Nouvelles annales de mathématiques

Romuald Blazeievski

Sur un problème de géométrie plane

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 49-55

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__49_0>

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PLANE (1);

PAR M. ROMUALD BLAZEIEVSKI.

Nous avons les équations de trois hyperboles

$$m_1 x_1 y_1 = u, \qquad m_2 x_2 y_2 = u, \qquad m_3 x_3 y_3 = u$$

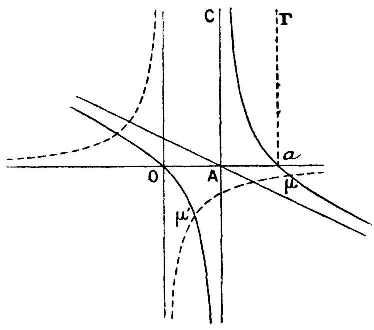
dont les coordonnées sont liées par la relation

$$y(2x - 1) = x(1 - x).$$

Le paramètre u dépend de l'inconnue D, diamètre du cercle inscrit dans le triangle, dont les bissectrices w_1, w_2, w_3 sont données. En effet, nous avons posé

$$u = \frac{x_1 x_2 x_3}{D}.$$

Pour fixer les idées, nous avons supposé que x_1, x_2, x_3



sont des quantités positives, mais y_i et u peuvent avoir un signe quelconque. Pour u négatif, nous aurons l'hyperbole tracée par points sur la figure; les intersections

(1) *Voir* 3e série, t. XIII, p. 28.

μ, μ' de cette courbe avec la courbe en trait continu

$$y(2x-1)=x(1-x)$$

peuvent être au delà des ordonnées AC, $a\Gamma$. Il est facile de justifier cette méthode : comme nous savons, il y a dans le triangle des cercles exinscrits; si nous prenons le rayon d'un tel cercle avec le signe négatif, on peut, en conservant pour x_i les signes positifs, continuer la représentation géométrique du problème avec le paramètre négatif u.

Nous avions établi les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m_1 D x_1(1-x_1) &= 2x_1x_2x_3 - x_2x_3,\\ m_2 D x_2(1-x_2) &= 2x_1x_2x_3 - x_1x_3\,; \end{aligned}\right.$$

la soustraction donne

$$m_1 D x_1(1-x_1) - m_2 D x_2(1-x_2) = (x_1-x_2)x_3\,;$$

la relation d'Euler $x_3 = 2 - x_1 - x_2$ permet de faire la séparation de variables

$$m_1 D x_1(1-x_1) + x_1^2 - 2x_1 = m_2 D x_2(1-x_2) + x_2^2 - 2x_2,$$

et de même nous avons cette expression égale à

$$m_3 D_3 x_3(1-x_3) + x_3^2 - 2x_3.$$

Ajoutant l'unité et chassant

$$m_i D_i x_i(1-x_i)$$

à l'aide des équations (1), désignons la valeur commune de

$$m_i D_i x_i(1-x_i) + (x_i-1)^2$$

par F,

$$\begin{aligned} F &= 2x_1x_2x_3 + (x_1-1)^2 - x_2x_3\\ &= \tfrac{1}{3}\left[6x_1x_2x_3 + \sum(x_1-1)^2 - \sum x_2x_3\right], \end{aligned}$$

quantité par rapport aux racines de l'équation en t qui peut être écrite

$$t(t-1)^2+(y-1)t-\frac{q}{z}(y-1);$$

le coefficient y est donné par la relation

$$(2q-z)(y-1)=\frac{qx^2-q+z}{4x^2},$$

mais

$$1-x^2=\frac{z}{x};$$

ainsi

$$(2q-z)(y-1)=\frac{z(x-q)}{4x^3}.$$

De l'équation en t nous avons

$$\sum(x_1-1)^2+3(y-1)-\frac{q}{z}(y-1)\sum\frac{1}{x_1}=0,$$

mais $\sum\frac{q}{z}(y-1)\frac{1}{t}=y,$

$$\sum(x-1)^2+3(y-1)-y=0.$$

Ainsi, en se reportant aux relations

$$x_1x_2x_3=\frac{q}{z}(y-1),\qquad \sum x_2x_3=y,$$

nous avons

$$F=\frac{2q}{z}(y-1)-(y-1)=\frac{x-q}{4x^3}.$$

Nous obtenons l'équation

$$m_1Dx_1(1-x_1)+(x_1-1)^2=\frac{x-q}{4x^3}.$$

Comme $x=\frac{1}{D\sqrt{k}}$, $k=m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1$, $l=m_1m_2m_3$, $q=\frac{l}{k^{\frac{3}{2}}}$, l'équation pour x_1 sera

$$(2)\qquad m_1Dx_1(1-x_1)+(x_1-1)^2-\tfrac{1}{4}D^2(k-lD)=0.$$

Pour x_2, x_3 nous aurons

$$m_2 D x_2(1-x_2)+(x_2-1)^2-\tfrac{1}{4}D^2(k-lD).$$

Ordonnant (2) par rapport à x_1, nous avons

$$(1-m_1D)x_1^2+(m_1D-2)x_1+1-\tfrac{1}{4}D^2(k-lD).$$

Introduisons à la place de x_1, x_2, x_3,

$$x_1-1=Dy_1,\qquad x_2-1=Dy_2,\qquad x_3-1=Dy_3,$$

nous aurons

$$-m_1D^2y_1(1+Dy_1)+D^2y_2^2=\tfrac{1}{4}D^2(k-lD);$$

en divisant par D^2, nous aurons

$$(1-m_1D)y_1^2-m_1y_1=\tfrac{1}{4}(k-lD),$$

$$[(1-m_1D)y_1-\tfrac{1}{2}m_1]^2=\tfrac{1}{4}[m_1^2+(k-lD)(1-m_1D)];$$

il est facile de constater que

$$\begin{aligned}&m_1^2+k-(km_1+l)D+lm_1D^2\\&=(m_1+m_2-m_1m_2D)(m_1+m_3-m_1m_3D).\end{aligned}$$

Introduisant pour un moment

$$a=\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3},\qquad b=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_3},\qquad c=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2},$$

nous aurons

$$\begin{aligned}(1-m_1D)y_1-\tfrac{1}{2}m_1&=\tfrac{1}{2}m_1\sqrt{m_2m_3}\sqrt{(D-b)(D-c)},\\(1-m_2D)y_2-\tfrac{1}{2}m_2&=\tfrac{1}{2}m_2\sqrt{m_1m_3}\sqrt{(D-c)(D-a)},\\(1-m_3D)y_3-\tfrac{1}{2}m_3&=\tfrac{1}{2}m_3\sqrt{m_1m_2}\sqrt{(D-a)(D-b)};\end{aligned}$$

les inconnues y_i sont exprimées par les radicaux dans lesquels entrent trois facteurs $D-a$, $D-b$, $D-c$. Les quantités a, b, c ne peuvent être égales, sinon que deux quantités m_1, m_2, m_3 sont égales; et ces dernières sont différentes toujours si les données du problème w_1, w_2, w_3 ne sont pas égales; par exemple si $m_1=m_2$, on a

$$\frac{w_2w_3}{w_1}=\frac{w_1w_3}{w_2},\qquad w_1^2=w_2^2.$$

Ainsi, le problème amène à la considération du polynome du troisième degré $\sqrt{(D-a)(D-b)(D-c)}$.

Posons

$$dv = \frac{dD}{\sqrt{(D-a)(D-b)(D-c)}},$$

nous aurons

$$\sqrt{(D-b)(D-c)} = \frac{dD}{dv\sqrt{D-a}} = 2\,\frac{d\sqrt{D-a}}{dv}.$$

Ainsi, nous aurons

$$(3)\quad \begin{cases} (1-m_1 D)y_1 - \frac{1}{2}m_1 = m_1\sqrt{m_2 m_3}\,\dfrac{d\sqrt{D-a}}{dv}, \\ (1-m_2 D)y_2 - \frac{1}{2}m_2 = m_2\sqrt{m_1 m_3}\,\dfrac{d\sqrt{D-b}}{dv}, \\ (1-m_3 D)y_3 - \frac{1}{2}m_3 = m_3\sqrt{m_1 m_2}\,\dfrac{d\sqrt{D-c}}{dv}. \end{cases}$$

Si l'on fait $D - a = A\lambda^2$, A étant une constante que nous déterminerons après, on a

$$D - b = a - b + A\lambda^2, \qquad D - c = a - c + A\lambda^2.$$

Supposons $a > b > c$, nous aurons l'avantage de prendre $A = b - a$, et désignant $\frac{a-b}{a-c}$ par k^2, nous aurons

$$\sqrt{D-a} = \sqrt{b-a}\,\lambda,$$
$$\sqrt{D-b} = (a-b)\sqrt{1-\lambda^2},$$
$$\sqrt{D-c} = \sqrt{a-c}\,\sqrt{1-k^2\lambda^2}.$$

Les équations (3) donnent y_i et D comme fonctions elliptiques de la variable v. Faisons cette remarque, que les équations

$$(1-m_1 D)y_1^2 - m_1 y_1 - \tfrac{1}{4}(k - lD) = 0, \qquad \ldots$$

sont unicursales; et s'il fallait considérer une seule de ces équations, il n'y aurait aucune nécessité d'introduire des transcendantes. La résolution de la première amène un radical portant sur un trinome du second degré. Mais si l'on considère l'ensemble de trois équations, on est contraint de recourir aux transcendantes elliptiques.

On voit une réciprocité entre y_1 et $\sqrt{D-a}$. La première est fonction de $D-a$ et de sa dérivée; on peut constater qu'il en est de même de $\sqrt{D-a}$. Différentions l'équation

$$(1-m_1 D)y_1^2 - m_1 y_1 - \tfrac{1}{4}(k-lD) = 0$$

par rapport à u, comme

$$\begin{aligned}&2(1-m_1 D)y_1 - m_1\\ &\quad = m_1\sqrt{m_2 m_3}\sqrt{(D-b)(D-c)} = 2m_1\sqrt{m_2 m_3}\,\frac{d\sqrt{D-a}}{du},\end{aligned}$$

on a

$$2m_1\sqrt{m_2 m_3}\,\frac{d\sqrt{D-a}}{du}\,\frac{dy_1}{du} + (\tfrac{1}{4}l - m_1 y_1^2)\frac{dD}{du} = 0$$

ou bien, en éliminant y_1^2,

$$m_1\sqrt{m_2 m_3}\frac{dy_1}{du} + \left\{\tfrac{1}{4}l - \frac{m_1[m_1 y_1 + \frac{1}{4}(k-lD)]}{1-m_1 D}\right\}\sqrt{D-a} = 0,$$

réduisant le coefficient de $\sqrt{D-a}$ et divisant par le terme constant m_1,

$$\sqrt{m_2 m_3}\,\frac{dy_1}{du} - \frac{1}{4}\,\frac{m_1}{1-m_1 D}(m_2 + m_3 + y_1)\sqrt{D-a} = 0.$$

En général, y_i dépendent d'une équation différentielle du second ordre, mais cette équation, compliquée, ne nous apprend pas grand'chose sur le mode d'existence des y_i. On a l'habitude, en discutant les cubiques planes (Halphen, t. II, p. 413), de prendre l'origine de coordonnées sur la courbe; rien de plus facile que de changer la variable D en x lié à D par la relation

$$k - lD = x.$$

nous aurons

$$\left(1 - \frac{m_1 k}{l} + \frac{m_1 x}{l}\right) y_1^2 - m_1 y_1 = \frac{1}{4} x,$$

$$2y_1\left(1 - \frac{m_1 k}{l} + \frac{m_1 x}{l}\right) - m_1$$
$$= \sqrt{m_1^2 + x\left(1 - \frac{m_1 k}{l} + \frac{m_1 x}{l}\right)},$$

mais les formules sont plus compliquées.

Pour compléter la discussion des formules, remarquons que les points donnés par les équations

$$(1 - m_1 D) y^2 - m_1 D y - F = 0,$$
$$(1 - m_2 D) y^2 - m_2 D y - F = 0,$$
$$(1 - m_3 D) y^2 - m_3 D y - F = 0,$$

si l'on représente les racines par les abscisses

$$y'_1,\ y''_1,\quad y'_2,\ y''_2,\quad y'_3,\ y''_3$$

d'une ligne droite, sont en involution. En effet, nous avons

$$m_1(m_2 - m_3) + m_2(m_3 - m_1) + m_3(m_1 - m_2) = 0.$$

Désignant les premiers membres des équations par A, B, C,

$$(m_2 - m_3) A + (m_3 - m_1) + m_3(m_1 - m_2) C = 0.$$

Supposant $C = 0$, nous aurons

$$(m_2 - m_3)(1 - m_1 D)(y_3 - y'_1)(y_3 - y''_1)$$
$$+ (m_3 - m_1)(1 - m_2 D)(y_3 - y'_2)(y_3 - y''_2) = 0,$$

mais la présence de l'inconnue D empêche d'appliquer cette théorie : s'il n'y entrait pas la variable D, alors cette équation permettrait de la prendre arbitraire sans que l'involution cessât d'exister. Et alors, de la nature des valeurs quelconques y_i, on pourrait conclure sur le mode d'existence de celles qui résolvent le problème, par exemple si l'équation donnant D, qui est d'un degré élevé, est irréductible ou non.