coordonnées d'un des sommets des rectangles construits sur les axes des ellipses S, on voit que le lieu de ces points est constitué par les quatre droites que représentent les équations précédentes : elles forment un parallélogramme dont les sommets coïncident avec ceux de l'ellipse E.

Si l'on fait une transformation homographique telle qu'aux points à l'infini des axes de E correspondent les ombilics du plan, on obtient la propriété suivante :

Étant données deux hyperboles équilatères concentriques H *et* H', *pour qu'il existe une infinité de triangles inscrits à* H *et circonscrits à* H', *il faut et il suffit que les foyers de* H' *soient sur les directrices de* H.

D'une manière générale, soient E et S deux coniques telles qu'il existe une infinité de triangles PQR inscrits à la première et circonscrits à la seconde ; soit Γ la conique conjuguée à la fois à deux de ces triangles PQR et $P_1Q_1R_1$. Il est bien évident que, par polaires réciproques relatives à Γ, les deux coniques E et S se transformeront l'une dans l'autre; il en résulte que le triangle conjugué à la fois à ces deux coniques est aussi conjugué à Γ; par suite, les sommets de ce triangle et ceux du triangle PQR sont sur une même conique, car deux triangles conjugués à une conique ont leurs sommets sur une conique.

Dans le cas particulier de l'énoncé, où E et S ont les mêmes axes, on pourra, par leur centre commun et par les sommets de l'un quelconque des triangles PQR, faire passer une hyperbole équilatère d'asymptotes parallèles aux axes communs; les normales à l'ellipse E aux sommets du triangle PQR seront donc concourantes.

Examinons encore le cas de deux hyperboles équilatères concentriques : on voit que le cercle circonscrit au triangle PQR passe par leur centre commun. D'ailleurs, ce cercle est circonscrit à une infinité de triangles circonscrits à l'hyperbole S : l'un d'eux a pour côtés les deux asymptotes de cette conique; le troisième côté de ce triangle touche S en son milieu, qui est précisément le centre du cercle considéré. L'hyperbole S est donc le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles PQR.

En transformant homographiquement ce dernier résultat, de manière que les points cycliques deviennent les points à l'infini de deux droites rectangulaires, on trouve que les hyperboles d'Apollonius, obtenues dans le cas de l'énoncé, ont leurs centres sur l'ellipse S. Or, si α et β représentent les coordonnées du centre d'une hyperbole d'Apollonius relative à l'ellipse E, les coordonnées du point de concours des normales correspondantes sont

$$\frac{c^2\alpha}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{c^2\beta}{b^2}.$$

De là résulte que le lieu du point N est une ellipse dont l'équation est facile à écrire :

$$\frac{a^4 x^2}{A^2} + \frac{b^4 y^2}{B^2} = c^4.$$

Les sommets des rectangles construits sur les axes de ces ellipses (N) se trouvent sur les côtés du parallélogramme admettant pour sommets les points de rebroussement de la développée E.

2° Toutes les ellipses Σ concentriques à E, et telles qu'on puisse inscrire dans E une infinité de triangles PQR circonscrits à Σ, les normales à E aux points P, Q et R étant concourantes, ont les mêmes axes que E; les points P, Q et R étant, en effet, sur une hyperbole d'Apollonius, il existe une conique Γ conjuguée au triangle PQR et dont les axes coïncident en position avec ceux de E, et Σ n'est autre que la polaire réciproque de E relativement à Γ. Les ellipses S représentent donc toutes les coniques Σ.

3° La droite PP' est évidemment conjuguée harmonique de la tangente en P par rapport aux droites PQ et PR : pour qu'elle coïncide avec la normale PN, il faut et il suffit que les droites PQ et PR soient également inclinées sur cette normale. Par suite, la condition nécessaire et suffisante pour que les droites PP', QQ' et RR' soient les hauteurs du triangle P'Q'R' est que les ellipses E et S soient homofocales. Il existe évidemment deux ellipses S homofocales à E; leurs axes ont pour longueurs les valeurs absolues des racines du système d'équations

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} = 1,$$

$$A^2 - a^2 = B^2 - b^2.$$

4° Soit S_1 l'une de ces deux ellipses; nous avons vu plus haut qu'à chaque ellipse S correspond une ellipse lieu du point N. A l'ellipse S_1 correspondra ainsi une ellipse $(N)_1$. Le point N est le point de concours des hauteurs du triangle P'Q'R'; c'est donc le centre du cercle conjugué à ce triangle. Ce cercle est d'ailleurs harmoniquement circonscrit à l'ellipse E, puisqu'il est conjugué à un triangle circonscrit à cette conique; il coupe donc orthogonalement le cercle orthoptique de E. Ainsi le problème revient à chercher l'enveloppe d'un cercle dont le centre décrit une courbe C et qui a une puissance donnée par rapport à un point fixe O; cette enveloppe est évidemment une courbe anallagmatique par rapport à ce pôle fixe, et le lieu du milieu des segments limités à deux points réciproques de la courbe est la podaire de la courbe C, relativement à O. Si l'on désigne par α et β les axes de l'ellipse $(N)_1$, l'équation de cette enveloppe en coordonnées polaires est évidemment

$$\rho^2 - 2\rho\cos\omega\sqrt{\alpha^2+\beta^2\tang^2\omega} + a^2 + b^2 = 0.$$

En coordonnées cartésiennes, elle s'écrit

$$(x^2+y^2+a^2+b^2)^2 = 4(\alpha^2x^2+\beta^2y^2).$$

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale, par *Maurice d'Ocagne,* Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et fils.

L'Ouvrage publié par M. d'Ocagne est le développement du Cours que l'Auteur professe aux élèves de l'Année préparatoire de l'École des Ponts et Chaussées. Ce Cours comprend toute la partie purement géométrique de l'enseignement théorique donné à ces élèves.

L'auteur, avec raison, a cru nécessaire de séparer complètement ce qui se rattache au mode de représentation des corps géométriques de ce qui a trait à leurs propriétés intrinsèques. De là, dans le Cours, deux grandes divisions auxquelles correspondent dans l'Ouvrage deux Parties distinctes : *Géométrie descriptive* et *Géométrie infinitésimale.*

Le temps strictement limité dont il dispose pour son enseignement oral oblige l'auteur à en bannir tout ce qui n'est pas indispensable aux élèves, qui doivent avant tout être mis en mesure d'effectuer les divers travaux graphiques que comporte leur programme d'études. Dans le livre, il lui était loisible de s'étendre davantage; il en a profité pour essayer de grouper dans un exposé d'ensemble toutes les notions géométriques de nature à intéresser les ingénieurs.

La première Partie de l'Ouvrage (quatre Chapitres) se rapporte à la *Géométrie descriptive;* nous ne nous en occuperons pas ici et nous limiterons notre analyse à la deuxième Partie, qui traite de la *Géométrie infinitésimale.*

Pour bien saisir le plan de l'Auteur, il importe de savoir que les principales questions de la Géométrie infinitésimale sont traitées à l'École des Ponts et Chaussées comme applications du Cours d'Analyse mathématique. Aussi l'Auteur ne s'est-il pas astreint à reprendre par les méthodes de la Géométrie les questions qui, se traitant plus simplement par l'Analyse, sont traditionnellement rattachées à cette science à titre d'applications. Il s'est borné, le cas échéant, à rappeler les résultats ainsi obtenus, s'efforçant, autant que possible, de ne faire intervenir la Géométrie que là où le concours qu'elle prête à l'Analyse — qui reste le moyen le plus puissant d'investigation — comporte des avantages spéciaux. C'est ainsi, par exemple, que chaque fois qu'il s'agit d'obtenir ce qu'on appelle des *constructions,* l'emploi de la Géométrie pure conduit généralement, par des voies plus directes, à des solutions plus élégantes.

L'Auteur s'est proposé, et il faut reconnaître qu'il y a pleinement réussi, de mettre en évidence quelques principes généraux dont les applications découlent ensuite avec facilité. Cette méthode d'exposition l'a conduit à apporter dans les matières qu'il traite une classification plus méthodique que celle qu'on rencontre dans d'autres Ouvrages.

Abordons maintenant, avec quelque détail, l'analyse de la *Géométrie infinitésimale*. Elle s'ouvre par un petit préambule qui a pour but : 1° de donner quelques explications indispensables sur les éléments infinitésimaux envisagés par la suite, de façon à attribuer aux formules infinitésimales obtenues géométriquement la même rigueur qu'à celles auxquelles on est conduit par l'Analyse ; 2° de définir ce qu'on peut entendre par la Géométrie des figures variables, indépendamment de toute idée de déplacement.

Dans le Chapitre V, consacré aux *Courbes planes*, l'Auteur prend comme point de départ certaines formules qui sont empruntées au cours de M. Mannheim, et qui se rattachent à la formule classique donnant la différentielle de la longueur d'un segment de droite, dont les extrémités décrivent des courbes données. Ces formules, envisagées au point de vue défini dans le préambule, sont démontrées avec le souci de l'évaluation rigoureuse de l'ordre des infiniment petits négligés et du signe des éléments qui interviennent. Cette manière de faire conduit, entre autres, à un exposé purement géométrique de la méthode du centre instantané de rotation créée par Chasles. Les nombreuses applications données dans ce Chapitre sont, sauf celle qui concerne les centres de courbure des coniques, extraites des travaux personnels de l'Auteur ; citons : 1° un théorème sur la détermination des normales, généralisant le théorème connu sur la construction des normales aux courbes et aux surfaces définies par une relation entre les distances de chacun de leurs points à des courbes et surfaces fixes; 2° l'étude de l'enveloppe d'une corde d'une courbe vue d'un point fixe sous un angle constant ; 3° les propriétés de l'enveloppe d'une droite dont les distances à une courbe donnée sont liées par une relation; 4° l'étude d'une courbe (courbe adjointe des directions normales) que l'Auteur déduit d'une ligne donnée, de telle façon que les éléments infinitésimaux d'un ordre quelconque de la ligne donnée se déduisent des éléments infinitésimaux d'un ordre moindre de la courbe adjointe. Ce Chapitre se termine par une application cinématique conduisant à la théorie de l'inverseur Peaucellier.

Le Chapitre VI contient la théorie des courbes gauches : plan osculateur, courbure, torsion, sphère osculatrice, avec applications d'abord aux hélices quelconques, puis à l'hélice circulaire; nous signalerons ici une élégante démonstration de ce théorème que la projection oblique de l'hélice circulaire, sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, est une cycloïde ordinaire, allongée ou raccourcie, suivant les cas.

Les propriétés générales des *Surfaces* occupent tout le Chapitre VII. Dans le § 1, qui se rapporte aux plans tangents et aux normales, signalons une démonstration très élémentaire du théorème de Malus. Dans le § 2, l'Auteur étudie les éléments qui se rattachent à la courbure des lignes tracées sur une surface à partir d'un point. Envisageant d'abord le *sens* de la courbure, il introduit la notion de l'indicatrice de Dupin. Il passe ensuite à l'étude de la *grandeur* de la courbure; ce n'est qu'après avoir établi la formule pour une courbe gauche quelconque qu'il ramène la question, par les théorèmes de Meusnier et d'Euler, à la détermination des rayons de courbure principaux et qu'il rattache les variations de la grandeur de la courbure à la considération de l'indicatrice. Il donne, à titre de corollaire, une détermination extrêmement simple du rayon de courbure du contour apparent d'une surface. Ensuite, sont introduites les notions des axes de courbure (avec le théorème de Sturm) et de la déviation (avec les formules de M. J. Bertrand et d'Ossian Bonnet). Il dit enfin quelques mots de la mesure de la courbure de la surface en un point, en signalant même la définition nouvelle proposée par M. Casorati. Dans le § 3, l'Auteur passe aux propriétés relatives aux éléments non plus seulement pris autour d'un point, mais répandus sur toute l'étendue de la surface. Il commence par définir la courbure et la torsion géodésiques en écrivant les formules fondamentales relatives à ce dernier élément, qui sont une conséquence immédiate de celles précédemment démontrées à propos de la déviation. Cela permet d'introduire, par un procédé tout élémentaire, la théorie géométrique des lignes de courbure, fondée sur la considération de la torsion géodésique, et d'établir, d'une façon simple et élégante, le théorème de Dupin sur les systèmes triples de surfaces orthogonales.

L'Auteur passe ensuite aux lignes asymptotiques, qu'il définit comme les lignes dont le plan osculateur est tangent à la surface; le théorème de Meusnier étant illusoire pour ces lignes, l'Auteur donne le théorème de Beltrami pour déterminer la courbure d'une ligne asymptotique; il en détermine également la torsion par un théorème d'Enneper.

Viennent enfin les lignes géodésiques : après avoir démontré leur propriété essentielle et en avoir déduit quelques corollaires propres à faire ressortir la pleine analogie de ces lignes avec les droites d'un plan, l'Auteur dit quelques mots des coordonnées curvilignes afin de pouvoir, en se fondant sur la notion des lignes géodésiques, définir l'applicabilité des surfaces les unes sur les autres. Chemin faisant, il donne, dans un court résumé historique, une idée de l'importante théorie des surfaces minima.

Le Chapitre VIII, qui termine l'Ouvrage, est réservé aux *Surfaces de nature spéciale*. Après un court paragraphe sur les surfaces enveloppes de sphères et plus particulièrement sur les surfaces de révolution, on aborde l'étude des surfaces gauches. Le caractère spécial de cette étude, telle qu'elle est présentée par l'Auteur, tient surtout à la considération du signe du paramètre de distribution, qui permet de donner une entière précision aux tracés que comportent tous les problèmes traités, notamment à ceux dont la solution est fondée sur l'emploi du point représentatif. Pour la construction des plans tangents aux surfaces gauches à plan directeur, l'Auteur a recours à un procédé particulier, dit des *tangentes orthogonales*. L'étude des surfaces gauches à cône directeur de révolution est présentée sous une forme nouvelle, rendue rigoureuse grâce à la considération des signes. Pour les hélicoïdes gauches à noyau cylindrique quelconque, l'Auteur détermine, par des constructions linéaires, l'indicatrice en tout point, ce qui, semble-t-il, n'avait pas encore été fait. L'application des résultats précédents aux hélicoïdes à noyau cylindrique de révolution, et notamment aux surfaces de vis, fait ressortir, en supprimant toute espèce d'aléa dans les tracés, la nécessité qu'il y avait d'introduire la considération du signe dans cette théorie. Enfin le § 3 est consacré aux *Surfaces développables*, qui apparaissent ainsi comme un cas particulier des surfaces réglées, alors qu'on est plutôt dans l'habitude d'en faire l'objet d'une étude à part précédant la théorie générale.

D'après ce résumé, l'Ouvrage de M. d'Ocagne sera consulté avec fruit, non seulement par les Ingénieurs auxquels il fournira des méthodes de construction simples et rigoureuses, mais aussi par les étudiants des Facultés, qui y trouveront de nombreux exercices d'une grande élégance. P. APPELL.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1706.

(1896, p. 55).

Par chaque point M *d'une ellipse, on mène deux droites qui rencontrent le grand axe sous l'angle d'anomalie excentrique relatif au point* M.

Chacune de ces droites enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. (E.-N. BARISIEN).

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Soient t l'angle d'anomalie relatif à M, a et b les demi-axes de l'ellipse. Les deux droites menées de M

$$y\cos t - x\sin t + (a-b)\sin t\cos t = 0,$$
$$y\cos t + x\sin t - (a+b)\sin t\cos t = 0$$

déterminent, par leur rencontre avec les axes quand M se déplace, des segments de longueurs constantes $a-b$ et $a+b$.

On sait que les courbes qu'elles enveloppent sont représentées par les équations

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a-b)^{\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad (a+b)^{\frac{2}{3}},$$

qui représentent aussi deux hypocycloïdes à quatre rebroussements, tracées à l'intérieur des cercles fixes de rayons $a-b$ et $a+b$.

Question 1709.

(1896, p. 56.)

On donne sur un plan les circonférences de cercles C_1, C_2, C_3. *On trace une circonférence* O *tangente à* C_1 *et* C_2. On demande :

1° *Quelle est l'enveloppe de l'axe radical de* C_3 *et de* O, *lorsque cette dernière courbe varie en restant tangente à* C_1 *et* C_2?

2° *Quel est le lieu du point de rencontre de cet axe radical et de la droite qui joint les points de contact de* O *avec* C_1 *et* C_2? (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Cette question, traitée directement, ne serait pas aisée à résoudre. En s'appuyant sur des propriétés connues, elle devient facile.

On sait, en effet, que le lieu des centres des circonférences O tangentes à deux circonférences fixes C_1 et C_2 se compose de deux coniques ayant pour foyers les centres de C_1 et C_2. Quand les cercles C_1 et C_2 sont intérieurs l'un à l'autre, les coniques sont des ellipses ; lorsque les cercles C_1 et C_2 sont extérieurs l'un à l'autre, les coniques sont des hyperboles.

Nous allons donc envisager successivement ces deux cas.

I. — *Les cercles* C_1 *et* C_2 *sont intérieurs l'un à l'autre.*

Admettons que le cercle C_2 soit à l'intérieur du cercle C_1.

Soient R_1, R_2, R_3 les rayons des trois cercles C_1, C_2, C_3 ; ρ le rayon du cercle O.

Le cercle O peut être placé de telle sorte que

$$\overline{OC_1} = R_1 - \rho, \qquad \overline{OC_2} = R_2 + \rho.$$

Alors

$$\overline{OC_1} + \overline{OC_2} = R_1 + R_2.$$

Le cercle O peut être situé de telle façon que

$$\overline{OC_1} = R_1 - \rho, \qquad \overline{OC_2} = \rho - R_2.$$

Alors

$$\overline{OC_1} + \overline{OC_2} = R_1 - R_2.$$

Le point O, centre du cercle O, décrit donc deux ellipses ayant leurs foyers en C_1 et C_2 et dont les grands axes respectifs sont $R_1 + R_2$ et $R_1 - R_2$.

Supposons donc d'abord que le centre O parcoure l'ellipse de grand axe $(R_1 + R_2)$.

Prenons des axes rectangulaires, l'axe des x_1 étant la ligne des centres de C_1 et C_2, et l'origine des coordonnées étant au milieu de C_1C_2.

Désignons par $2c$ la distance des centres C_1, C_2. Les axes $2a$ et $2b$ de l'ellipse en question ont pour expressions

$$(1) \qquad 2a = R_1 + R_2, \qquad 4b^2 = (R_1 + R_2)^2 - 4c^2.$$

Soient (x_1, y_1) les coordonnées de O. Alors

$$(2) \qquad b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2.$$

On a donc

$$(3) \qquad \overline{OC_1} = a + \frac{cx_1}{a}, \qquad \overline{OC_2} = a - \frac{cx_1}{a},$$

et comme $\overline{OC_1} = R_1 - \rho$, il en résulte

$$R_1 - \rho = a + \frac{cx_1}{a},$$

ou

$$(4) \qquad \rho = R_1 - a - \frac{cx_1}{a} = \frac{R_1 - R_2}{2} - \frac{cx_1}{a}.$$

L'équation du cercle O est donc

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \left(\frac{R_1 - R_2}{2} - \frac{cx_1}{a}\right)^2.$$

Cette équation développée devient, en tenant compte des relations (2) et (1),

$$(5) \quad x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 + R_1R_2 - c^2 + (R_1 - R_2)\frac{cx_1}{a} = 0.$$

Si (α, β) sont les coordonnées du centre du cercle C_3, l'équation de ce cercle est

$$(6) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R_3^2 = 0.$$

Alors :

1° L'équation de l'axe radical des cercles (5) et (6) s'écrit, en retranchant (5) et (6), et ordonnant par rapport à x_1 et y_1,

$$(7)\quad \begin{cases} x_1\left[2x-(R_1-R_2)\dfrac{c}{a}\right]+2yy_1-2\alpha x-2\beta y \\ \qquad\qquad +c^2-R_1R_2-R_3^2+\alpha^2+\beta^2=0. \end{cases}$$

On peut poser $x_1=a\cos\varphi$, $y_1=b\sin\varphi$. L'équation (7) est donc de la forme

$$A\cos\varphi+B\sin\varphi+C=0.$$

L'enveloppe d'une telle équation, φ étant le paramètre variable, s'écrit

$$A^2+B^2=C^2.$$

L'enveloppe de l'axe radical (7) est donc la conique

$$(8)\quad \begin{cases} a^2\left[2x-(R_1-R_2)\dfrac{c}{a}\right]^2+4b^2y^2 \\ \quad =(2\alpha x+2\beta y+R_1R_2+R_3^2-c^2-\alpha^2-\beta^2)^2. \end{cases}$$

2° Soient M_1 et M_2 les points de contact respectifs du cercle O avec les cercles C_1 et C_2. On sait que les droites M_1M_2 passent par le centre de similitude interne de C_1 et C_2, ayant pour coordonnées

$$x=\frac{c(R_1-R_2)}{R_1+R_2}=\frac{c(R_1-R_2)}{2a},\qquad y=0.$$

La droite M_1M_2 est perpendiculaire à la tangente à l'ellipse au point O, de sorte que l'équation de M_1M_2 est

$$(9)\qquad y=\left[x-\frac{c}{2a}(R_1-R_2)\right]\frac{a^2y_1}{b^2x_1}.$$

Au moyen de l'angle excentrique φ, les équations (7) et (9) deviennent

$$(10)\quad \begin{cases} a\cos\varphi\left[2x-(R_1-R_2)\dfrac{c}{a}\right] \\ \quad +2by\sin\varphi-2\alpha x-2\beta y \\ \quad +c^2-R_1R_2-R_3^2+\alpha^2+\beta^2=0, \end{cases}$$

$$(11)\qquad \operatorname{tang}\varphi=\frac{2by}{a\left[2x-(R_1-R_2)\dfrac{c}{a}\right]}.$$

En éliminant φ entre (10) et (11), on trouve pour le lieu du point de rencontre de la droite MM' avec l'axe radical (7), la conique (8).

Il en résulte donc que la droite MM' rencontre l'axe radical au point où cette dernière droite touche son enveloppe.

Supposons maintenant que le centre O parcoure l'ellipse de grand axe $(R_1 - R_2)$. Il suffit de changer, dans ce qui a été exposé précédemment, R_2 en $-R_2$. On obtient ainsi la conique

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} & a^2\left[2x - (R_1 + R_2)\frac{c}{a}\right]^2 + 4b^2y^2 \\ & = (2\alpha x + 2\beta y - R_1R_2 + R_3^2 - C^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2, \end{aligned}\right.$$

pour laquelle

$$2a = R_1 - R_2, \qquad 4b^2 = (R_1 - R_2)^2 - 4c^2.$$

Donc, l'enveloppe totale se compose des deux coniques (8) et (12) qui s'écrivent encore

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & [x(R_1 + R_2) - c(R_1 - R_2)]^2 + [(R_1 + R_2)^2 - 4c^2]y^2 \\ & = (2\alpha x + 2\beta y + R_1R_2 + R_3^2 - c^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2, \end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} & [x(R_1 - R_2) - c(R_1 + R_2)]^2 + [(R_1 - R_2)^2 - 4c^2]y^2 \\ & = (2\alpha x + 2\beta y - R_1R_2 + R_3^2 - c^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2. \end{aligned}\right.$$

II. — *Les cercles* C_1 *et* C_2 *sont extérieurs l'un à l'autre.*

Supposons $R_1 > R_2$. En traitant la question de la même manière que dans le cas précédent, on voit que le point O décrit l'une ou l'autre des hyperboles de foyers C_1 et C_2 ayant pour longueurs de l'axe transverse soit $(R_1 - R_2)$, soit $(R_1 + R_2)$.

Dans le cas où l'hyperbole a pour axe transverse $(R_1 - R_2)$, on a

$$2a = R_1 - R_2, \qquad 4b^2 = 4c^2 - (R_1 - R_2)^2.$$

Les coordonnées (x_1, y_1) de O satisfont à l'équation

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2.$$

Alors

$$\overline{OC_1} = \frac{cx_1}{a} + a, \qquad \overline{OC_2} = \frac{cx_1}{a} - a,$$

$$\rho = \frac{cx_1}{a} - \frac{(R_1 + R_2)}{2}.$$

L'équation du cercle O est donc

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \left[\frac{cx_1}{a} - \frac{(R_1 + R_2)}{2}\right]^2.$$

En retranchant cette équation de l'équation (6), on aura, pour l'équation de l'axe radical des cercles O et C_3,

$$x_1\left[2x - \frac{c}{a}(R_1 + R_2)\right] + 2yy_1 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 + c^2 - R_3^2 + R_1R_2 = 0.$$

En posant $x_1 = a \operatorname{séc}\varphi$, $y_1 = b \operatorname{tang}\varphi$, l'équation dont on veut l'enveloppe est de la forme

$$A \operatorname{séc}\varphi + B \operatorname{tang}\varphi = C.$$

L'équation de l'enveloppe est

$$A^2 - B^2 = C^2.$$

L'axe radical de O et C_3 enveloppe donc la conique

$$a^2\left[2x - \frac{c}{a}(R_1 + R_2)\right]^2 - 4b^2y^2 = (2\alpha x + 2\beta y - \alpha^2 - \beta^2 - c^2 + R_3^2 + R_1R_2)^2,$$

ou bien

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &[(R_1 - R_2)x - c(R_1 + R_2)]^2 - [4c^2 - (R_1 - R_2)^2]y^2 \\ &\quad = (2\alpha x + 2\beta y - \alpha^2 - \beta^2 - c^2 + R_3^2 + R_1R_2)^2. \end{aligned}\right.$$

Si le point O parcourt l'hyperbole d'axe transverse $(R_1 + R_2)$, l'axe radical enveloppe alors la conique

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &[(R_1 + R_2)x - c(R_1 - R_2)]^2 - [4c^2 - (R_1 + R_2)^2]y^2 \\ &\quad = (2\alpha x + 2\beta y - \alpha^2 - \beta^2 - c^2 + R_3^2 + R_1R_2)^2. \end{aligned}\right.$$

Il est à remarquer que $2b$ n'est autre chose que la longueur de la tangente commune extérieure aux cercles C_1 et C_2 dans le cas de la conique (15), et la longueur de la tangente commune intérieure dans le cas de la conique (16).

On voit d'ailleurs que la conique (13) est identique à la conique (16); il en est de même de (14) et (15).

Remarques. — 1° Lorsque le rayon R_2 du cercle C_2 devient infini et que ce cercle devient *une droite* Δ, *le lieu des centres* des cercles O tangents à la fois à C_1 et à Δ se compose de deux paraboles. La question peut alors se traiter directement d'une manière analogue à l'analyse précédente. On trouve encore que les axes radicaux de C_3 et O enveloppent deux coniques.

2° On trouverait aussi que, dans le cas tout à fait général de l'énoncé, *le lieu du centre de similitude externe des cercles* O *et* C_3 *se compose de deux coniques; le lieu du centre de similitude interne des mêmes cercles se compose aussi de deux coniques.*

Indication de la solution géométrique (1).

1° Soient Δ_1 et Δ_2 les axes radicaux de C_1 et C_3, d'une part, de C_2 et C_3 d'autre part. Appelons p_1 et p_2 les points de contact respectifs du cercle O avec les cercles C_1 et C_2, a_1 et a_2 les points de rencontre respectifs de Δ_1 et de Δ_2 avec l'axe radical des deux cercles O et C_3. Le point a_1 est le centre radical des trois cercles O, C_1, C_3; pareillement, le point a_2 est le centre radical des trois cercles O, C_2, C_3; enfin, la droite $p_1\,p_2$ passe par l'un des centres de similitude des cercles C_1 et C_2. Il suit de là que si les contacts du cercle O avec C_1 et C_2 sont d'espèce déterminée (interne ou externe), à tout point a_1 correspond une position et une seule de a_2, et inversement. Autrement dit, les points a_1 et a_2 tracent deux divisions homographiques sur Δ_1 et sur Δ_2; donc la droite $a_1\,a_2$ enveloppe une conique. L'enveloppe demandée est donc un système de deux coniques, dont l'une correspond au cas où les contacts sont de même espèce, et l'autre, au cas où les contacts sont d'espèces différentes.

2° Soient O et O_1 deux positions infiniment voisines du cercle mobile, I le point de rencontre des axes radicaux de chacun de ces cercles et du cercle C_3. La position limite du point I est le point de contact de $a_1\,a_2$ avec son enveloppe. Or, le point I est le centre radical des trois circonférences O, O_1, C_3; il est donc sur l'axe radical de O et de O_1. D'autre part, si la circonférence O_1 se rapproche indéfiniment de la circonférence O, supposée fixe, l'axe radical des circonférences O et O_1 a pour limite la ligne $p_1\,p_2$. Il en résulte que le point I a pour position limite l'intersection de p_1p_2 avec a_1a_2 et, par conséquent, que le second lieu coïncide avec l'enveloppe des axes radicaux. X. A.

QUESTIONS.

1751. Si l'on désigne par A_{ik} et B_{ik} les mineurs des déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

chacune des relations

$$\begin{vmatrix} a_{12}b_{13}-a_{13}b_{12} & a_{13}b_{11}-a_{11}b_{13} & a_{11}b_{12}-a_{12}b_{11} \\ a_{22}b_{23}-a_{23}b_{22} & a_{23}b_{21}-a_{21}b_{23} & a_{21}b_{22}-a_{22}b_{21} \\ a_{32}b_{33}-a_{33}b_{32} & a_{33}b_{31}-a_{31}b_{33} & a_{31}b_{32}-a_{32}b_{31} \end{vmatrix} = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} A_{12}B_{13}-A_{13}B_{12} & A_{13}B_{11}-A_{11}B_{13} & A_{11}B_{12}-A_{12}B_{11} \\ A_{22}B_{23}-A_{23}B_{22} & A_{23}B_{21}-A_{21}B_{23} & A_{21}B_{22}-A_{22}B_{21} \\ A_{32}B_{33}-A_{33}B_{32} & A_{33}B_{31}-A_{31}B_{33} & A_{31}B_{32}-A_{32}B_{31} \end{vmatrix} \equiv 0$$

est la conséquence de l'autre. (D. Arany.)

1752. Démontrer que toute équation différentielle de la forme

$$f\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2}, x\frac{dy}{dx}, y\right) = 0,$$

où f désigne une fonction *homogène* de trois variables, peut s'intégrer au moyen de deux quadratures.

Appliquer à l'exemple suivant :

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - ay\frac{dy}{dx} = 0,$$

où a désigne une constante. (C. Bourlet.)

1753. Le lieu des pôles des spirales logarithmiques osculatrices aux diverses sections ayant même tangente en un point M d'une surface est une conique. (A. Pellet.)

LISTE DES QUESTIONS DES « NOUVELLES ANNALES »

RESTÉES SANS SOLUTION AU 31 DÉCEMBRE 1896 (1).

41	496	693	868	1008	1359	1447	1539	1631	1692
48	512	703	880	1013	1361	1448	1540	1632	1693
62	513	718	882	1015	1363	1471	1546	1633	1694
126	516	724	884	1035	1364	1479	1548	1634	1695
156	525	729	885	1042	1365	1483	1549	1647	1697
176	528	730	888	1058	1366	1485	1551	1652	1704
187	546	731	891	1063	1371	1486	1552	1655	1705
193	549	732	892	1074	1376	1490	1564	1656	1710
199	554	772	893	1078	1390	1491	1571	1657	1715
243	573	774	909	1092	1392	1502	1576	1660	1721
261	583	798	918	1105	1393	1503	1579	1661	1730
266	585	804	919	1107	1394	1505	1580	1662	1731
324	589	805	920	1108	1402	1508	1582	1664	1733
333	592	812	921	1149	1403	1510	1585	1672	1738
341	593	815	929	1206	1416	1511	1588	1676	1742
360	596	820	937	1234	1435	1513	1596	1677	1745
383	597	821	938	1236	1438	1519	1599	1678	1747
400	598	829	947	1246	1439	1522	1600	1680	1749
414	604	831	952	1256	1440	1523	1609	1685	1750
424	606	846	967	1298	1441	1527	1614	1686	1751
434	607	848	989	1305	1442	1528	1616	1687	1752
439	617	851	999	1307	1443	1529	1617	1688	1753
448	625	852	1000	1310	1444	1530	1628	1689	
480	643	859	1004	1321	1445	1531	1629	1690	
495	666	861	1007	1355	1446	1532	1630	1691	

(1) Les lecteurs sont invités à signaler les erreurs qui auraient pu se glisser dans ce relevé, malgré l'attention avec laquelle on l'a établi. La Rédaction les remercie à l'avance des communications qu'ils voudront bien lui faire à ce sujet.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME XV, 3e SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

A. — Algèbre élémentaire ; théorie des équations algébriques et transcendantes ; groupes de Galois ; fractions rationnelles ; interpolation.

B. — Déterminants ; substitutions linéaires ; élimination ; théorie algébrique des formes ; invariants et covariants ; quaternions ; équipollences et quantités complexes.

C. — Principes du Calcul différentiel et intégral ; applications analytiques ; quadratures ; intégrales multiples ; déterminants fonctionnels ; formes différentielles ; opérateurs différentiels.

D. — Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires ; séries et développements définis, comprenant en particulier les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique ; nombres de ernoulli ; fonctions sphériques et analogues.

E. — Intégrales définies, et en particulier intégrales eulériennes.

F. — Fonctions elliptiques avec leurs applications.

H. — Équations différentielles et aux différences partielles ; équations fonctionnelles ; équations aux différences finies ; suites récurrentes.

I. — Arithmétique et théorie des nombres ; analyse indéterminée ; théorie arithmétique des formes et des fractions continues ; division du cercle ; nombres complexes, idéaux, transcendants.

K. — Géométrie et Trigonométrie élémentaires (étude des figures formées de droites, plans, cercles et sphères) ; Géométrie du point, de la droite, du plan, du cercle et de la sphère ; Géométrie descriptive ; perspective.

L¹. — Coniques.

L². — Quadriques.

M¹. — Courbes planes algébriques.

M^2. — Surfaces algébriques.

M^3. — Courbes gauches algébriques.

O. — Géométrie infinitésimale et Géométrie cinématique ; applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes et des surfaces ; quadrature et rectification ; courbure ; lignes asymptotiques, géodésiques ; lignes de courbure ; aires ; volumes ; surfaces minima ; systèmes orthogonaux.

P. — Transformations géométriques ; homographie ; homologie et affinité ; corrélation et polaires réciproques ; inversions ; transformations birationnelles et autres.

R. — Mécanique générale ; Cinématique ; Statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie ; Dynamique ; Mécanique des solides ; frottement ; attraction des ellipsoïdes.

U. — Astronomie. Mécanique céleste et Géodésie.

V. — Philosophie et histoire des Sciences mathématiques. Biographies de mathématiciens.

Licence ès Sciences mathématiques.

Questions de concours.

Correspondance.

Bibliographie.

Variétés.

Divers.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS
(TOME XV, 3e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

22854 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS quai des Grands-Augustins, 55.