Nouvelles annales de mathématiques

E. Barisien

Sur les podaires successives d’une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 89-94

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__89_0>

SUR LES PODAIRES SUCCESSIVES D'UNE COURBE;

PAR M. LE CAPITAINE E. BARISIEN,
du Service géographique de l'Armée.

Le but de cette Note est de donner quelques formules permettant de trouver l'aire, le rayon de courbure et la rectification des podaires successives d'une courbe, sans avoir besoin de connaître les équations de ces podaires. Nous étudierons aussi, accessoirement, quelques courbes dérivées de ces podaires.

Aire de la $m^{ième}$ podaire. — Soit O le point d'émission des podaires, que nous prenons pour pôle des coordonnées polaires, et désignons par

$$r = f(\theta)$$

l'équation polaire de la courbe fondamentale.

Étudions d'abord la première podaire. Si P_1 est le point de la première podaire correspondant au point M de la courbe et si r_1 et θ_1 sont les coordonnées polaires de ce point P_1, on aura pour la différentielle de l'aire U_1 de cette première podaire

$$(1) \qquad dU_1 = \tfrac{1}{2} r_1^2 \, d\theta_1.$$

Nous allons calculer r_1 et θ_1 en fonction de θ. Pour cela, désignons par V l'angle du rayon vecteur OM avec la tangente à la courbe en M, nous avons

$$(2) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

et

$$V = \theta_1 - \theta - \frac{\pi}{2}.$$

En différentiant cette dernière équation par rapport à θ, il vient

$$(3) \qquad \frac{d\theta_1}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta}.$$

En différentiant (2) par rapport à θ, on obtient

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{d\theta^2}}{r^2 - \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Si, pour abréger l'écriture, on pose

$$\frac{dr}{d\theta} = r', \qquad \frac{d^2 r}{d\theta^2} = r'',$$

on a alors

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2},$$

et, par suite, en portant cette valeur dans (3),

$$\frac{d\theta_1}{d\theta} = 1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

D'autre part, le triangle OMP_1 donne

$$r_1 = r \sin V = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

La formule (1) devient alors

$$(4) \qquad \frac{dU_1}{d\theta} = \frac{1}{2} r_1^2 \frac{d\theta_1}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{r^4(r^2 + 2r'^2 - rr'')}{(r^2 + r'^2)^2}.$$

Pour avoir l'aire U_1 on n'aura donc qu'à intégrer une fonction de θ, et, le plus souvent, lorsque la courbe $r = f(\theta)$ aura une aire U_0 intégrable, telle que

$$\frac{dU_0}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2,$$

la podaire aura aussi une aire intégrable. On obtiendra donc l'aire U_1 sans avoir besoin de connaître l'équation de la podaire, laquelle peut être d'un degré fort élevé et, par cela même, rendre difficile la recherche directe de l'aire de la podaire.

Pour avoir le point P_2 de la seconde podaire, correspondant au point P_1 de la première, on prend le milieu C de OM et l'on joint P_1C qui est la normale à la première podaire en P_1 : on n'a donc qu'à abaisser de O la perpendiculaire sur la tangente en P_1 pour avoir le point P_2.

Il est à remarquer que l'angle P_2OP_1 est égal à l'angle P_1OM dont la valeur est $(\theta_1 - \theta)$. Si θ_2 et r_2 sont les coordonnées du point P_2, on a

$$\theta_2 = 2(\theta_1 - \theta) + \theta$$

et

$$r_2 = r_1 \sin V = r \sin^2 V.$$

D'une manière plus générale, si r_m et θ_m sont les coordonnées du point P_m de la m^{ieme} podaire, on aura

$$\theta_m = m(\theta_1 - \theta) + \theta = m\left(V - \frac{\pi}{2}\right) - \theta,$$

d'où, en différentiant par rapport à θ,

$$(5)\qquad \frac{d\theta_m}{d\theta} = m\frac{dV}{d\theta} + 1 = m\left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\right) - 1.$$

D'autre part,

$$(6)\qquad r_m = r_{m-1}\sin V = r\sin^m V = r\left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\right)^m.$$

Or, la différentielle de l'aire U_m de la m^{ieme} podaire est

$$\frac{dU_m}{d\theta} = \frac{1}{2} r_m^2 \frac{d\theta_m}{d\theta}.$$

Par conséquent, en y portant les valeurs (5) et (6), il vient

$$(7)\qquad \frac{dU_m}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{r^2}{r^2+r'^2}\right)^m \left[1 + m\left(\frac{r'^2 - rr''}{r^2+r'^2}\right)\right].$$

Rayon de courbure de la $m^{ième}$ podaire. — Si R_m désigne ce rayon de courbure, on a

$$(8)\qquad R_m = \frac{(r_m^2 + r_m'^2)^{\frac{3}{2}}}{r_m^2 + 2r_m'^2 - r_m r_m''},$$

formule dans laquelle

$$r_m' = \frac{dr_m}{d\theta_m}, \qquad r_m'' = \frac{d^2 r_m}{d\theta_m^2}.$$

Or, d'après (6),

$$r_m = \frac{r^{m+1}}{(r^2+r'^2)^{\frac{m}{2}}}.$$

En différentiant par rapport à θ_m et tenant compte de (5), on obtient

$$r_m' = \frac{dr_m}{d\theta}\,\frac{d\theta}{d\theta_m} = \frac{r' r^m}{(r^2+r'^2)^{\frac{m}{2}}}.$$

Par suite,

$$(9)\qquad r_m^2 + r_m'^2 = \frac{r^{2m}}{(r^2+r'^2)^{\frac{m}{2}}}.$$

Au lieu de calculer r_m'', remarquons que

$$\frac{r_m}{r_m'} = \frac{r}{r'},$$

et différentions par rapport à θ_m, il vient

$$\frac{r_m'^2 - r_m r_m''}{r_m'^2} = \frac{r'^2 - rr''}{r'^2}\,\frac{d\theta}{d\theta_m}.$$

D'où

$$(10)\qquad r_m'^2 - r_m r_m'' = \frac{r^{2m}(r'^2 - rr'')}{(r^2+r'^2)^{m-1}[r^2 + (m+1)r'^2 - mrr'']}.$$

En ajoutant (9) et (10), on obtient la valeur du dénominateur de R_m. On a donc ainsi pour R_m

$$(11) \qquad R_m = \frac{r^m}{(r^2+r'^2)^{\frac{m+1}{2}}} \left[\frac{r^2+r'^2+m(r'^2-rr'')}{r^2+r'^2+(m+1)(r'^2-rr'')} \right].$$

Pour $m=1$, on a

$$R_1 = r\left[\frac{r^2+r'^2+(r'^2-rr'')}{r^2+r'^2+2(r'^2-rr'')}\right],$$

expression que l'on peut écrire

$$R_1 = \frac{r}{2-\dfrac{(r^2+r'^2)}{r^2+2r'^2-rr''}}.$$

Or, le rayon de courbure R_0 de la courbe fondamentale a pour valeur

$$R_0 = \frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}.$$

On a aussi

$$\sin V = \frac{r}{(r^2+r'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Donc

$$R_0 \sin V = r\frac{(r^2+r'^2)}{r^2+2r'^2-rr''}.$$

Il en résulte donc la formule suivante pour le rayon de courbure de la première podaire

$$R_1 = \frac{r^2}{2r-R_0\sin V}.$$

C'est, aux notations près, la formule démontrée par M. Husquin de Rhéville (*Nouvelles Annales*, p. 141; 1890).

On peut, du reste, généraliser cette formule pour le rayon de courbure R_m. R_0 peut s'écrire

$$R_0 = \frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{(r^2+r'^2)+(r'^2-rr'')},$$

et comme

$$r^2 + r'^2 = \frac{r^2}{\sin^2 V},$$

on en déduit

$$r'^2 - rr'' = \frac{r^2(r - R_0 \sin V)}{R_0 \sin^3 V}.$$

Portant ces valeurs de $(r^2 + r'^2)$ et $(r'^2 - rr'')$ dans l'équation (11), on obtient

$$R_m = r \sin^{m-1} V \left[\frac{mr - (m-1) R_0 \sin V}{(m+1)r - m R_0 \sin V}\right].$$

On a donc

$$R_1 = \frac{r^2}{2r - R_0 \sin V},$$

$$R_2 = r \sin V \left[\frac{2r - R_0 \sin V}{3r - 2 R_0 \sin V}\right],$$

$$R_3 = r \sin^2 V \left[\frac{3r - 2 R_0 \sin V}{4r - 3 R_0 \sin V}\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, pour le produit des m premiers rayons de courbure, on obtient la formule simple suivante

$$R_1 R_2 R_3 \ldots R_m = \frac{r^{m+1} \sin^{\frac{m(m-1)}{2}} V}{(m+1)r - m R_0 \sin V}.$$

On remarquera aussi que la valeur (11) de R_m permet d'obtenir par la différence des rayons de courbure aux extrémités d'un arc, la rectification de la *développée de la $m^{\text{ième}}$ podaire.*

Rectification de la $m^{\text{ième}}$ podaire. — En désignant par s_m l'arc de cette $m^{\text{ième}}$ podaire, on a

$$\frac{ds_m^2}{d\theta^2} = (r_m^2 + r_m'^2) \frac{d\theta_m^2}{d\theta^2}.$$

D'où, en tenant compte de (5) et de (9),

$$(12) \qquad \frac{ds_m}{d\theta} = \frac{r^m}{(r^2 + r'^2)^{\frac{m+1}{2}}} [r^2 + r'^2 + m(r'^2 - rr'')].$$

(*A suivre.*)