NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. SVÉCHNICOFF

Sur une classe des surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 501-506

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__501_1>

SUR UNE CLASSE DES SURFACES;

PAR M. P. SVÉCHNICOFF.

Supposons qu'une courbe A roule sans glisser sur une autre courbe fixe B, de sorte que leurs plans osculateurs au point commun de contact forment un angle constant δ. Les positions successives d'un point μ invariablement lié à A déterminent une nouvelle courbe C. Quand l'angle δ varie d'une manière continue, la courbe C décrit une surface S. Rapportons cette surface aux axes rectangulaires de coordonnées Ox, Oy, Oz. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point de contact P,

(1) *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. IV, p. 348-350; 1839.

x, y, z celles du point μ, PP' la tangente commune à A et B. Désignons par ρ la longueur μP, par ϑ l'angle P'Pμ, par s_1 et σ les arcs des courbes B et A comptés des points quelconques jusqu'à P. Alors, on a $s_1 = \sigma$. On sait que $\cos\vartheta = \frac{d\rho}{d\sigma}$. D'où l'on a

$$(1) \qquad \cos\vartheta = \frac{d\rho}{ds_1}.$$

Abaissons la perpendiculaire MQ du point μ sur la droite PP'. Le triangle rectangle μPQ donne

$$\overline{PQ} = \rho\cos\vartheta, \qquad \overline{\mu Q} = \rho\sin\vartheta.$$

On a

$$\cos\vartheta = \frac{x_1 - x}{\rho}\frac{dx_1}{ds_1} + \frac{y_1 - y}{\rho}\frac{dy_1}{ds_1} + \frac{z_1 - z}{\rho}\frac{dz_1}{ds_1}.$$

Ainsi l'on trouve

$$(2) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \rho^2 \ldots.$$

$$(3) \qquad (x - x_1)\frac{dx_1}{ds_1} + (y - y_1)\frac{dy_1}{ds_1} + (z - z_1)\frac{dz_1}{ds_1} = -\rho\frac{d\rho}{ds_1}.$$

Telles sont les équations de la surface S. En différentiant l'équation (2) par rapport au paramètre s_1, on a l'équation (3). D'où l'on tire les conséquences suivantes.

1. La surface S est l'enveloppe des sphères représentées par l'équation (2).

2. Quand le paramètre s_1 a une valeur déterminée, la surface S est tangente à la sphère (2) en chaque point de la circonférence représentée par les équations (2) et (3). Cette circonférence a le point Q pour centre et son plan est perpendiculaire à la droite PP'.

3. La normale à la surface S au point μ passe par le point correspondant P de contact des courbes génératrices A et B.

4. La circonférence, représentée par les équations (2) et (3), est une ligne de courbure de la surface S.

5. Le rayon de courbure d'une des sections normales principales de la surface S au point μ est égal à ρ. La normale μP à la surface S au point μ forme avec les axes de coordonnées les angles dont les cosinus sont égaux respectivement à

$$\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \qquad \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Mais ces cosinus sont aussi égaux à

$$\frac{x_1-x}{\rho}, \qquad \frac{y_1-y}{\rho}, \qquad \frac{z_1-z}{\rho}.$$

Ainsi, on a

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x_1 - x + p(z_1 - z) = 0, \\ & y_1 - y + q(z_1 - z) = 0, \\ & \rho = (z_1 - z)\sqrt{p^2+q^2+1}. \end{aligned} \right.$$

En différentiant ces équations, on trouve

$$1 + p^2 + r(z - z_1) = \frac{ds_1}{dx}\left(\frac{dx_1}{ds_1} + p\frac{dz_1}{ds_1}\right),$$

$$pq + s(z - z_1) = \frac{ds_1}{dy}\left(\frac{dx_1}{ds_1} + p\frac{dz_1}{ds_1}\right),$$

$$1 + q^2 + t(z - z_1) = \frac{ds_1}{dy}\left(\frac{dy_1}{ds_1} + q\frac{dz_1}{ds_1}\right),$$

$$pq + s(z - z_1) = \frac{ds_1}{dz}\left(\frac{dy_1}{ds_1} + q\frac{dz_1}{ds_1}\right).$$

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & [pq + s(z - z_1)]^2 \\ & \quad = [1 - p^2 + r(z - z_1)][1 + q^2 + t(z - z_1)]. \end{aligned} \right.$$

Regardons quelques cas particuliers.

1. Supposons que la longueur $\rho = a$ est constante.

Alors on a

$$(6) \qquad \begin{cases} \left(pq - \dfrac{as}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\right)^2 \\ \quad = \left(1 + p^2 - \dfrac{ar}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\right) \\ \quad\quad \times \left(1 + q^2 - \dfrac{at}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\right). \end{cases}$$

En ce cas S est une surface canal.

La courbe fixe B est l'axe du canal et la courbe A se convertit en un point.

2. Supposons que la courbe B est plane, c'est-à-dire que $z_1 = 0$. Alors on a

$$(7) \qquad (pq + sz)^2 = (1 + p^2 + rz)(1 + q^2 + tz).$$

Telle est l'équation différentielle aux dérivées partielles du deuxième ordre de la surface S, si la courbe fixe génératrice est plane.

3. Supposons que la sphère (2) passe toujours par le point O qui est situé dans le plan de la courbe B. Alors on a

$$x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$$

et les équations (4) donnent

$$x_1 = x + pz, \qquad y_1 = y + qz,$$
$$x^2 + y^2 + 2z(px + qy) + z^2(p^2 + q^2) = \rho^2$$

ou

$$(8) \qquad x^2 + y^2 - z^2 + 2z(px + qy) = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle est

$$(9) \qquad f\left(\frac{x^2 + y^2 - z^2}{x}, \frac{x^2 + y^2 - z^2}{y}\right) = 0.$$

Transformons cette surface par la méthode des surfaces inverses. Posons

$$x = \frac{k^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

$$y = \frac{k^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

$$z = \frac{k^2 \zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Alors on a

$$(10) \qquad f\left(\frac{k^2}{\xi}, \frac{k^2}{\eta}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi(\xi, \eta) = 0.$$

D'après cela on peut énoncer le théorème suivant :

La surface inverse par rapport au cylindre enveloppe le système des sphères passant par l'origine.

Il est facile de démontrer que le volume du corps, limité par la surface S et par deux cercles (2) et (3) correspondant à $s_1 = \sigma_0$ et $s_1 = \sigma_1$, est égal à

$$(11) \qquad v = \pi \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \rho^2 \sin^2 \vartheta \left[1 - \left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 - \rho \frac{d^2 \rho}{d\sigma^2}\right] d\sigma.$$

Si la courbe B est plane, la grandeur de la partie de la surface S, limitée par deux circonférences (2) et (3) correspondant à $s_1 = \sigma_0$ et $s_1 = \sigma_1$, est égale à

$$(12) \qquad S = 2\pi \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \rho \left[1 - \left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 - \rho \frac{d^2 \rho}{d\sigma^2}\right] d\sigma.$$

Les grandeurs de ce volume et de cette surface ne dépendent que de la forme de la courbe mobile A.

Soient

α, β, γ les angles formés par la direction de la tangente PP′ avec les directions positives des axes;

ξ, η, ζ les angles formés par la normale principale de la courbe B avec les mêmes axes;

λ, μ, ν les angles formés également avec les mêmes directions par la direction de l'axe du plan osculateur.

Par le point μ menons le plan perpendiculaire à la droite PP'. Soient QT' et QU' les droites d'intersection de ce plan avec les plans osculateurs des courbes A et B. Abaissons la perpendiculaire μU sur la droite QU' et désignons par φ l'angle μQT'. Alors on a

$$\overline{QU} = \overline{\mu Q}\cos(\varphi + \mathfrak{S}), \qquad \overline{\mu U} = \overline{\mu Q}\sin(\varphi + \mathfrak{S}).$$

D'après cela on trouve

$$\begin{aligned}
x &= x_1 - \rho\cos\mathfrak{S}\cos\alpha \\
&\quad + \rho\sin\mathfrak{S}[-\cos(\varphi+\mathfrak{S})\cos\xi + \sin(\varphi+\mathfrak{S})\cos\lambda], \\
y &= y_1 - \rho\cos\mathfrak{S}\cos\beta \\
&\quad + \rho\sin\mathfrak{S}[-\cos(\varphi+\mathfrak{S})\cos\eta + \sin(\varphi+\mathfrak{S})\cos\mu], \\
z &= z_1 - \rho\cos\mathfrak{S}\cos\gamma \\
&\quad + \rho\sin\mathfrak{S}[-\cos(\varphi+\mathfrak{S})\cos\zeta + \sin(\varphi+\mathfrak{S})\cos\nu].
\end{aligned}$$

Ces équations représentent la surface S. x, y, z sont des fonctions des variables s_1 et $\mathfrak{S}$.