

G. MUSSO

**Sur les réduites des fractions continues
symétriques**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 70-73

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__70_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES RÉDUITES DES FRACTIONS CONTINUES SYMÉTRIQUES;

PAR M. G. MUSSO, à Gênes.

—

A la page 453 de sa *Théorie des nombres*, Edouard Lucas a donné la proposition suivante :

Quand une fraction continue est symétrique, on peut calculer les deux dernières réduites, si l'on connaît les deux dernières réduites qui correspondent à la première moitié de son développement.

Il a distingué deux cas, selon que la fraction est symétrique paire, ou impaire, c'est-à-dire de l'un des types

$$(1) \quad \frac{f_n}{g_n} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \dots + \frac{1}{q_v + \frac{1}{q_{v-1} + \dots + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_0}}}}}$$

$$\frac{f_n}{g_n} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \dots + \frac{1}{q_v + \frac{1}{q_{v-1} + \dots + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_0}}}}}$$

et a trouvé, dans le premier cas,

$$(1) \quad \begin{cases} f_n = f_v^2 + f_{v-1}^2, \\ g_n = f_v g_v + f_{v-1} g_{v-1} = f_{n-1}, \\ g_{n-1} = g_v^2 + g_{v-1}^2, \end{cases}$$

et, dans le second,

$$(2) \quad \begin{cases} f_n = 2f_v f_{v-1}, \\ g_n = f_v g_{v-1} + f_{v-1} g_v = f_{n-1}, \\ g_{n-1} = 2g_v g_{v-1}. \end{cases}$$

Cependant, tandis que le premier système de relation subsiste réellement, le second est erroné. Cela, on le pourrait vérifier sur des exemples numériques; mais nous le déduirons moyennant la considération d'une fraction continue plus générale que celle des types (I), laquelle nous accorde de trouver des relations analogues aux (1), qui comprennent les (1) mêmes en particulier, et nous fournissent les vraies valeurs de f_n , g_n , f_{n-1} , g_{n-1} , dans le cas qu'il s'agisse d'une fraction continue symétrique impaire.

Que l'on considère la fraction continue du type

$$(II) \quad \frac{f_n}{g_n} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \dots + \frac{1}{q_v + \frac{1}{q_{v+1} + \dots + \frac{1}{q_{v+r} + \frac{1}{q_v + \dots + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_0}}}}}}}$$

Nous avons d'abord par la propriété de l'inversion

$$\frac{f_n}{g_n} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \dots + \frac{1}{q_v + \dots + \frac{1}{q_{v+r} + \frac{1}{\frac{f_v}{f_{v-1}}}}}}}$$

et comme

$$\frac{f_{v+r}}{g_{v+r}} = \frac{q_{v+r} f_{v+r-1} + f_{v+r-2}}{q_{v+r} g_{v+r-1} + g_{v+r-2}},$$

il sera

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{g_n} &= \frac{\left(q_{v+r} + \frac{f_{v-1}}{f_v} \right) f_{v+r-1} + f_{v+r-2}}{\left(q_{v+r} + \frac{f_{v-1}}{f_v} \right) g_{v+r-1} + g_{v+r-2}} \\ &= \frac{f_v f_{v+r} + f_{v-1} f_{v+r-1}}{f_v g_{v+r} + f_{v-1} g_{v+r-1}}; \end{aligned}$$

d'où résultent déterminées les valeurs de f_n et g_n .

Mais, par la propriété de l'inversion, nous avons encore

$$\frac{f_n}{g_n} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \dots} + \frac{1}{q_v + \frac{1}{q_{v+r} + \dots}} + \frac{1}{q_{v+1} + \frac{1}{q_v + \dots}} + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_0}};$$

par conséquent,

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{f_v f_{v+r} + f_{v-1} f_{v+r-1}}{g_v f_{v+r} + g_{v-1} f_{v+r-1}}.$$

Enfin, puisque

$$f_n g_{n-1} - f_{n-1} g_n = (-1)^{n-1} = (-1)^{2(v-1)+r},$$

nous pourrons, moyennant la substitution en celle-ci des valeurs de f_n , f_{n-1} et g_n , déterminer g_{n-1} . On trouve

$$g_{n-1} = g_v g_{v+r} + g_{v-1} g_{v+r-1}.$$

En conclusion, on voit que pour les fractions continues du type (II) subsiste le système suivant de rela-

tions

$$(3) \quad \begin{cases} f_n = f_v f_{v+r} + f_{v-1} f_{v+r-1}, \\ f_{n-1} = g_v f_{v+r} + g_{v-1} f_{v+r-1}, \\ g_n = f_v g_{v+r} + f_{v-1} g_{v+r-1}, \\ g_{n-1} = g_v g_{v+r} + g_{v-1} g_{v+r-1}; \end{cases}$$

et nous pourrons par conséquent calculer les deux dernières réduites $\frac{f_{n-1}}{g_{n-1}}$, $\frac{f_n}{g_n}$, seulement quand l'on connaît les quatre suivantes

$$\frac{f_{v-1}}{g_{v-1}}, \quad \frac{f_v}{g_v}, \quad \frac{f_{v+r-1}}{g_{v+r-1}}, \quad \frac{f_{v+r}}{g_{v+r}}.$$

Mais les relations (3) comprennent encore comme cas particulier celles du système (1) données par Lucas (il suffit de faire $r = 0$), et donnent enfin les vraies relations qui devraient former le système (2), en faisant $r = 1$. On trouve en effet, par cette dernière hypothèse,

$$(2') \quad \begin{cases} f_n = f_v f_{v+1} + f_{v-1} f_v, \\ f_{n-1} = g_v f_{v+1} + g_{v-1} f_v = f_v g_{v+1} + f_{v-1} g_v = g_n, \\ g_{v-1} = g_v g_{v+1} + g_{v-1} g_v. \end{cases}$$

Nous pourrions conséquemment conclure : que la proposition énoncée par Lucas subsiste seulement pour les fractions continues symétriques paires, et que, s'il s'agit de fractions continues symétriques impaires, on peut calculer les deux dernières réduites, seulement si l'on connaît les trois suivantes

$$\frac{f_{v-1}}{g_{v-1}}, \quad \frac{f_v}{g_v}, \quad \frac{f_{v+1}}{g_{v+1}}.$$