D. SINTSOF

Note sur l'équation différentielle des surfaces réglées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 58-61

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__58_1>

NOTE SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES SURFACES RÉGLÉES;

Par M. D. SINTSOF,
Agrégé de l'Université, à Kasan.

C'est une forme nouvelle de ladite équation que je veux établir dans ce qui suit. Sous forme fixée une surface réglée peut être déterminée par deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} z = ax + \alpha, \\ y = bx + \beta, \end{cases}$$

dont les coefficients sont des fonctions quelconques d'un paramètre variable θ. La seconde de ces équations en donne la valeur en fonction de x et de y, que l'on porte dans la première et reçoit ainsi l'équation explicite de la surface. On peut donc différentier les équations (1) en y comptant θ fonction de x et de y, ce qui donne

$$p = a + \theta'_x(xa'_\theta + \alpha'_\theta), \qquad q = (xa'_\theta + \alpha'_\theta)\theta'_y,$$
$$0 = b + \theta'_x(xb'_\theta + \beta'_\theta), \qquad 1 = (xb'_\theta + \beta'_\theta)\theta'_y;$$

d'où, en éliminant $xa'_\theta + \alpha'_\theta$ et $xb'_\theta + \beta'_\theta$,

$$(2')\qquad p = a + \frac{\theta'_x}{\theta'_y} q,$$

$$(2'')\qquad 0 = b + \frac{\theta'_x}{\theta'_y};$$

et enfin

$$(3)\qquad p = a - bq.$$

Différentions (3) encore une fois par rapport à x et y, et posons comme à l'ordinaire $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \ldots,$

$$bs + r = (a'_\theta - qb'_\theta)\theta'_x,$$
$$bt + s = (a'_\theta - qb'_\theta)\theta'_y,$$
$$\frac{bs + r}{bt + s} = \frac{\theta'_x}{\theta'_y} = -b,$$

d'après (2''), c'est-à-dire

$$(4)\qquad tb^2 + 2sb + r = 0.$$

Différentions de nouveau (4), et posons pour abréger l'écriture $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = k$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = l$, ..., nous aurons

$$2(bt+s)b'_\theta \theta'_x = -(b^2 m + 2bl + k),$$
$$2(bt+s)b'_\theta \theta'_y = -(b^2 n + 2bm + l),$$
$$\frac{b^2 m + 2bl + k}{b^2 n + 2bm + l} = \frac{\theta'_x}{\theta'_y} = -b,$$

c'est-à-dire

(5) $$nb^3 + 3mb^2 + 3lb + k = 0.$$

C'est à l'aide de ces équations (4) et (5) que l'on définit ordinairement, depuis Monge, l'équation différentielle des surfaces réglées.

Remarquons d'abord que, symboliquement, on peut écrire (4) et (5) ainsi :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 z = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \dots$$

Formons les combinaisons

(6) $$\frac{1}{b}[r(5) - k(4)] = 0 = (3rl - 2sk) + (3rm - tk)b + rnb^2,$$

(7) $$t(5) - nb(4) = 0 = tk + (3tl - rn)b + (3tm - 2sn)fr.$$

En éliminant des équations (4), (6) et (7), linéaires en b et b^2, ces quantités, nous avons l'équation sous forme d'un déterminant :

(8) $$0 = \begin{vmatrix} r & 2s & t \\ 3rl - 2sk & 3rm - tk & rn \\ tk & 3tl - rn & 3tm - 2sn \end{vmatrix},$$

ou

(8') $$\left\{\begin{array}{l} t^3 k^2 + qrt^2 l^2 + qr^2 tm^2 + r^3 n^2 \\ \quad - 6s(t^2 kl + 3rtlm + r^2 mn) + 6s^2(tkm + rln) \\ \quad\quad - 2s^3 kn - 6(rt - s^2)(rln - 3nk + tkm) = 0. \end{array}\right.$$

Pour lui donner une forme plus symétrique, remarquons que les surfaces développables sont un cas particulier des surfaces réglées; l'équation différentielle de ces dernières doit donc être satisfaite en vertu de l'équation $rt - 2s^2 = 0$ et de ses dérivées par rapport à x et y :

$$(9') \qquad kt - 2sl + rm = 0,$$
$$(9'') \qquad tl - 2sm + rn = 0.$$

Le premier membre de l'équation (8′) doit donc s'annuler avec $\Delta = rt - s^2$, $\frac{\partial\Delta}{\partial x}$ et $\frac{\partial\Delta}{\partial y}$, ce qui nous donne l'idée de le présenter à l'aide de ces trois quantités. En remarquant que nous avons un terme t^3x^2 qui peut provenir de $t\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^2$ et un autre $r^3n^2 = r(rn)^2$, qui vient de $r\left(\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right)^2$, nous recevons par un calcul facile la forme suivante de l'équation considérée :

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned} & t\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)^2 - 2s\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right) + r\left(\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right)^2 \\ & = \Delta \begin{vmatrix} r & s & t \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix}$$

s'annule aussi en vertu de $\Delta = 0$, $\frac{\partial\Delta}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\Delta}{\partial y} = 0$. C'est l'équation (10) que nous avons voulu donner dans cette Note.