NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Exercices. Questions résolues

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. S1-S40 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__S1_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EXERCICES.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1257

Étant donné dans un plan un pentagone convexe quelconque ABCDE, *chaque système de trois côtés consécutifs forme un triangle. Démontrer que les cinq circonférences circonscrites à ces triangles déterminent par leurs intersections cinq points situés sur une même circonférence.*

SOLUTION

Par M. Paul Terrier.

Cette question a été posée et résolue, il y a bien des années, par M. Auguste Miquel (voir Catalan, *Théorèmes et problèmes,* 5e édition, p. 118, et Salmon, *Géométrie analytique,* p. 341). En voici une solution fort différente.

Soient ABd, BCe, CDa, DEb, EAc les triangles construits dans les conditions énoncées [1]; d_1, e_1, a_1, b_1, c_1 les centres des circonférences respectivement circonscrites à ces triangles; b_0, c_0, d_0, e_0, a_0 les points, autres que les sommets du pentagone, où se coupent respectivement les couples de circonférences d_1 et e_1, e_1 et a_1, a_1 et b_1, etc.; soient enfin A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 les centres des circonférences circonscrites aux cinq triangles bAe, cBa, dCb, eDc, aEd, formés par deux côtés consécutifs du pentagone et par le côté opposé au sommet où se coupent les deux premiers côtés.

Les cinq côtés du pentagone, pris quatre à quatre, déterminent cinq quadrilatères complets, dans chacun desquels les quatre côtés, pris trois à trois, déterminent à leur tour quatre triangles. Le quadrilatère cBCD, par exemple, comprend les triangles inscrits aux circonférences B_1, D_1, e_1, a_1, et l'on sait

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

que ces quatre circonférences se coupent au point c_0, déjà déterminé par l'intersection de deux d'entre elles, e_1 et a_1. De même, les circonférences B_1, E_1, a_1, c_1 se coupent au point a_0, et ainsi de suite.

Cela posé, on a successivement, pour les quadrilatères inscriptibles :

$$\begin{aligned} c_0 a_0 e_0 &= c_0 a_0 c - e_0 a_0 c \\ &= 2^{\text{dr}} - c_0 ac - (2^{dr} - e_0 \text{E} c) (\text{circonférences } \text{A}_1 \text{ et } c_1) \\ &= 2^{\text{dr}} - c_0 d_0 \text{D} - e_0 d_0 \text{D} \; (\text{circonférences } a_1 \text{ et } d_1) \\ &= 2^{\text{dr}} - c_0 d_0 e_0. \end{aligned}$$

Les angles $c_0 a_0 e_0$, $c_0 d_0 e_0$ étant supplémentaires, il en résulte que les points a_0, c_0, d_0, e_0 sont sur une circonférence O qui, pour les mêmes raisons, contient aussi le point b_0. La proposition est donc démontrée.

On voit de plus que la propriété énoncée appartient, non seulement aux circonférences a_1, b_1, ..., circonscrites aux cinq triangles formés par trois côtés consécutifs du pentagone donné, mais encore *aux cinq circonférences* A_1, B_1, ..., *circonscrites aux triangles formés par trois côtés consécutifs du pentagone étoilé adbec.*

On sait d'ailleurs que le point de commune intersection des quatre circonférences circonscrites aux quatre triangles formés par les côtés d'un quadrilatère, pris trois à trois, est le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère et que les centres de ces quatre circonférences sont eux-mêmes sur une cinquième circonférence passant aussi par le foyer (¹). Si nous désignons par α, β, ..., ε les centres des cinq circonférences de cette dernière espèce relatives aux cinq quadrilatères $B_1 E_1 c_1 d_1$, $A_1 C_1 d_1 e_1$, ..., $A_1 D_1 b_1 c_1$, nous arrivons à voir que chacun des points tels que a_0 est le point d'intersection, *non seulement des trois circonférences indiquées dans l'énoncé de la question* 1257 (c_1, d_1 et O), *mais encore de trois autres circonférences* (B_1, E_1, α).

Le même énoncé peut d'ailleurs, d'après ce qui précède, être remplacé par cet autre plus général :

Les cinq paraboles inscrites aux quadrilatères formés

(¹) Voir *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 111; 1876.

par les côtés d'un pentagone, pris quatre à quatre, ont leurs foyers distribués sur une circonférence.

En se fondant sur les propriétés que nous venons de rappeler, et par la seule considération d'une suite de quadrilatères inscrits dans les diverses circonférences de la figure, on arrive à démontrer cette nouvelle et intéressante proposition :

Les centres des dix circonférences C *circonscrites aux dix triangles formés par les côtés d'un pentagone, pris trois à trois, sont distribués quatre à quatre sur cinq circonférences* C_1, *qui passent respectivement aux foyers des cinq paraboles inscrites aux quadrilatères formés par les côtés du pentagone pris quatre à quatre. Les circonférences* C_1 *ont elles-mêmes leurs centres sur une circonférence* ω *et elles coupent toutes la circonférence* O, *qui contient les foyers des cinq paraboles, en un même point* M, *situé sur la ligne des centres* ωO.

Lorsque deux côtés du pentagone sont parallèles entre eux, on vérifie les particularités suivantes :

Trois des dix circonférences C ont leurs centres à l'infini et se confondent respectivement avec les côtés non parallèles du pentagone. Une quatrième circonférence C (celle qui contient le sommet du pentagone par lequel ne passe aucun des deux côtés parallèles) se confond avec la circonférence O des foyers. Deux des circonférences C_1 ont leurs centres à distance finie et se coupent au point M sur la circonférence O. Les trois autres ont leurs centres à l'infini et se réduisent à trois droites qui partent des sommets du triangle formé par les côtés non parallèles du pentagone et qui concourent au point M. La circonférence ω a son centre à l'infini et se réduit à une droite perpendiculaire sur OM en son milieu.

On déduit immédiatement cette proposition restreinte :

Les côtés d'un triangle T, *pris deux à deux, forment avec deux transversales parallèles quelconques deux groupes de trois triangles inscrits dans des circonférences dont les centres sont les sommets de deux nouveaux triangles t. Les triangles t sont homologiques entre eux et homologiques à* T, *par rapport à un centre* M, *situé sur la circonférence* O *circonscrite à* T; *ils sont, de plus, respec-*

tivement inscrits dans deux circonférences qui passent par le centre d'homologie M *et par le centre* O.

Le point M est le foyer d'une parabole inscrite au triangle donné et dont l'axe est perpendiculaire à la direction des transversales.

Enfin, lorsque le pentagone a quatre côtés parallèles deux à deux, c'est-à-dire lorsqu'il est formé d'un parallélogramme écorné par une transversale quelconque, on a les résultats suivants :

Quatre des dix circonférences C se confondent respectivement avec les quatre côtés parallèles deux à deux; deux autres avec le cinquième côté isolé du pentagone. Les quatre dernières ont leurs centres à distance finie, et chacune d'elles est tangente à deux des trois autres.

Quatre foyers sur cinq sont alignés sur le côté isolé du pentagone, aux points de contact des quatre circonférences C, deux à deux ; le cinquième foyer, dépendant du sommet du pentagone, opposé au côté isolé est à l'infini, en sorte que le centre de la circonférence O est aussi à l'infini.

La circonférence C_1, relative au dernier sommet considéré, est tout entière à l'infini. Il en est de même du point de commune intersection M et de la circonférence ω tout entière.

Les quatre autres circonférences C_1 ont leurs centres à l'infini et se résolvent en quatre droites qui sont les côtés d'un nouveau parallélogramme ayant même côté isolé que le parallélogramme donné. En opérant sur ce parallélogramme comme sur le précédent, et de même sur les suivants, on obtiendrait une série de pentagones ayant un côté commun, et les quatre autres côtés parallèles entre eux deux à deux. Dans chacun de ces pentagones, l'angle opposé au côté isolé est double de ce qu'il était dans le pentagone précédent et la limite de ces figures pentagonales transformées est le côté isolé commun à toutes.

Quand le pentagone donné est inscrit dans une circonférence π, l'axe radical AB des circonférences π et d_1 et l'axe radical $a_0 b_0$ des circonférences O et d_1 se coupent sur l'axe radical RS des circonférences π et O ; BC et $b_0 c_0$ se coupent pareillement sur RS et ainsi de suite. Donc :

Les côtés d'un pentagone A, *inscrit dans une circonférence, sont coupés respectivement en cinq points d'une* *même droite par les côtés correspondants du pentagone a_0, qui a pour sommets les foyers des paraboles inscrites aux cinq quadrilatères formés par les côtés du pentagone* A, *pris quatre à quatre.*

Note. — MM. Lez et F. Pisani ont aussi résolu la question.

Question 1266.

Si, par le pôle de l'orthogénide

$$\rho^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} \sin\left(-\tfrac{1}{3}\omega\right),$$

on mène une droite quelconque, les tangentes aux points d'intersection de cette droite avec l'orthogénide forment un triangle équilatéral. Trouver le lieu du centre de ce triangle et l'enveloppe du cercle circonscrit, lorsque la droite oscille autour du pôle. (E. Lucas.)

SOLUTION.

Par M. E. Fauquembergue.

La courbe, représentée par l'équation ci-dessus, est la caustique par réflexion de la parabole, pour des rayons incidents perpendiculaires à l'axe. MM. Barbier et Lucas en ont fait une étude détaillée dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. V, p. 27 et suiv.).

Elle rentre dans une famille de courbes remarquables dont l'équation est

$$\rho^n = \mathrm{A} \sin n\omega.$$

M. Haton de la Goupillière, qui a proposé de leur donner le nom de *spirales sinusoïdes,* a résumé les nombreuses propriétés de ces courbes dans un intéressant article, inséré dans ee même Recueil (2e série, t. XV, p. 97 et suiv.).

Nous rappellerons les deux suivantes :

1° L'angle de la tangente avec le rayon vecteur est égal à n fois l'inclinaison de ce dernier sur l'axe polaire;

2° L'angle des tangentes menées aux extrémités de deux rayons vecteurs quelconques est égal à $(n+1)$ fois celui de ces rayons.

On déduit immédiatement de là que, dans l'orthogénide, les tangentes aux trois intersections par un même rayon focal forment toujours un triangle équilatéral.

La première de ces propriétés donne un moyen rapide d'écrire les équations des trois tangentes. On peut aussi employer l'équation générale de la tangente à la courbe dont l'équation est mise sous la forme $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$, savoir :

$$\frac{1}{P} = f(\omega)\cos(\Omega - \omega) + f'(\omega)\sin(\Omega - \omega).$$

On observera que, pour une même valeur de l'angle polaire, les trois valeurs de $\frac{1}{\rho}$ sont

$$-\frac{1}{a}\sin^3\frac{\omega}{3}, \quad -\frac{1}{a}\sin^3\left(\frac{\omega}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad -\frac{1}{a}\sin^3\left(\frac{\omega}{3} + \frac{4\pi}{3}\right).$$

En prenant pour axe des X l'axe polaire, on trouvera aisément, d'après les remarques précédentes, que les équations des trois tangentes sont :

$$L_K \equiv X\sin 2(\varphi + K\alpha) - Y\cos 2(\varphi + K\alpha) - a\,\mathrm{coséc}^2(\varphi + K\alpha) = 0,$$
$$(K = 0, 1, 2),$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{\omega}{3} = \varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{3} = \alpha.$$

Si l'on ne cherchait que le lieu du centre du triangle, le procédé le plus simple serait, peut-être, d'éliminer φ entre les équations de deux bissectrices

$$L_3 - L_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad L_3 - L_2 = 0.$$

Mais, comme nous aurons besoin de l'équation du cercle circonscrit, nous allons la former.

Le triangle étant équilatéral, l'équation générale du cercle circonscrit se simplifie et devient

$$U \equiv L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1 = 0.$$

En vertu de l'identité

$$(\Sigma L_1)^2 = \Sigma L_1^2 + 2\Sigma L_1 L_2,$$

on peut remplacer l'équation précédente par celle-ci :

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 - (L_1 + L_2 + L_3)^2 = 0.$$

Les calculs sont alors plus symétriques. Ils sont suffisamment simples, parce que l'on a à opérer sur des lignes trigonométriques d'angles en progression arithmétique.

Toutes réductions [1] faites, on trouve, pour l'équation du cercle,

$$X^2 + Y^2 - 8aX\cot\omega + 4aY(3\cot^2\omega + 1) - 32a^2\operatorname{coséc}^2\omega = 0,$$

ou, en désignant $\cot\omega$ par λ et ordonnant,

$$(1)\quad 4a(3Y - 8a)\lambda^2 - 8aX\lambda + X^2 + (Y + 8a)(Y - 4a) = 0.$$

Les équations du centre sont

$$X = 4a\lambda \qquad \text{et} \qquad Y = -2a(3\lambda^2 + 1).$$

L'élimination de λ donne

$$X^2 = -\frac{8a}{3}(Y + 2a).$$

Le lieu du centre est donc une parabole dont l'axe se confond avec l'axe des Y.

Le paramètre variable λ, entrant au second degré dans l'équation (1), on aura l'enveloppe du cercle en écrivant que l'équation a ses deux racines égales.

L'équation que l'on obtient ainsi peut se mettre sous la forme

$$(Y - 4a)(3X^2 + 3Y^2 + 16aY - 64a^2) = 0.$$

Elle se décompose en deux autres,

$$Y = 4a$$

---

[1] Les simplifications résultent des relations suivantes, qui sont des conséquences de formules connues :

$$\sum_{k=0}^{k=2}\sin 2(\varphi + k\alpha) = \sum_{k=0}^{k=2}\cos 2(\varphi + k\alpha) = 0;$$

$$\sum_{k=0}^{k=2}\sin^2 2(\varphi + k\alpha) = \sum_{k=0}^{k=2}\cos^2 2(\varphi + k\alpha) = \tfrac{3}{2};$$

$$\sum_{k=0}^{k=2}\cot(\varphi + k\alpha) = 3\cot 3\varphi; \qquad \sum_{k=0}^{k=2}\cot^2(\varphi + k\alpha) = 9\cot^2 3\varphi + 6;$$

$$4\sin\varphi\sin(\varphi + \alpha)\sin(\varphi + 2\alpha) = \sin 3\varphi.$$

et

$$3(X^2 + Y^2) + 16aY - 64a^2 = 0,$$

ou

$$X^2 + \left(Y + \frac{8a}{3}\right)^2 = \left(\frac{16a}{3}\right)^2.$$

Le cercle variable reste donc constamment tangent à la droite $y = 4a$, parallèle à l'axe des X et à un cercle ayant son centre sur l'axe des Y.

Nota. — M. Moret-Blanc a aussi résolu la question.

Question 1267.

On donne une circonférence dont le centre est O, *et une droite* α. *On a, sur cette droite, deux divisions homographiques, dont* A *et* A' *sont deux points correspondants. Par* A *et* A' *on mène des tangentes à la circonférence; elles se coupent en quatre points dont on demande le lieu géométrique.*

Construire la courbe dans le cas particulier où le pied de la perpendiculaire abaissée du point O *sur la droite* α *est le point milieu des deux point doubles imaginaires des divisions homographiques. Cas particulier où les divisions sont en involution et ont leurs points doubles imaginaires.*

(Ed. Dewulf.)

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Soit D une droite quelconque. A chaque point A correspond un point A', deux tangentes issues de A, qui coupent la droite D en deux points m_1, m_2, et deux droites issues de A', qui la coupent aux points n_1, n_2.

En vertu du principe de correspondance, il y aura sur la droite D quatre points de coïncidence d'un point m avec un point n, et, par conséquent, quatre points du lieu; ce lieu est donc une courbe du quatrième ordre.

Si les divisions sont en involution, un point de coïncidence se reproduira quand on permutera A et A' : les quatre points de coïncidence se réduiront à deux, et le lieu sera une conique.

Soit OC la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite α. Si C est le point milieu des deux points doubles imaginaires des divisions homographiques, C′ le point de la seconde division qui correspond au point C de la première et I le point de la première qui correspond à l'infini de la seconde, on sait qu'il existe sur OC, de part et d'autre du point C, un point P tel que

$$CP = \sqrt{CI.CC'},$$

d'où l'on voit chaque segment AA′ sous un angle constant. Soit

$$CA.CA' + a(CA - CA') + c^2 = 0$$

la relation d'homographie, a et c étant des constantes données.

En faisant $CA' = \infty$, on a

$$CI = a,$$

et en faisant $CA = 0$, on a

$$CC' = \frac{c^2}{a},$$

d'où

$$CP = c.$$

Les divisions homographiques seront déterminées par l'angle constant CPC′ tournant autour du point P. On facilitera la construction en décrivant une circonférence du point P comme centre, sur laquelle il suffira de prendre un arc égal à celui qui est intercepté par CPC′ pour avoir les directions de PA et PA′.

On voit que la ligne OC sera un axe de symétrie du lieu cherché, de sorte que chaque couple de points A, A′ donnera huit points du lieu.

On obtiendra les points situés sur l'axe en plaçant l'angle APA′, de manière que PO soit sa bissectrice : on voit qu'il n'y a sur l'axe que deux points réels.

Si, le point C étant le point milieu des deux points doubles imaginaires, les divisions homographiques sont en involution, les segments AA′ seront vus du point P sous un angle droit; le lieu cherché sera une conique dont OC sera un axe de symétrie.

Nota. — La même question a été résolue par M. F. Pisani.

Question 1277.

Soient (C) *et* (C_1) *deux courbes planes qu'une droite mobile rencontre sous des angles constants* μ *et* μ_1. *Pour que ces deux courbes soient semblables, il faut qu'elles soient deux* spirales logarithmiques *semblables par rapport au point asymptotique, et tournées autour de ce point, l'une relativement à l'autre, d'un angle égal à la différence des angles de rencontre* μ *et* μ_1.

Remarquer le cas de deux courbes semblables, mais quelconques, tournées l'une relativement à l'autre d'un certain angle, autour du pôle de similitude.

Point de contact de la droite mobile avec son enveloppe, dans les deux cas. (ÉDOUARD HABICH.)

SOLUTION

Par M. MORET-BLANC.

Deux courbes semblables peuvent être considérées comme résultant de deux courbes homothétiques, dont on a fait tourner l'une d'elles d'un certain angle autour du pôle de similitude.

Cela posé, je suppose que le mouvement de la droite soit déterminé par la condition de joindre deux points homologues. Soient m et m_1 deux de ces points et O le pôle de similitude : le triangle mOm_1, ayant un angle constant compris entre deux côtés proportionnels, reste toujours semblable à lui-même, et, par conséquent, la droite mm_1 fait, avec les rayons vecteurs Om, Om_1, des angles constants dont la différence est mOm_1. Si donc cette droite fait avec les tangentes en m et m_1 des angles constants μ et μ_1, l'angle de la tangente avec le rayon vecteur sera aussi constant; d'ailleurs ces angles sont égaux par suite de la similitude des courbes : donc les courbes sont *deux spirales logarithmiques* semblables, dont l'une a tourné autour du pôle asymptotique commun d'un angle égal à

$$\pm(\mu - \mu_1).$$

Dans le cas de deux courbes semblables, mais quelconques, les angles μ et μ_1 peuvent varier, mais leur différence reste constante et égale à l'angle mOm_1 des rayons vecteurs homologues :

1° Il résulte de ce qui précède que l'enveloppe de la droite mobile peut être considérée comme celle d'une droite passant par les points m de la première courbe et faisant avec le rayon vecteur Om un angle constant λ. Soit

$$r = f(\theta)$$

l'équation de la courbe lieu du point m. Appelons p la longueur de la perpendiculaire abaissée du pôle sur mm_1 et α l'angle qu'elle fait avec l'axe polaire, ρ et ω les coordonnées polaires d'un point de mm_1. On a

$$\alpha = \theta - \left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \theta + \lambda - \frac{\pi}{2},$$

$$p = r \sin\lambda = \rho \cos(\omega - \alpha) = \rho \sin(\theta + \lambda - \omega),$$

ou

$$(1) \qquad \sin\lambda f(\theta) = \rho \sin(\theta + \lambda - \omega) \qquad \text{équat. de } mm_1,$$

et, en différentiant par rapport à θ,

$$(2) \qquad \sin\lambda f(\theta) = \rho \cos(\theta + \lambda - \omega).$$

θ étant connu, ces deux équations déterminent les coordonnées ρ et ω du point de contact de la droite mm_1 avec son enveloppe.

Dans le cas où les courbes semblables sont des spirales logarithmiques, on a

$$r = ae^{m\theta},$$

$$\sin\lambda . ae^{m\theta} = \rho \sin(\theta + \lambda - \omega),$$

$$\sin\lambda . mae^{m\theta} = \rho \cos(\theta + \lambda - \omega),$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}(\theta + \lambda - \omega) = \frac{1}{m} = \operatorname{tang}\nu \qquad (\nu \text{ angle de la spirale}),$$

$$\omega - \theta = \lambda - \nu \qquad (\text{valeur constante}),$$

$$\rho = \sqrt{1 + m^2}\, ae^{m\theta}.$$

Ces deux formules montrent que l'enveloppe est une spirale logarithmique semblable aux proposées.

Question 1287.

Soient A *et* B *les extrémités de deux rayons conjugués variables d'une ellipse; trouver l'enveloppe des cercles décrits sur* AB *comme diamètre.* (Barbarin.)

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de l'ellipse, $a\cos\varphi$ et $b\sin\varphi$ les coordonnées du point A, $-a\sin\varphi$ et $b\cos\varphi$ celles du point B.

L'équation de la circonférence décrite sur AB comme diamètre sera

$$\left[x - \frac{a(\cos\varphi - \sin\varphi)}{2}\right]^2 + \left[y - \frac{b(\cos\varphi + \sin\varphi)}{2}\right]^2 = \frac{a^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2}{4} + \frac{b^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}{4},$$

ou, en développant et réduisant,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &x^2 + y^2 - (ax + by)\cos\varphi + (ax - by)\sin\varphi \\ &\quad = (a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned}\right.$$

On obtiendra l'équation de l'enveloppe en éliminant l'angle φ entre cette équation et sa dérivée par rapport à φ,

$$(2)\quad (ax + by)\sin\varphi + (ax - by)\cos\varphi = c^2(1 - 2\sin^2\varphi),$$

au moyen de la relation

$$(3)\qquad \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$$

Si l'on tire de l'équation (1) la valeur de $\cos\varphi$ pour la reporter dans les équations (2) et (3), il vient, après une première réduction,

$$(4)\quad \left\{ 2c^4\sin^3\varphi + 3c^2(ax+by)\sin^2\varphi + \left.\begin{matrix} 2(a^2x^2+b^2y^2) \\ -c^4 \end{matrix}\right| \sin\varphi + \left.\begin{matrix} (x^2+y^2)(ax+by) \\ -c^2(ax+by) \end{matrix}\right| = 0, \right.$$

$$(5)\quad \left\{ c^2(ax+by)\sin^3\varphi + \left.\begin{matrix} 2(a^2x^2+b^2y^2) \\ -c^4 \end{matrix}\right| \sin^2\varphi + \left.\begin{matrix} 3(x^2+y^2)(ax-by) \\ -3c^2(ax+by) \end{matrix}\right| \sin\varphi + \left.\begin{matrix} 2(x^2+y^2)^2 \\ -2(ax+by)^2 \end{matrix}\right| = 0. \right.$$

Si, pour abréger l'écriture, on représente ces équations par

$$A\sin^3\varphi + B\sin^2\varphi + C\sin\varphi + D = 0,$$
$$A'\sin^3\varphi + B'\sin^2\varphi + C'\sin\varphi + D' = 0.$$

l'équation résultante, mise sous forme de déterminant, sera

$$\begin{vmatrix} AB'-BA' & AC'-CA' & AD'-DA' \\ AC'-CA' & (BC'-CB')+(AD'-DA') & BD'-DB' \\ AD'-DA' & BD'-DB' & CD'-DC' \end{vmatrix} = 0,$$

équation du douzième degré.

Question 1309.

On donne deux coniques A, B *et un point* S *dans un plan. Par ce dernier on tire une droite quelconque et l'on prend son pôle* a *par rapport à la conique* A. *On joint* Sa *et l'on prend son pôle* b *par rapport à* B; *on tire* Sb *et l'on prend son pôle* a_1 *par rapport à* A, *et ainsi de suite indéfiniment.*

Démontrer que :

1° *Quatre droites consécutives quelconques des faisceaux* S, a, a_1, a_2, ... *et* S, b, b_1, b_2, ... *ont des rapports anharmoniques constants;*

2° *Donner l'expression d'un de ces rapports;*

3° *Si ce procédé est épuisé à la cinquième ligne, en d'autres termes, si* Sb_1 *coïncide avec la première ligne arbitraire issue de* S, *les quatre tangentes menées par* S *aux deux coniques forment un faisceau harmonique.*

C. DE POLIGNAC.

SOLUTION

Par M. CAMILLE DE POLIGNAC.

Soient

e, e' les points de contact des tangentes à la conique A par le point S;

f, f' les points où les tangentes à B par S rencontrent ee';

β le point de rencontre de Sb avec la même ligne. (b, pôle de Sa, d'après l'énoncé, a et a_1 sont situés sur ee'.)

Comptons toutes les distances à partir de O, point milieu de ee', et posons, pour abréger,

$$\overline{Oa}=x, \quad \overline{Oa_1}=x_1, \quad \overline{O\beta}=\beta, \quad \overline{Oe}=e, \quad \overline{Of}=f, \quad \ldots.$$

Désignant par des parenthèses le rapport anharmonique, on a

(1) $$(a\beta f f') = -1,$$

(2) $$(\beta a_1 e e') = -1.$$

On tire de (1)

$$\frac{2}{\beta - x} = \frac{1}{f - x} + \frac{1}{f' - x},$$

ou réduisant

$$2\beta x - (f + f')(x + \beta) + 2 f f' = 0.$$

Posant

$$f + f' = p, \qquad f f' = q^2,$$

$$(2x - p)\beta = p x - 2q^2,$$

on tire de (2)

$$x_1 \beta = e^2.$$

Éliminant β entre les deux dernières équations, il vient

(3) $$\left\{\begin{array}{l} (2x - p)e^2 = (p x - 2q^2)x_1 \\ \quad \text{ou} \\ p x x_1 - 2e^2 x - 2q^2 x_1 + p e^2 = 0. \end{array}\right.$$

Cette dernière relation est une relation homographique entre deux points consécutifs de la série a, a_1, a_2, ... Donc, le rapport anharmonique de quatre quelconques de ces points, soit x, x_1, x_2, x_3, est égal au rapport anharmonique des quatre conjugués

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4;$$

en d'autres termes, le rapport anharmonique de quatre points consécutifs a, a_1, a_2, a_3 est constant. Ce qui démontre la première proposition de l'énoncé.

Passons à la troisième :

Écrivons l'équation (3) plus généralement

(4) $$p x x' - 2e^2 x - 2q^2 x' + p e^2 = 0.$$

Si la construction est épuisée à la cinquième ligne, le point a_2 coïncide avec a, c'est-à-dire que $x_2 = x$. Donc, si, dans (4), on remplace x par x_1, on en tirera $x' = x$. Autrement

$$p \quad {}_1 x - 2e^2 x_1 - 2q^2 x + p e^2 = 0.$$

Comparant avec (3), on voit que l'équation (4) exprime l'involution, d'où il résulte immédiatement

$$e^2 = q^2, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad e^2 = f f';$$

en d'autres termes, les quatre tangentes issues de S forment un faisceau harmonique.

Rapport anharmonique de quatre points consécutifs. — L'équation (3) peut s'écrire plus généralement

$$a\,xx_1 - b\,x - c\,x_1 + d = 0, \qquad x_1 = \frac{b\,x - d}{a\,x - c},$$

ou, introduisant une variable symbolique y,

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1 = bx - dy, & x_2 = bx_1 - dy_1, \quad \ldots, \\ y_1 = ax - cy, & y_2 = ax_1 - cy_1, \quad \ldots. \end{cases}$$

Le rapport anharmonique à exprimer sera

$$\frac{(xy_1)(x_2y_3)}{(xy_2)(x_1y_3)},$$

où les parenthèses représentent des déterminants.

On tire des équations (4)

$$(xy_1) = ax^2 - (b+c)\,xy + dy^2,$$

et l'on en tirerait

$$(xy_2) = (xy_1)(b-c),$$

attendu que (xy_2) s'annule, soit dans le cas où tous les points coïncident $x = x_1 = x_2 = \ldots$, soit si $x_2 = x$, auquel cas l'équation (3) doit être une relation d'involution comme il a été remarqué plus haut; en d'autres termes, $b = c$.

On a donc

$$\frac{(xy_1)}{(xy_2)} = \frac{1}{b-c},$$

et l'on aurait de même

$$\frac{(x_1y_2)}{(x_1x_3)} = \frac{1}{b-c}; \qquad (x_1y_3) = (b-c)(x_1y_2).$$

D'autre part, les équations (4) donnent directement

$$(x_1y_2) = (ad-bc)(xy_1),$$

d'où

$$(x_3y_3) = (ad-bc)(x_1y_2) = (ad-bc)^2(xy_1).$$

Il s'ensuit

$$(x_1y_3) = (b-c)(ad-bc)(xy_1),$$

d'où

$$\frac{(x_2 y_3)}{(x_1 y_3)} = \frac{ad - bc}{b - c}.$$

Par suite, le rapport anharmonique de quatre points consécutifs est

$$\frac{ad - bc}{(b - c)^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{e^2(p^2 - 4q^2)}{2(e^2 - q^2)},$$

d'après l'équation (3).

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1319.

Soient A, B, C, D *et* a, b, c, d, e, f *les aires des faces et les longueurs des arêtes d'un tétraèdre donné;* V *son volume;* M *un point d'une surface du second ordre circonscrite à ce tétraèdre, et telle que le plan tangent à cette surface en chacun des sommets du tétraèdre soit parallèle à la face opposée;* α, β, γ *les demi-axes de la surface;* v, v', v'', v''' *les volumes des tétraèdres ayant respectivement pour bases les faces du tétraèdre donné et pour sommet le point* M : *on a les relations*

$$v^2 + v'^2 + v''^2 + v'''^2 = V^2,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \tfrac{3}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2),$$
$$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = \tfrac{9}{16}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2),$$
$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \tfrac{243}{64}V^2.$$

(Genty).

SOLUTION

Par M. A. Leinekugel.

Prenons pour axes les arêtes DA, DB, DC du tétraèdre; soient a, b, c leurs longueurs et d, e, f les longueurs des trois autres arêtes BC, AC et AB.

L'équation générale des surfaces circonscrites au tétraèdre est

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy - Aax - A'by - A''cz = 0.$$

Les plans tangents en A, B, C ont pour équations

$$\begin{aligned}(x-a)\mathrm{A}a+y(2\mathrm{B}''a-\mathrm{A}'b)+z(2\mathrm{B}'a-\mathrm{A}''c)&=0,\\ x(2\mathrm{B}''b-\mathrm{A}a)+(y-b)\mathrm{A}'b+z(2\mathrm{B}b-\mathrm{A}''c)&=0,\\ x(2\mathrm{B}'c-\mathrm{A}a)+y(2\mathrm{B}c-\mathrm{A}'b)+(z-c)\mathrm{A}''c&=0;\end{aligned}$$

d'où, d'après l'énoncé, les six relations

$$\begin{aligned}2\mathrm{B}''a-\mathrm{A}'b&=0, & 2\mathrm{B}b-\mathrm{A}''c&=0,\\ 2\mathrm{B}'a-\mathrm{A}''c&=0, & 2\mathrm{B}'c-\mathrm{A}a&=0,\\ 2\mathrm{B}''b-\mathrm{A}a&=0, & 2\mathrm{B}c-\mathrm{A}'b&=0.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{B}''a=\mathrm{B}c,\qquad \mathrm{B}'a=\mathrm{B}b,\qquad \mathrm{B}''b=\mathrm{B}'c$$

ou

$$\frac{\mathrm{B}}{a}=\frac{\mathrm{B}'}{b}=\frac{\mathrm{B}''}{c}=\lambda,$$

et, en reportant ces valeurs dans les équations précédentes, on obtient

$$\mathrm{A}=2\frac{bc}{a}\lambda,\qquad \mathrm{A}'=2\frac{ac}{b}\lambda,\qquad \mathrm{A}''=2\frac{ab}{c}\lambda.$$

Le plan tangent à l'origine a pour équation

$$\mathrm{A}ax+\mathrm{A}'by+\mathrm{A}''cz=0,$$

ou, en remplaçant $\mathrm{A}a$, $\mathrm{A}'b$ et $\mathrm{A}''c$ par leurs valeurs précédentes et divisant par abc,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0.$$

Cette condition est donc une conséquence des autres et l'on trouve comme surface répondant à la question

$$\frac{bc}{a}x^2+\frac{ac}{b}y^2+\frac{ab}{c}z^2$$
$$+ayz+bxz+cxy-bcx-acy-abz=0,$$

ou, en divisant par abc,

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}+\frac{xy}{ab}-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0.$$

Désignons par v, v', v'', v''' les volumes des tétraèdres MABD, MADC, MDBC, MABC et soient H le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur le plan des xy, P et p les points où la parallèle menée par le point M à DC rencontre les plans ABC et ABD.

On a

$$v = \tfrac{1}{6}\,\mathrm{OA}.\mathrm{OB}\sin\mathrm{AOB}.\mathrm{MP}\sin\mathrm{MPH},$$

ou, en désignant par Δ le sinus du trièdre formé par les trois arêtes DA, DB et DC du tétraèdre,

$$v = \tfrac{1}{6}\,abz\,\Delta.$$

De même

$$v' = \tfrac{1}{6}\,acy\,\Delta,$$

$$v'' = \tfrac{1}{6}\,bcx\,\Delta,$$

$$\mathrm{V} = \tfrac{1}{6}\,abc\,\Delta$$

et

$$v''' = \tfrac{1}{6}\,de.\mathrm{M}p.\Delta',$$

en désignant par Δ' le sinus du trièdre formé par les trois arêtes du tétraèdre qui aboutissent au sommet C; si l'on remarque que

$$de\,\Delta' = ab\,\Delta,$$

il vient

$$v''' = \tfrac{1}{6}\,ab.\mathrm{M}p.\Delta.$$

On a

$$\mathrm{M}p = z - c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = c\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right).$$

par suite

$$v''' = \frac{1}{6}\,abc\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{z} + \frac{z}{c} - 1\right)\Delta.$$

Si l'on remplace v, v', v'', v''', V par ces valeurs dans la relation qu'il s'agit d'établir, et si l'on divise ensuite les deux membres par $\dfrac{a^2 b^2 c^2 \Delta^2}{36}$, on obtient

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right)^2 = 0,$$

et, en développant, on retrouve l'équation (1) de la surface.

Prenons l'équation de la surface sous cette seconde forme: nous en déduisons, pour déterminer le centre, les trois équations

$$\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{2y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{2z}{c}=1;$$

d'où, pour les coordonnées du centre,

$$x=\frac{a}{4},\qquad y=\frac{b}{4},\qquad z=\frac{c}{4}.$$

Transportons l'origine des coordonnées au centre, l'équation de la surface devient

$$\frac{\left(x+\frac{a}{4}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y+\frac{b}{4}\right)^2}{b^2}+\frac{\left(z+\frac{c}{4}\right)^2}{c^2}$$
$$+\frac{\left(y+\frac{b}{4}\right)\left(z+\frac{c}{4}\right)}{bc}+\frac{\left(x+\frac{a}{4}\right)\left(z+\frac{c}{4}\right)}{ac}$$
$$+\frac{\left(x+\frac{a}{4}\right)\left(y+\frac{b}{4}\right)}{ab}-\frac{\left(x+\frac{a}{4}\right)}{a}-\frac{\left(y+\frac{b}{4}\right)}{b}-\frac{\left(z+\frac{c}{4}\right)}{c}=0,$$

ou, en développant et après quelques simplifications,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}+\frac{xy}{ab}=\frac{3}{8}.$$

L'équation d'une sphère concentrique est

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2}+\frac{z^2}{\rho^2}+\frac{2yz}{\rho^2}\cos\lambda+\frac{2xz}{\rho^2}\cos\mu+\frac{2xy}{\rho^2}\cos\nu=1;$$

on en déduit, comme on le sait, pour l'équation qui donne les carrés des longueurs des demi-axes de la surface, en posant

$$\frac{3}{8\rho^2}=\frac{1}{R},$$

$$\begin{vmatrix}
\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R} & \frac{1}{2ab}-\frac{\cos\nu}{R} & \frac{1}{2ac}-\frac{\cos\mu}{R}\\
\frac{1}{2ab}-\frac{\cos\nu}{R} & \frac{1}{b^2}-\frac{1}{R} & \frac{1}{2bc}-\frac{\cos\lambda}{R}\\
\frac{1}{2ac}-\frac{\cos\mu}{R} & \frac{1}{2bc}-\frac{\cos\lambda}{R} & \frac{1}{c^2}-\frac{1}{R}
\end{vmatrix}=0.$$

ou, en multipliant tous les éléments par R.

$$\begin{vmatrix} \frac{R}{a^2}-1 & \frac{R}{2ab}-\cos\nu & \frac{R}{2ac}-\cos\mu \\ \frac{R}{2ab}-\cos\nu & \frac{R}{b^2}-1 & \frac{R}{2bc}-\cos\lambda \\ \frac{R}{2ac}-\cos\mu & \frac{R}{2bc}-\cos\lambda & \frac{R}{c^2}-1 \end{vmatrix}=0,$$

et, développant suivant les éléments de la première rangée,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{R}{a^2}-1\right)\left(\frac{R}{b^2}-1\right)\left(\frac{R}{c^2}-1\right)-\left(\frac{R}{a^2}-1\right)\left(\frac{R}{2bc}-\cos\lambda\right)^2 \\ &\quad -\left(\frac{R}{b^2}-1\right)\left(\frac{R}{2ac}-\cos\mu\right)^2-\left(\frac{R}{c^2}-1\right)\left(\frac{R}{2ab}-\cos\nu\right)^2 \\ &\qquad +2\left(\frac{R}{2bc}-\cos\lambda\right)\left(\frac{R}{2ac}-\cos\mu\right)\left(\frac{R}{2ab}-\cos\nu\right)=0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &\frac{R^3}{a^2b^2c^2}-R^2\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}\right)+R\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-1 \\ &\quad -\frac{R^3}{4a^2b^2c^2}+\frac{R^2}{4b^2c^2}-\frac{R\cos^2\lambda}{a^2}+\cos^2\lambda+\frac{R^2}{a^2bc}\cos\lambda-\frac{R\cos\lambda}{bc} \\ &\quad -\frac{R^3}{4a^2b^2c^2}+\frac{R^2}{4a^2c^2}-\frac{R\cos^2\mu}{b^2}+\cos^2\mu+\frac{R^2}{ab^2c}\cos\mu-\frac{R\cos\mu}{ac} \\ &\quad -\frac{R^3}{4a^2b^2c^2}+\frac{R^2}{4a^2b^2}-\frac{R\cos^2\nu}{c^2}+\cos^2\nu+\frac{R^2}{abc^2}\cos\nu-\frac{R\cos\nu}{ab} \\ &\quad +\frac{R^3}{4a^2b^2c^2}-\frac{R^2}{2abc}\left(\frac{\cos\lambda}{a}+\frac{\cos\mu}{b}+\frac{\cos\nu}{c}\right) \\ &\qquad +R\left(\frac{\cos\lambda\cos\mu}{ab}+\frac{\cos\mu\cos\nu}{bc}+\frac{\cos\lambda\cos\nu}{ac}\right)-2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu=0, \end{aligned}$$

ou, en simplifiant,

$$\begin{aligned} &\frac{R^3}{2a^2b^2c^2}-\frac{R^2}{2}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left.-\frac{1}{abc}\left(\frac{\cos\lambda}{a}+\frac{\cos\mu}{b}+\frac{\cos\nu}{c}\right)\right] \\ &\quad +R\left(\frac{\sin^2\lambda}{a^2}+\frac{\sin^2\mu}{b^2}+\frac{\sin^2\nu}{c^2}-\frac{\cos\lambda}{bc}-\frac{\cos\mu}{ac}-\frac{\cos\nu}{ab}\right. \\ &\qquad \left.-\frac{\cos\lambda\cos\mu}{ab}+\frac{\cos\mu\cos\nu}{bc}+\frac{\cos\lambda\cos\nu}{ac}\right)-\Delta^2=0, \end{aligned}$$

Δ ayant la même signification que précédemment.

De cette équation on déduit, pour la somme des racines,

$$R_1+R_2+R_3$$
$$=\tfrac{1}{2}[3(a^2+b^2+c^2)-2bc\cos\lambda-2ac\cos\mu-2ab\cos\nu],$$

ou, comme

$$d^2=b^2+c^2-2bc\cos\lambda,$$
$$e^2=c^2+a^2-2ac\cos\mu,$$
$$f^2=a^2+b^2-2ab\cos\nu,$$

la relation précédente devient, en remarquant que $R_1=\frac{8}{3}\alpha^2$, $R_2=\frac{8}{3}\beta^2$, $R_3=\frac{8}{3}\gamma^2$,

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\tfrac{3}{16}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2).$$

On a, pour la somme des produits des racines deux à deux,

$$\begin{aligned}R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3 &\\ = b^2c^2\sin^2\lambda &+a^2c^2\sin^2\mu+a^2b^2\sin^2\nu\\ &+b^2c^2\sin^2\lambda+2a^2bc(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\ &+a^2c^2\sin^2\mu+2b^2ac(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\\ &+a^2b^2\sin^2\nu+2c^2ab(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu).\end{aligned}$$

Or on a (Dostor, *Théorie des déterminants*, p. 258)

$$\begin{aligned}4D^2 = {} & b^2c^2\sin^2\lambda+2a^2bc(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\ &+a^2c^2\sin^2\mu+2b^2ac(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\\ &+a^2b^2\sin^2\nu+2c^2ab(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu),\end{aligned}$$

et la relation précédente devient

$$R_1R_2+R_2R_2+R_1R_3=4(A^2+B^2+C^2+D^2),$$

c'est-à-dire

$$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2=\tfrac{9}{16}(A^2+B^2+C^2+D^2).$$

Le produit des racines est

$$R_1R_2R_3=2a^2b^2c^2\Delta^2.$$

Si l'on remarque que

$$a^2b^2c^2\Delta^2=36V^2,$$

il vient, en remplaçant,

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2=\tfrac{243}{64}V^2.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1351.

Deux circonférences et un point A *étant donnés, mener par ce point une sécante telle que la différence des cordes interceptées soit égale à d.*

Indiquer les cas d'impossibilité suivant la position du point A. (Lez.)

SOLUTION

Par M. Moret-Blanc.

Si, du point A, on mène les tangentes aux deux circonférences, deux de ces tangentes formeront l'angle où doivent être situées les sécantes issues de A qui rencontrent à la fois les deux circonférences. Si les angles formés par les tangentes menées de A à chaque circonférence sont extérieurs l'un à l'autre; en d'autres termes, si le point A se trouve dans l'un des angles formés par les tangentes intérieures communes ne renfermant aucune des circonférences, et hors de l'angle des tangentes extérieures communes, il est évident qu'aucune sécante partant de A ne pourra rencontrer à la fois les deux circonférences, et que, par suite, le problème n'a pas de solution.

Ce cas écarté, déterminons l'angle limite, et menons dans cet angle une sécante ABCB'C', qui rencontre la première circonférence aux points B et C, et la seconde aux points B' et C'; prenons sur cette sécante $CD = CD' = d$, et à partir du point B, $BM = B'C'$.

En faisant varier la sécante, les suites des points D et D' formeront deux branches de courbes, ou une conchoïde du cercle; la suite des points M formera une autre courbe dont les intersections avec les branches de la première étant jointes au point A donneront les sécantes satisfaisant à la question.

Ces deux courbes se construisent rapidement par points et font connaître le nombre des solutions.

Question 1372.

On donne à un plan P *un mouvement infiniment petit sur lui-même; son centre instantané de rotation* O *et son cercle* *des centres* C *sont déterminés. Désignons par* t *la tangente en* O *à* C.

Considérons une figure F *dans le plan* P; *le lieu géométrique* φ *des centres de courbure des points de* P′, *ainsi que les figures* F′ *et* φ', *symétriques respectivement, par rapport à* t, *des figures* F *et* φ.

La figure F′ *est le lieu géométrique des centres de courbure des points de la figure* φ'. (DEWULF.)

SOLUTION

Par M. MORET-BLANC.

On sait que le mouvement d'une figure plane dans son plan peut être produit par le roulement d'une courbe liée à la figure mobile sur une courbe du plan fixe, et, quand le mouvement est infiniment petit, les deux courbes peuvent être remplacées par leurs cercles osculateurs au point de contact.

Soient R et R′ les rayons de ces deux cercles, qui se touchent en O et y ont pour tangente commune la tangente t au cercle des centres.

Soient

A un point *quelconque* de la figure F,
α le centre de courbure de sa trajectoire,
α' le symétrique de α par rapport à t,
et A′ le centre de courbure de la trajectoire du point A′. Les points A, O, α sont en ligne droite, ainsi que les points α', O, A′.

Les deux droites $O\alpha$, $O\alpha'$ sont égales et font avec la tangente t un même angle ω.

Cela posé, on a, par le théorème de Savary,

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{O\alpha}=\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\frac{1}{\sin\omega},$$

$$\frac{1}{O\alpha'}+\frac{1}{OA'}=\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\frac{1}{\sin\omega},$$

d'où

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{O\alpha}=\frac{1}{O\alpha'}+\frac{1}{OA'},$$

et, puisque $O\alpha'=O\alpha$, il en reste $OA'=OA$.

Les droites OA′, OA étant égales et également inclinées sur t, le point A' est le symétrique du point A par rapport à t; et comme A est un point quelconque de la figure F, le théorème est démontré.

Question 1382.

On donne un triangle et la circonférence qui lui est circonscrite. Tangentiellement en m à cette circonférence, on décrit une conique tangente aux trois côtés du triangle donné. Soit μ le centre de courbure de cette conique correspondant au point m : on demande le lieu du point μ lorsque m décrit la circonférence donnée. (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. MORET-BLANC.

Je prends le centre de la circonférence pour origine des coordonnées rectangulaires. Soient R le rayon de cette circonférence, θ l'angle de Om avec l'axe OX, et

$$\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha - R\cos A = 0,$$
$$\beta = x\cos\beta + y\sin\beta - R\cos B = 0,$$
$$\gamma = x\cos\gamma + y\sin\gamma - R\cos C = 0$$

les équations des trois côtés BC, CA, AB du triangle; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les résultats de la substitution des coordonnées du point m à x et y dans les expressions de α, β, γ, de sorte que

$$\alpha_1 = R[\cos(\theta - \alpha) - \cos A],$$
$$\beta_1 = R[\cos(\theta - \beta) - \cos B],$$
$$\gamma_1 = R[\cos(\theta - \gamma) - \cos C].$$

L'équation générale des coniques inscrites au triangle ABC est

$$(1) \qquad \sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0.$$

avec la condition

$$(2) \qquad \sqrt{l\alpha_1} + \sqrt{m\beta_1} + \sqrt{n\gamma_1} = 0,$$

qui exprime que la conique passe par le point m.

Chaque radical doit avoir le même signe dans les deux équations.

Le coefficient angulaire de la tangente en m est

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -\frac{\dfrac{\sqrt{l}\cos\alpha}{\sqrt{\alpha_1}}+\dfrac{\sqrt{m}\cos\beta}{\sqrt{\beta_1}}+\dfrac{\sqrt{n}\cos\gamma}{\sqrt{\gamma_1}}}{\dfrac{\sqrt{l}\sin\alpha}{\sqrt{\alpha_1}}+\dfrac{\sqrt{m}\sin\beta}{\sqrt{\beta_1}}+\dfrac{\sqrt{n}\sin\gamma}{\sqrt{\gamma_1}}} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

d'où

$$(3)\qquad \frac{\sqrt{l}\sin(\theta-\alpha)}{\sqrt{\alpha_1}}+\frac{\sqrt{m}\sin(\theta-\beta)}{\sqrt{\beta_1}}+\frac{\sqrt{n}\sin(\theta-\gamma)}{\sqrt{\gamma_1}} = 0.$$

Éliminant $\sqrt{l}$, $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ entre ces trois équations, on a celle de la conique satisfaisant aux conditions du problème,

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\alpha} & \sqrt{\beta} & \sqrt{\gamma} \\ \sqrt{\alpha_1} & \sqrt{\beta_1} & \sqrt{\gamma_1} \\ \dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sqrt{\alpha_1}} & \dfrac{\sin(\theta-\beta)}{\sqrt{\beta_1}} & \dfrac{\sin(\theta-\gamma)}{\sqrt{\gamma_1}} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant et multipliant par $\sqrt{\alpha_1\beta_1\gamma_1}$,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{\alpha_1\alpha}[\beta_1\sin(\theta-\gamma)-\gamma_1\sin(\theta-\beta)] \\ &+\sqrt{\beta_1\beta}[\gamma_1\sin(\theta-\alpha)-\alpha_1\sin(\theta-\gamma)] \\ &+\sqrt{\gamma_1\gamma}[\alpha_1\sin(\theta-\beta)-\beta_1\sin(\theta-\alpha)] = 0. \end{aligned}\right.$$

Je suppose, pour fixer les idées, que l'axe Ox soit dirigé de telle sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} \alpha-\beta &= 180^\circ - C, \\ \beta-\gamma &= 180^\circ - A, \\ \gamma-\alpha &= -180^\circ - B, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sin(\alpha-\beta) &= \sin C, & \cos(\alpha-\beta) &= -\cos C, \\ \sin(\beta-\gamma) &= \sin A, & \cos(\beta-\gamma) &= -\cos A, \\ \sin(\gamma-\alpha) &= \sin B, & \cos(\gamma-\alpha) &= -\cos B. \end{aligned}$$

Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} L &= \beta_1\sin(\theta-\gamma)-\gamma_1\sin(\theta-\beta) \\ &= R[\sin A - \cos B\sin(\theta-\gamma)+\cos C\sin(\theta-\beta)], \\ M &= \gamma_1\sin(\theta-\alpha)-\alpha_1\sin(\theta-\gamma) \\ &= R[\sin B - \cos C\sin(\theta-\alpha)+\cos A\sin(\theta-\gamma)], \\ N &= \alpha_1\sin(\theta-\beta)-\beta_1\sin(\theta-\alpha) \\ &= R[\sin C - \cos A\sin(\theta-\beta)+\cos B\sin(\theta-\alpha)]. \end{aligned}$$

L'équation de la conique sera

$$L\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha}+M\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta}+N\sqrt{\gamma_1}\sqrt{\gamma}=0.$$

On en déduit

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{L\sqrt{\alpha_1}\cos\alpha}{\sqrt{\alpha}}+\dfrac{M\sqrt{\beta_1}\cos\beta}{\sqrt{\beta}}+\dfrac{N\sqrt{\gamma_1}\cos\gamma}{\sqrt{\gamma}}}{\dfrac{L\sqrt{\alpha_1}\sin\alpha}{\sqrt{\alpha}}+\dfrac{M\sqrt{\beta_1}\sin\beta}{\sqrt{\beta}}+\dfrac{N\sqrt{\gamma_1}\sin\gamma}{\sqrt{\gamma}}},$$

puis, pour le point m en ayant égard à ce que, en ce point, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\alpha=\alpha_1$ ..., et faisant quelques autres réductions,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1=\frac{LMN(\alpha_1\sin A+\beta_1\sin B+\gamma_1\sin C)}{\sin\theta\,\alpha_1\beta_1\gamma_1(L\sin\alpha+M\sin\beta+N\sin\gamma)^2}.$$

Appelant ξ et η les coordonnées du point μ, on a

$$\eta-R\sin\theta=\left(\frac{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right)_1$$

$$=\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1(L\sin\alpha+M\sin\beta+N\sin\gamma)^2}{LMN\sin\theta(\alpha_1\sin A+\beta_1\sin B+\gamma_1\sin C)},$$

$$\xi-R\cos\theta=-\left(\frac{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right)_1\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$$

$$=\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1\cos\theta(L\sin\alpha+M\sin\beta+N\sin\gamma)^2}{LMN\sin^2\theta(\alpha_1\sin A+\beta_1\sin B+\gamma_1\sin C)}.$$

Remplaçant η par $\rho\sin\theta$ ou ξ par $\rho\cos\theta$, l'une quelconque des deux équations représentera le lieu en coordonnées polaires,

$$\rho=R+\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1(L\sin\alpha+M\sin\beta+N\sin\gamma)^2}{LMN\sin^2\theta(\alpha_1\sin A+\beta_1\sin B+\gamma_1\sin C)},$$

où L, M, N, α_1, β_1, γ_1 sont des fonctions de θ définies précédemment.

Lorsque $\theta=0$, on a

$$L\sin\alpha+M\sin\beta+N\sin\gamma=0;$$

les valeurs de ξ, η et ρ se présentent sous une forme indéterminée; mais on peut réduire les valeurs de ξ, η et ρ précédemment trouvées, et alors l'indétermination disparaît.

On a

$$\begin{aligned}
&L\sin\alpha + M\sin\beta + N\sin\gamma \\
&\quad = R(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C)\sin\theta \\
&\quad = 2R\sin A\sin B\sin C\sin\theta,
\end{aligned}$$

$$\alpha_1\sin A + \beta_1\sin B + \gamma_1\sin C = -2R\sin A\sin B\sin C,$$

et les expressions trouvées se réduisent à

$$\eta = R\sin\theta - 2R\sin A\sin B\sin C\sin\theta\,\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1}{LMN},$$

$$\xi = R\cos\theta - 2R\sin A\sin B\sin C\cos\theta\,\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1}{LMN},$$

$$\rho = R - 2R\sin A\sin B\sin C\,\frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1}{LMN}.$$

Cette dernière équation est celle de la courbe en coordonnées polaires.

Il est à remarquer que, lorsque l'un des facteurs du dénominateur s'annule, deux facteurs du numérateur s'annulent aussi.

Ainsi L s'annule pour $\theta - \gamma = C$ et $\theta - \beta = -B$, valeurs dont l'une annule γ_1 et l'autre β_1, et qui donnent la direction OA. De même M et α_1, γ_1 s'annulent pour la direction OB; N et α_1, β_1 s'annulent pour la direction OC.

Soient A', B', C' les points où OA, OB, OC rencontrent les côtés opposés. Lorsque le point m coïncide avec A, par exemple, la conique est l'ellipse ou l'hyperbole infiniment aplatie dont les sommets sont A et A'; en A le rayon de courbure est nul, et le point μ coïncide avec le point A. De même, lorsque le point m est en B ou en C, le point μ coïncide aussi avec B ou C. On voit d'ailleurs que, si le point m est très voisin de l'un des sommets, il en est de même du point μ.

La courbe lieu des points μ passe donc par les trois sommets du triangle ABC.

Même question.

Extrait d'une lettre de M. Mannheim.

En parcourant l'utile *Recueil de problèmes de Géométrie analytique* de M. Laisant, j'ai vu que la question 1382 que j'ai proposée en 1882 dans les *Nouvelles Annales* n'avait pas été résolue. J'en apporte alors la solution; elle est basée sur l'emploi de deux formules que j'ai données dans les *Comptes rendus* en 1875. Ces formules conduisent à un théorème dont j'ai voulu provoquer la découverte en proposant la question **1382**; on n'a pas trouvé ce théorème. Il était devenu facile à obtenir puisqu'il suffit pour cela d'appliquer aux coniques un intéressant théorème que M. Jamet a fait connaître en 1887 dans les *Annales de l'École Normale* et qui concerne les courbes triangulaires. M. Fouret, dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* pour 1892, a également démontré le théorème de M. Jamet.

Voici ma solution, déjà ancienne comme on voit :

Prenons un quadrilatère convexe a, b, c, e. Soient s le point de rencontre des côtés ae, bc et m un point sur ab. Menons les droites mc, me, on a (1)

$$\frac{1}{ma} + \frac{1}{mb} = \frac{1}{2\rho}\left(\frac{1}{\operatorname{tang} bmc} + \frac{1}{\operatorname{tang} ame}\right),$$

en appelant ρ le rayon de courbure en m de la conique qui passe par les points s, c, e et qui est tangente en m à ab.

On a aussi (2)

$$\frac{1}{ma} + \frac{1}{mb} = \frac{2}{2\rho'}\left(\frac{1}{\operatorname{tang} bmc} + \frac{1}{\operatorname{tang} ame}\right),$$

en appelant ρ' le rayon de courbure en m de la conique tangente aux côtés du triangle sce et qui est tangente en m à ab. Il résulte de ces deux relations que $\rho' = 4\rho$, les coniques étant en m tournées de la même manière; on peut donc dire : ***Deux coniques sont tangentes en leur point m; l'une passe par les sommets d'un triangle donné, l'autre touche les côtés de ce triangle : le rayon de courbure de celle-ci pour le point m est égal à quatre fois le rayon de courbure de l'autre au même point m*** (3).

Ce théorème donne lieu à des cas particuliers. Par exemple,

---

(1) Voir *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 342 et 578.

(2) *Ibid.*, p. 342.

(3) Réciproquement : *Si en un point deux coniques* C_1, C_2, *tangentes et tournées de la même manière, ont leurs rayons de courbure dans le rapport de un à quatre, on peut inscrire à* C_1 *des triangles qui soient circonscrits à* C_2.

si l'on suppose que l'une des coniques soit le cercle circonscrit au triangle donné, ses rayons de courbure sont égaux ; donc les rayons de courbure des coniques tangentes aux côtés de ce triangle et à ce cercle, pour leurs points de contact avec ce cercle, sont aussi égaux; par suite on conclut que :

Le lieu demandé est un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle donné.

On peut ajouter, d'après ce qui précède, que *le rayon de ce cercle est égal à trois fois le rayon du cercle circonscrit.*

Question 1563.

En chacun des points d'un ellipsoïde, on mène le plan tangent. On projette sur ce plan le diamètre issu du point de contact. Démontrer que ces projections, déjà tangentes à l'ellipsoïde, sont tangentes, en outre, à une autre surface. (MANNHEIM.)

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION

Par M. J. FRANEL.

Nous voulons montrer que cette propriété, loin d'être particulière à l'ellipsoïde, est vraie pour une surface quelconque. Soit O un point fixe arbitraire; en chaque point P de la surface considérée on mène le plan tangent et l'on projette le rayon vecteur OP sur ce plan. Je dis que ces projections, déjà tangentes à la surface donnée, sont tangentes, en outre, à une autre surface. Prenons le point fixe O pour origine des coordonnées et soit, par rapport à un système d'axes rectangulaires, $f(x, y, z) = 0$, l'équation de la surface proposée.

Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point P, la projection l' du rayon vecteur OP sur le plan tangent à la surface au point P sera représentée par les équations

$$(1) \qquad (X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 = T,$$

$$(2) \qquad LX + MY + NZ = 0 = U,$$

où l'on fait, pour abréger,

$$L = y\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}z, \qquad M = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad N = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Un plan quelconque passant par la droite l' aura une équation de la forme

$$u + \lambda T = 0. \tag{3}$$

Si l'on prend pour λ une fonction déterminée de x, y, z, ce plan, quand le point P se déplace sur la surface donnée, aura une certaine enveloppe. Proposons-nous de déterminer λ de telle sorte que le point P', où ce plan touche son enveloppe, soit situé sur la droite l'.

Il est évident que le lieu du point P' sera une surface jouissant de la propriété indiquée dans notre énoncé.

Or les coordonnées X, Y, Z du point P' s'obtiennent, comme on sait, en résolvant le système d'équations

$$\begin{gathered}
u + \lambda T = 0,\\
\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}T = \rho\frac{\partial f}{\partial x},\\
\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}T = \rho\frac{\partial f}{\partial y},\\
\frac{\partial u}{\partial z} + \lambda\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}T = \rho\frac{\partial f}{\partial z},
\end{gathered}$$

où ρ désigne une inconnue auxiliaire. Mais ces coordonnées doivent, par hypothèse, satisfaire aux deux équations

$$u = 0, \qquad T = 0.$$

On aura donc à déterminer λ, de telle sorte que les cinq équations

$$\left\{\begin{aligned}
&u = 0 \qquad T = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial T}{\partial x} = \rho\frac{\partial f}{\partial x},\\
&\frac{\partial u}{y} + \lambda\frac{\partial T}{\partial y} = \rho\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} + \lambda\frac{\partial T}{\partial z} = \rho\frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

admettent une solution commune en X, Y, Z et ρ. L'élimination de ces quatre quantités nous donne la condition cherchée sous la forme suivante .

$$
o = \begin{vmatrix}
\frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial M}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} & -\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}\right) & \frac{\partial f}{\partial x} \\
\frac{\partial L}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial M}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial N}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} & -\lambda \frac{\partial}{\partial y}\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}\right) & \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial L}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} & \frac{\partial M}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} & \frac{\partial N}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & -\lambda \frac{\partial}{\partial z}\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}\right) & \frac{\partial f}{\partial z} \\
L & M & N & o & o \\
\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & -\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}\right) & o
\end{vmatrix}.
$$

De l'identité

$$Lx + My + Nz = o,$$

on tire

$$x \frac{\partial L}{\partial x} + y \frac{\partial M}{\partial x} + z \frac{\partial N}{\partial x} = - L,$$

$$x \frac{\partial L}{\partial y} + y \frac{\partial M}{\partial y} + z \frac{\partial N}{\partial y} = - M,$$

$$x \frac{\partial L}{\partial z} + y \frac{\partial M}{\partial z} + z \frac{\partial N}{\partial z} = - N.$$

Si donc on ajoute aux éléments de la quatrième colonne les éléments correspondants des colonnes restantes, après les avoir multipliés respectivement par x, y, z, λ, il viendra :

$$o = \begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial M}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} & L & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial M}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial N}{\partial y} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} & M & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial L}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} & \frac{\partial M}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} & \frac{\partial N}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & N & \frac{\partial f}{\partial z} \\ L & M & N & o & \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & o & \end{vmatrix},$$

équation du premier degré par rapport à λ. λ étant ainsi déterminé, les cinq équations précédentes seront compatibles : on pourra de quatre d'entre elles tirer les valeurs de X, Y, Z et ρ. En particulier, si la surface donnée est algébrique, on voit que les coordonnées X, Y, Z du point P' seront des fonctions rationnelles des coordonnées du point P.

Si l'on introduit les deux quantités

$$R = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad S = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$

il viendra

$$L\frac{\partial f}{\partial y} - M\frac{\partial f}{\partial x} = R\frac{\partial f}{\partial z} - zS,$$

$$M\frac{\partial f}{\partial z} - N\frac{\partial f}{\partial y} = R\frac{\partial f}{\partial x} - xS,$$

$$N\frac{\partial f}{\partial x} - L\frac{\partial f}{\partial z} = R\frac{\partial f}{\partial y} - yS,$$

et si l'on fait, pour abréger,

$$\Delta = L\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y} + N\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \delta = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\delta \psi}{\partial z},$$

on pourra finalement mettre l'équation en λ sous la forme

$$R\left(-\frac{R}{2}\Delta S + S\,\Delta R\right) + \lambda\left\{\frac{R^2}{2}(f, S) - RS\left[\frac{1}{2}\delta S + (f, R)\right] + S^2\,\delta R\right\} = o.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1686. Résoudre les $2n-1$ équations à $2n-1$ inconnues,

$$\frac{1}{2} = X_1 x_1 + \ldots + X_{n-1}\, x_{n-1} + X_n,$$

$$\frac{1}{3} = X_1 x_1^2 + \ldots + X_{n-1}\, x_{n-1}^2 + X_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{2n} = X_1 x_1^{2n-1} + \ldots + X_{n-1} x_{n-1}^{2n-1} + X_n,$$

et montrer que les inconnues $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont les racines, autres que zéro et un, de l'équation

$$\frac{\partial^{n-1} \lambda^n (\lambda - 1)^n}{\partial \lambda^{n-1}}.$$

(Lucien Lévy.)

1687. On sait que l'équation

$$\frac{\partial^n x^n (x-1)^n}{\partial x^n} = 0$$

peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ . & . & . & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & & \cdots & \frac{1}{2n} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix} = 0:$$

démontrer que l'équation

$$\frac{\partial^{n+1} x^n (x-1)^n}{\partial x^{n+1}} = 0$$

peut de même s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2.3} & \frac{1}{3.4} & \cdots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{3.4} & \frac{1}{4.5} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(x+3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)2n} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

De même l'équation

$$\frac{\partial^{2n-k} x^n (x-1)^n}{\partial x^{2n-k}} = 0$$

peut s'écrire

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(2n-2k+1)} & . & \cdots & \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(2n-k+1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & . & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{n(n+1)\ldots(2n-k)} & . & \cdots & \frac{1}{(n+k)(n+k+1)\ldots 2n} \\ 1 & x & \cdots & x^k \end{vmatrix}.$$

(LUCIEN LÉVY.)

1688. Étant données les équations simultanées

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu &= 0, \\ x\cos\lambda' + y\cos\mu' + z\cos\nu' &= 0, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} u\cos\lambda + u'\cos\lambda' &= 0, \\ u\cos\mu + u'\cos\mu' &= 0, \\ u\cos\nu + u'\cos\nu' &= 0, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé $u = m\frac{d\sigma}{dt}$, $u' = m'\frac{d\sigma'}{dt}$; $d\sigma$ et $d\sigma'$ sont les aires des parallélogrammes construits sur r et ds, r' et ds'; ds et ds' sont les différentielles des arcs des trajectoires décrites dans l'espace par les corps m et m' dans le temps dt; enfin, λ, μ, ν, λ', μ', ν' sont les angles des normales aux plans de ces parallélogrammes. On demande de déduire de ces équations les propositions suivantes rencontrées successivement par Laplace (1) et par Jacobi (2) : 1° L'intersection des deux plans (A) est constamment située dans le plan des xy qu'elle décrit; 2° ce dernier plan est toujours compris entre les deux plans (A). (ESCARY.)

1689. Conclure des mêmes équations les résultats suivants :

1° $$dt = \frac{m\,d\sigma \sin(\nu + \nu')}{a \sin\nu'} = \frac{m'\,d\sigma' \sin(\nu + \nu')}{a \sin\nu}.$$

2° $$a^2 = u^2 + u'^2 + 2uu' \cos(\nu + \nu').$$

3° Le plan des deux normales menées par l'origine aux plans (A) contient l'axe des z.

4° L'équation
$$m\,d\sigma \sin\nu = m'\,d\sigma' \sin\nu',$$
où $m\,d\sigma$ et $m'\,d\sigma'$ sont des moments, exprime que le plan des xy est un lieu géométrique d'axes instantanés de rotation, et que, par suite, ce plan est un cône de Poinsot, lequel est de révolution et a pour cône supplémentaire l'axe des z. (ESCARY.)

1690. En désignant par ψ la longitude du plan des deux normales (λ, μ, ν), (λ', μ', ν'), qui pivote autour de l'axe des z, démontrer que l'on a

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\mu} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi}, \qquad \frac{\cos\lambda'}{\cos\mu'} = \frac{\cos\psi'}{\sin\psi'}, \qquad \frac{\cos\lambda}{\cos\mu} = \frac{\cos\lambda'}{\cos\mu'}.$$

(ESCARY.)

1691. Conclure de ces équations $\psi' = \psi + \pi$ (Laplace), et les deux intégrales suivantes

$$\tan^2\theta \cos 2\psi = D^2, \qquad \tan^2\theta' \cos 2\psi' = D'^2,$$

où θ et θ' sont les angles que font les rayons vecteurs r et r' avec l'axe des z, D et D', des constantes arbitraires. (ESCARY.)

1692. En posant $\dfrac{\cos\psi}{\sqrt{\cos 2\psi}} = \sqrt{\dfrac{1 + e^{2\omega}}{2}}$, démontrer les for-

(1) *Mécanique celeste*, Livre II, n° 62.

(2) *Comptes rendus*, t. XV, p. 236.

mules suivantes

$$\sin\theta = \cos\nu = \frac{D\, e^{\omega}}{\sqrt{D^2 e^{2\omega} + 1}},$$

$$\cos\theta = \sin\nu = \frac{1}{\sqrt{D^2 e^{2\omega} + 1}},$$

$$\cos\lambda = \frac{\sqrt{e^{2\omega} + 1}}{\sqrt{2}\, e^{\omega} \sqrt{D^2 e^{2\omega} + 1}},$$

$$\cos\mu = \frac{\sqrt{e^{2\omega} - 1}}{\sqrt{2}\, e^{\omega} \sqrt{D^2 e^{2\omega} + 1}},$$

$$d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2 = \frac{D^2 e^{4\omega}(e^{2\omega} + D^2)\, d\omega^2}{(D^2 e^{2\omega} + 1)^2 (e^{4\omega} - 1)} = d\xi^2,$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\xi^2,$$

$$d\sigma^2 = r^4\, d\xi^2.$$

(ESCARY.)

1693. Démontrer que la relation $\frac{\cos\lambda}{\cos\mu} = \frac{\cos\lambda'}{\cos\mu'}$, déduite des deux premières équations (B), entraîne les suivantes

$$\omega' = \omega,$$

$$dt = \frac{m}{a} \frac{(D + D')\, e^{\omega}}{\sqrt{D^2 e^{2\omega} + 1}}\, r^2\, d\xi = \frac{m'}{a} \frac{(D + D')\, e^{\omega'}}{\sqrt{D'^2 e^{2\omega'} + 1}}\, r'^2\, d\xi',$$

$$r'^2 = \frac{m}{m'} \frac{D}{D'} \frac{D'^2 e^{2\omega} + 1}{D^2 e^{2\omega} + 1}\, r^2,$$

$$r^2 = \frac{m'}{m} \frac{D'}{D} \frac{D^2 e^{2\omega'} + 1}{D'^2 e^{2\omega'} + 1}\, r'^2,$$

$$\cos(\nu + \nu') = \frac{DD' e^{2\omega} - 1}{\sqrt{(D^2 e^{2\omega} + 1)(D'^2 e^{2\omega'} + 1)}}.$$

(ESCARY.)

1694. Démontrer que, dans le cas de $D < D'$, on a l'inégalité double

$$\frac{m' D'}{m D} > \frac{r^2}{r'^2} > \frac{m' D}{m D'};$$

et que si l'on a

$$D > D',$$

la même inégalité a lieu dans un sens opposé.

(ESCARY.)

1695. Sachant que l'on a

$$r''^2 = r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\nu + \nu'),$$

et en posant

$$D^2 e^{2\omega} + 1 = P, \qquad D'^2 e^{2\omega} + 1 = Q,$$

$$DD'\left(\frac{\sqrt{m\,D'} + \sqrt{m'\,D}}{\sqrt{m\,D} - \sqrt{m\,D'}}\right)^2 e^{2\omega} + 1 = S,$$

démontrer les relations suivantes

$$r''^2 - \left(\sqrt{\frac{m\,D}{m_{\prime}\,D}} - 1\right)^2 \frac{S}{P}\, r^2 = \left(\sqrt{\frac{m'\,D'}{m\,D}} - 1\right)^2 \frac{S'}{P'}\, r'^2,$$

$$d\xi'^2 = \frac{D'^2}{D^2}\,\frac{P^2}{Q^2}\,\frac{e^{2\omega} + D'^2}{e^{2\omega} + D^2}\, d\xi^2,$$

$$d\xi^2 = \frac{D^2}{D'^2}\,\frac{P'}{Q'}\,\frac{e^{2\omega'} + D^2}{e^{2\omega'} + D'^2}\, d\xi'^2.$$

(Escary.)

1696. Le triangle $A_1B_1C_1$ étant inscrit homologiquement dans ABC, si l'on mène par A une droite quelconque rencontrant A_1C_1 en B_2 et A_1B_1 en C_2 :

1° Les droites BC_2 et B_2C se coupent en A_2 sur B_1C_1.

2° Les trois triangles ABC, $A_1B_1C_1$, et $A_2B_2C_2$ sont homologiques deux à deux, où l'on a

$$(\text{centre } O)\left|\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_1 \end{matrix}\right|(\text{axe } X),$$

$$O_1\left|\begin{matrix} A & B & C \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix}\right| X_1. \qquad O_2\left|\begin{matrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{matrix}\right| X_2.$$

3° Les centres O, O_1, O_2 appartiennent respectivement aux axes X_1, X_2, X :

4° Il existe trois coniques :

La première tangente aux côtés de ABC en A_1, B_1, C_1 et à X_1 en O.

La deuxième tangente aux côtés de $A_1B_1C_1$ en A_2, B_2, C_2 et à X_2 en O_1.

La troisième tangente aux côtés de $A_2B_2C_2$ en A, B, C et à X en O_2. (P. Sondat.)

1697. Étant donnés, sur une conique, deux groupes de trois points, a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3, s'il existe une conique inscrite au triangle $a_1 a_2 a_3$ et circonscrite au triangle $b_1 b_2 b_3$, il existera une seconde conique inscrite au triangle $b_1 b_2 b_3$ et circonscrite au triangle $a_1 a_2 a_3$.

Étant donné un triangle, chaque point d'intersection du cercle circonscrit avec un des cercles inscrits est le foyer d'une parabole circonscrite au triangle. (HUMBERT.)

1698. On considère le triangle formé par un point M d'une ellipse, le pôle de la normale en M et le centre de l'ellipse.

On considère en outre le rectangle formé par le point M, le cercle de l'ellipse et les projections de ce centre sur la tangente et la normale en M.

Quel que soit le point M sur l'ellipse, le produit des aires du triangle et du rectangle est constant. (E.-N. BARISIEN.)

1699. On considère le quadrilatère formé par les quatre pieds des normales abaissées sur une ellipse d'un point du plan de cette ellipse. Les centres des quatre cercles ciconscrits (cercles de Joachimsthal) passant par trois des pieds des normales ont pour centre des moyennes distances le point d'émission des normales. (E.-N. BARISIEN.)

1700. Dans la parabole, le produit des rayons de courbure aux pieds des normales abaissées d'un point sur la parabole, est égal à huit fois le cube de la distance du point d'émission des normales au foyer. (E.-N. BARISIEN.)

1701. Le lieu géométrique des points milieux des cordes d'un limaçon de Pascal qui sont vues du point double réel sous un angle droit est une circonférence. (A. DROZ.)

1702. Soient AB et A'B' deux diamètres d'une hyperbole équilatère et C un point quelconque de cette dernière, les deux triangles AA'C et BB'C sont orthocentriques.

(A. DROZ.)

1703. 1° Le lieu des centres des coniques osculatrices à une circonférence donnée en un point donné de cette circonférence, et passant par un autre point donné de la circonférence, est une hyperbole équilatère.

2° Le lieu des foyers des paraboles osculatrices à une circonférence donnée en un point donné de cette circonférence, est un cercle;

3° Le lieu des centres des hyperboles équilatères osculatrices à une circonférence donnée en un point donné de cette circonférence, est un cercle. (E.-N. BARISIEN.)

1704. 1° Dans tout triangle, on a

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqq \frac{1}{8}.$$

Quand l'égalité a lieu, le triangle est équilatéral.

2° Trois nombres positifs *quelconques* a, b, c étant donnés, on a

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)-abc \leqq 0;$$

quand l'égalité a lieu, on a

$$a=b=c.$$

Démontrer que, si un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes, le centre du cercle circonscrit à ce triangle décrit une conique. Examiner en particulier les cas où cette conique est un cercle ou un système de deux droites. (WEILL.)

1705. Considérons un système focal donné comme l'ensemble de deux systèmes réciproques, et faisons tourner l'un de ces systèmes d'une demi-révolution autour d'une droite, assujettie à la seule condition de rencontrer à angle droit l'axe du système focal.

Démontrer que, dans cette nouvelle position, les deux systèmes sont polaires réciproques par rapport à un paraboloïde équilatère.

Si l'on désigne par c le paramètre des paraboles des sections principales de ce paraboloïde, par r la distance d'un point quelconque du système focal à l'axe et par θ l'angle que fait le plan focal de ce point avec l'axe, on a

$$r\tan\theta = c.$$

(G. TARRY.)

TABLE DES MATIÈRES DES EXERCICES.

Questions proposées.

Questions résolues.

21645 Paris — Impr GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.