Nouvelles annales de mathématiques

Concours d'admission à l'École centrale en 1895

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 518-525

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__518_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1895.

PREMIÈRE SESSION.

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy, sur l'axe des x un point A d'abscisse $x = p$, sur l'axe des y un point B d'ordonnée $y = q$. Écrire l'équation générale des coniques passant par le point A, tangentes à l'axe des y en B et admettant, pour diamètre conjugué de Oy, une droite dont le coefficient angulaire est m.

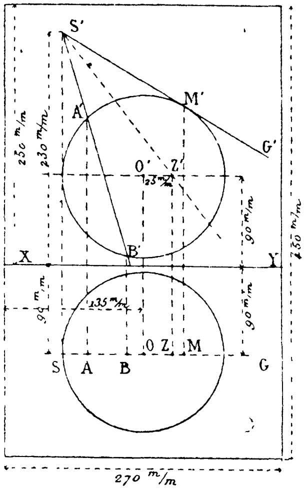
1° Faisant varier m, on cherchera le lieu des centres des hyperboles équilatères qui font partie du faisceau de coniques représentées par l'équation générale et le lieu du point de rencontre du diamètre conjugué de Oy dans ces hyperboles avec leur tangente en A. On distinguera sur ces deux lieux les régions qui répondent à des hyperboles pour lesquelles les points A et B sont sur une même branche, de celles sur lesquelles ces points sont sur des branches différentes.

2° Faisant encore varier m et considérant les paraboles qui font partie du faisceau de coniques représentées par l'équation générale, on démontrera que par un point du plan on peut faire passer trois axes de ces paraboles. On considérera les points du plan pour lesquels un des axes est parallèle à Oy et l'on cherchera le lieu des points d'intersection des deux paraboles qui correspondent aux axes non parallèles à Oy.

3° On formera l'équation de la corde commune AC de ces deux paraboles et l'on cherchera le lieu de l'intersection d'une parallèle à cette corde menée par l'origine avec les diamètres conjugués de Oy dans dans ces mêmes paraboles.

Épure.

On considère une sphère de centre O dont la cote et l'éloignement sont fixés à 90^{mm}, le rayon de la sphère $R = 80^{mm}$ et un cône de révolution dont le sommet (s, s') est ainsi défini : la projetante de ce point se confond avec la tangente commune aux deux contours apparents de la sphère vers la gauche, la projection horizontale de S est située sur le contour apparent de la sphère et la cote de ce point est de 230^{mm} au-dessus du



plan horizontal de projection. L'axe de ce cône est une droite de front $(sz, s'z')$ qui rencontre le diamètre de la sphère parallèle à la ligne de terre en un point (z, z') situé à droite de O et à une distance de 25^{mm}. La génératrice de front $(sg, s'g')$ du cône s'obtient en menant de (s, s') une tangente au grand cercle de front de la sphère dont le contact a lieu en (m, m').

Cela étant, on demande :

1° De déterminer l'intersection du cône et de la sphère. On aura soin de déterminer, outre un point courant et sa tangente, les points et tangentes remarquables;

2° De représenter le tronc de cône limité par les sections droites des points (a, a') et (b, b') où l'intersection rencontre le contour apparent vertical de la sphère en supprimant de ce tronc de cône la portion comprise dans la sphère.

Titre extérieur : Intersection de deux surfaces.

Titre intérieur : Tronc de cône entaillé par une sphère.

La ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre et à 250^{mm} du petit côté supérieur. La projetante (o, o') est au milieu de la feuille.

Cadre de 0,27 sur 0,45.

Calcul trigonométrique.

1° Calculer les côtés et les angles du triangle ABC dans lequel on connaît la surface S, le rayon r du cercle inscrit et le rayon r' du cercle ex-inscrit situé dans l'angle A,

$$S = 832^{ha},786,$$
$$r = 927^{m},285,$$
$$r' = 1276^{m},475.$$

2° Donner la valeur minimum de la surface S qui correspond aux valeurs numériques données pour r et pour r'.

Physique.

On forme, avec une balance juste, un baroscope.

Soient P et p les poids réels, V et v les volumes des deux sphères à $t°$; la balance étant fermée et pleine d'air sec à la température $t°$ et sous la pression H, l'équilibre existe.

Montrer comment :

1° A température constante l'appareil peut servir de manomètre, puisque la tangente de l'angle d'inclinaison du fléau est proportionnelle à la variation de pression;

2° A pression et à température constantes l'appareil peut servir d'hygromètre; il suffit en effet, pour pouvoir calculer l'état hygrométrique e d'un lieu, d'ouvrir la balance pour donner libre accès à l'air humide et de déterminer les poids π nécessaires pour ramener l'équilibre;

3° Calculer dans ce deuxième cas, l'état hygrométrique e correspondant aux données numériques suivantes :

$$d = \tfrac{5}{8} \text{ (vap. d'eau)}, \qquad V = 1835^{cm^3},2,$$
$$t = 27°, \qquad a = 0^{gr},001293;$$
$$\pi = 0^{gr},0253, \qquad v = 3^{cm^3},$$
$$F_t = 26^{mm},5, \qquad \alpha = 0,00366.$$

Chimie.

1° *Préparations des métalloïdes.* — Écrire seulement les formules des réactions.

2° *Problème.* — Dans un ballon analogue à celui de Lavoisier, on chauffe 10^{lit} d'un mélange d'oxygène et d'azote avec 100^{gr} de mercure. On arrête l'expérience quand l'absorption de l'oxygène est terminée (on la suppose complète).

Après refroidissement, on verse un excès d'acide sulfurique concentré; on chauffe jusqu'à dissolution complète et l'on recueille le gaz qui se dégage sur la cuve à mercure; on le mesure et l'on trouve $6^{\text{lit}},968$.

On demande :

1° La nature du gaz recueilli;

2° La composition centésimale, en volumes, du mélange d'oxygène et d'azote contenu dans le ballon.

Les gaz seront supposés secs et dans les conditions normales de température et de pression

$\delta = 0,0695$, $H = 1$, $O = 16$, $S = 32$, $Hg = 200$.

SECONDE SESSION.

Géométrie analytique.

Les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires, on demande l'équation générale des hyperboles équilatères admettant une asymptote passant par un point fixe B de l'axe des y et dont le coefficient angulaire soit m, telles en outre que le produit des abscisses à l'origine des asymptotes soit constant et que le carré du demi-axe transverse soit $2a^2$.

Faisant varier m et a :

1° Démontrer que les axes de symétrie de ces hyperboles forment un faisceau passant par deux points fixes et prouver géométriquement que le lieu des sommets de celles de ces hyperboles dont les axes transverses sont égaux est un limaçon de Pascal.

2° On considérera les hyperboles du faisceau telles que, l'origine des coordonnées se trouvant avec la courbe dans un même angle des asymptotes, le produit de m et des abscisses à l'origine des asymptotes soit de signe contraire au produit des distances de l'origine aux asymptotes.

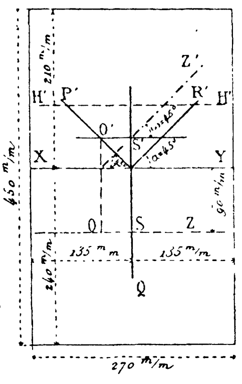
On démontrera que, par un point du plan, on peut mener deux hyperboles de ce système ayant un axe transverse donné.

3° Trouver le lieu Δ des points par lesquels on peut mener deux de ces hyperboles telles qu'une asymptote, passant par B, ait pour coefficient angulaire $+1$, pour l'une, et -1, pour l'autre.

4° On considérera, pour chaque point du lieu Δ, les hyperboles qui répondent, l'une à la valeur maximum, l'autre à la valeur minimum de l'axe transverse; on leur mènera une tangente commune et l'on cherchera le lieu du milieu de la distance des points de contact.

Épure.

Dans le plan de bout $P'\alpha Q$, incliné à 45° sur le plan horizontal, on considère un cercle de 60^{mm} de rayon tangent au plan horizontal; le centre de ce cercle est éloigné de 90^{mm} du



plan vertical. Ce cercle est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la ligne de terre.

On considère d'autre part un cône de révolution dont le sommet (s, s') est placé sur l'axe de ce cylindre. La projetante de (s, s') se confond avec αQ et l'axe de ce cône est perpendiculaire au plan $P'\alpha Q$.

Le demi-angle ω au sommet du cône est de 45°.

Cela posé, on demande :

1° De déterminer complètement la courbe d'intersection du cylindre avec les deux nappes du cône;

2° De représenter le solide formé par le cône et le cylindre en limitant ce solide aux deux plans de bout symétriques $P'\alpha Q$ et $R'\alpha Q$.

Le cône sera limité à sa partie supérieure par le plan horizontal H' tangent au cylindre suivant la génératrice culminante.

Les deux plans $P'\alpha Q$ et $R'\alpha Q$ ainsi que les surfaces du cône et du cylindre sont opaques; le plan H' horizontal supérieur sera seul considéré comme étant transparent.

Observations. — Dans le tracé à l'encre les portions de la courbe d'intersection du cône et du cylindre, qui sont extérieures aux deux plans $P'\alpha Q$ et $R'\alpha Q$, seront tracées à l'encre bleue.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de la ligne d'intersection ou des sections planes et les tangentes en ces points. Le tracé au net devra faire ressortir les constructions des points ou droites remarquables.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.
Titre intérieur : Cône et cylindre limités par des plans.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre à $0^m,210$ du côté supérieur.

Calcul trigonométrique.

Résoudre le triangle ABC dans lequel on donne les côtés b, c ainsi que l'aire S' du triangle DEF qui a pour côtés les longueurs des médianes du triangle ABC.

On choisira, parmi les solutions qui répondent aux données numériques, celle pour laquelle la hauteur issue du sommet A a la moindre valeur.

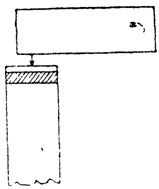
$$S' = 9431760^{a}, \qquad b = 49728^{m},7, \qquad c = 67917^{m},8.$$

P.-S. — On prouvera que S' est égal aux trois quarts de la surface S du triangle ABC.

Physique.

Un piston sans frottement, de poids π, de section S^{cmq} repose sur le fond d'un cylindre vertical ouvert à sa partie supérieure dans l'atmosphère.

Dans le fond se trouve une soupape qui met le cylindre en



relation avec une chaudière de capacité V litres qui contient M kilog. d'eau et de vapeur et qui est maintenue à une température constante T à laquelle correspond une pression de vapeur de P kilog. par centimètre carré.

Le cylindre est chauffé à une température T_1 telle que :

1° La pression P_1 kilog. par centimètre carré correspondante soit exactement celle qui est transmise par le piston ;

2° La distance $P - P_1$ soit exactement celle qui est nécessaire pour le fonctionnement de la soupape.

On demande de calculer le déplacement du piston.

Exemple numérique :

$$V = 30^{\text{lit}}, \qquad T = 165^{\circ}, \qquad P = 7^{\text{kg}},13,$$
$$M = 1^{\text{kg}}, \qquad T_1 = 144^{\circ},$$
$$\pi = 10000^{\text{kg}}.$$

Rayon du piston

$$R = 31^{\text{cm}},43.$$

Densité de la vapeur d'eau

$$d = 0,622.$$

Coefficient de dilatation des gaz

$$\alpha = 0,00367.$$

Chimie.

1° Ozone.

2° *Problème.* — On chauffe 10^{gr} de phosphore avec un excès de sulfure de baryum et d'eau. Les gaz dégagés sont reçus dans une dissolution préparée en attaquant 100^{gr} d'argent pur par l'acide azotique, étendant d'eau et ajoutant un excès d'ammoniaque.

On demande :

1° La nature du précipité qui se forme;

2° Le poids d'argent dissous restant dans la liqueur ammoniacale.

$$H = 1, \quad O = 16, \quad S = 32, \quad Az = 14, \quad P = 31,$$
$$Ag = 108, \quad Ba = 137.$$