NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. AMIGUES

Démonstration d'un théorème relatif aux fonctions symétriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 494-496

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__494_1>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME RELATIF AUX FONCTIONS SYMÉTRIQUES;

PAR M. E. AMIGUES.

Si le quotient de deux polynomes en a et b est fonction symétrique de a et de b et si, en outre, ces polynomes n'ont aucun diviseur commun en a, ni aucun diviseur commun en b, chacun d'eux est une fonction symétrique de a et de b.

Soient $f(a, b)$ et $\varphi(a, b)$ ces polynomes. On a, par hypothèse,

$$\frac{f(a, b)}{\varphi(a, b)} = \frac{f(b, a)}{\varphi(b, a)};$$

on peut écrire

$$(1) \qquad \frac{f(a, b)\,\varphi(b, a)}{\varphi(a, b)} = f(b, a).$$

Le second membre étant un polynome en a, il doit en être de même du premier membre. Ainsi, le polynome en a qui est au dénominateur doit diviser celui qui est au numérateur; mais il est premier avec le facteur $f(a, b)$: il doit donc diviser $\varphi(b, a)$. On a donc

$$(2) \qquad \varphi(b, a) = K\,\varphi(a, b),$$

K étant un polynome en a.

En vertu de l'égalité (2), l'égalité (1) devient

$$(3) \qquad f(b, a) = K f(a, b).$$

Il résulte de là que le polynome en a qu'on appelle K se réduit à une constante, sans quoi $f(b, a)$ et $\varphi(b, a)$ auraient un diviseur commun en a, ce qui revient à dire que $f(a, b)$ et $\varphi(a, b)$ auraient un diviseur commun en b, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Mais, puisque K ne contient pas a, en faisant $a = b$ dans les égalités (2) et (3), K ne changera pas de valeur. On aura ainsi

$$(4) \qquad \varphi(b, b) = K\,\varphi(b, b),$$

$$(5) \qquad f(b. b) = K f(b, b),$$

mais on n'a pas simultanément

$$f(b, b) = 0,$$
$$\varphi(b, b) = 0.$$

Sans quoi les polynomes en a,

$$f(a, b), \qquad \varphi(a, b)$$

auraient un diviseur commun $(a-b)$. Donc, l'une au moins des égalités (4) et (5) donne

$$K = 1,$$

et alors les formules (2) et (3) sont l'expression du théorème à démontrer.