NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ED. MAILLET

Sur le problème de l'interpolation dans les suites récurrentes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 473-489

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__473_1>

SUR LE PROBLÈME DE L'INTERPOLATION DANS LES SUITES RECURRENTES;

PAR M. ED. MAILLET,

Ingenieur des Ponts et Chaussees.

Ce problème a été défini ainsi qu'il suit par M. M. d'Ocagne (1):

Dans chacun des intervalles laissés entre les termes

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, p. 193; 1894. A l'endroit cite, M. d'Ocagne indique pour la solution de ce probleme une methode

consécutifs d'une suite récurrente du $p^{\text{ième}}$ ordre, intercaler $k-1$ termes de façon que la nouvelle suite ainsi obtenue soit elle-même récurrente du $p^{\text{ième}}$ ordre.

Une telle interpolation est dite une interpolation d'indice $k-1$.

Nous cherchons ici à résoudre ce problème en traitant le problème inverse : à quelles lois sont soumises les suites obtenues Σ en prenant dans une suite récurrente S les termes de k en k à partir d'un terme arbitrairement choisi.

Nous supposerons toujours la loi d'ordre p de la suite S irréductible.

I. — *L'équation génératrice irréductible de la suite* S *a ses racines distinctes.*

Soient x_n le terme général de la suite S,

$$(1)\qquad x_{n+p} = A_1 x_{n+p-1} + \ldots + A_p x_n,$$

la loi réductible de cette suite,

$$(2)\qquad \xi^p = A_1 \xi^{p-1} + \ldots + A_p$$

son équation génératrice correspondante, de racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, et $\neq 0$.

Soit

$$(3)\qquad y_0,\quad y_1,\quad \ldots,\quad y_s,\quad y_{s+1},\quad \ldots$$

la suite obtenue en prenant dans la suite (1) les termes de k en k à partir d'un terme quelconque arbitraire-

---

générale fondée sur l'emploi des suites fondamentales et développe complètement cette solution dans le cas des suites du second ordre.

ment choisi ; on aura [1]

$$(4)\quad \begin{cases} y_s \quad = x_n \quad = a_1\lambda_1^n \quad + a_2\lambda_2^n \quad + \ldots + a_p\lambda_p^n, \\ y_{s+1} = x_{n+k} = a_1\lambda_1^{n+k} + a_2\lambda_2^{n+k} + \ldots + a_p\lambda_p^{n+k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{s+p} = x_{n+pk} = a_1\lambda_1^{n+pk} + a^2\lambda_2^{n+pk} + \ldots + a_p\lambda_p^{n+pk}. \end{cases}$$

Ceci posé, nous remarquerons que, puisque λ_1, λ_2, ..., λ_p sont distincts, l'équation (2) pourra s'écrire

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \xi & \lambda_1 & \ldots & \lambda_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi^p & \lambda_1^p & \ldots & \lambda_p^p \end{vmatrix} = 0,$$

d'après les propriétés connues des déterminants de Vandermonde, en sorte que (1) s'écrira

$$\begin{vmatrix} x_n & 1 & \ldots & 1 \\ x_{n+1} & \lambda_1 & \ldots & \lambda_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n+p} & \lambda_1^p & \ldots & \lambda_p^p \end{vmatrix} = 0.$$

Or, on arrive immédiatement à ces formules en considérant les formules analogues à (4) qui donnent x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+p}. Dès lors, un procédé analogue nous donnera la loi à laquelle satisfait la suite (3).

Supposons que parmi les puissances $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_p^k$ il y en ait

$$(7)\quad \begin{cases} i_1 \text{ égales à } \lambda_1^k, \text{ que l'on peut désigner par } \lambda_1^k, \lambda_1'^k, \ldots, \\ i_2 \text{ égales à } \lambda_2^k, \qquad \text{»} \qquad \lambda_2^k, \lambda_2'^k, \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ i_{p_1} \text{ égales à } \lambda_{p_1}^k, \qquad \text{»} \qquad \lambda_{p_1}^k, \lambda_{p_1}'^k, \ldots, \end{cases}$$

$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_{p_1}^k$ étant distinctes et $i_1 + i_2 + \ldots + i_{p_1} = p$.

---

(1) D'après les formules connues de Lagrange.

Ceci revient à dire que le rapport de deux racines de (2) est ou non une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité suivant que toutes deux sont ou ne sont pas contenues dans une même ligne de (7).

Les relations (4) donneront

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} y_s &= (a_1\lambda_1^n + a'_1\lambda_1'^n + \ldots) + (a_2\lambda_2^n + a'_2\lambda_2'^n + \ldots) + \ldots \\ &\qquad + (a_{p_1}\lambda_{p_1}^n + a'_{p_1}\lambda_{p_1}'^n + \ldots), \\ y_{s+1} &= (a_1\lambda_1^n + a'_1\lambda_1'^n + \ldots)\lambda_1^k + (a^2\lambda_2^n + a'_2\lambda_2'^n + \ldots)\lambda_2^k + \ldots \\ &\qquad + (a_{p_1}\lambda_{p_1}^n + a'_{p_1}\lambda_{p_1}'^n + \ldots)\lambda_{p_1}^k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{s+p_1} &= (a_1\lambda_1^n + a'_1\lambda_1'^n + \ldots)\lambda_1^{p_1 k} + (a_2\lambda_2^n + a'_2\lambda_2'^n + \ldots)\lambda_2^{p_1 k} + \ldots \\ &\qquad + (a_{p1}\lambda_{p_1}^n + a'_{p_1}\lambda_{p_1}'^n + \ldots)\lambda_{p_1}^{p_1 k}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(9)\quad \begin{vmatrix} y_s & 1 & 1 & 1 \\ y_{s+1} & \lambda_1^k & \lambda_2^k & \lambda_{p_1}^k \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{s+p_1} & \lambda_1^{p_1 k} & \lambda_2^{p_1 k} & \lambda_{p_1}^{p_1 k} \end{vmatrix} = 0$$

quel que soit s; la loi de récurrence (9) est donc une loi à laquelle satisfait la suite (3); elle est la même pour les k suites distinctes analogues à (3) que l'on obtient à l'aide de (1). Je dis que c'est la plus petite loi commune à ces k suites.

Indiquons d'abord comment on pourra trouver la plus petite loi commune à k suites récurrentes quelconques: soient $\Theta_1(\xi) = 0$, $\theta_2(\xi) = 0, \ldots, \theta_k(\xi) = 0$ les équations génératrices irréductibles de ces k suites, $\Theta(\xi)$ le plus petit commun multiple des polynomes $\theta_1(\xi)$, $\theta_2(\xi), \ldots, \theta_k(\xi)$. Les k suites satisfont [1] à la loi d'équation génératrice $\Theta(\xi) = 0$. Réciproquement, si les k suites satisfont à une loi d'équation génératrice

---

[1] Voir d'Ocagne, *loc. cit.*, p. 181, et une Note parue dans les *Nouvelles Annales*; 1895.

$H(\xi) = 0$, $H(\xi)$ est divisible par $\theta_1(\xi), \theta_2(\xi), \ldots, \theta_k(\xi)$, et en conséquence par $\Theta(\xi)$. On peut donc dire que la loi d'équation génératrice $\Theta(\xi) = 0$ est la plus petite loi commune aux k suites.

Or, les k suites (3) satisfont à la loi (9) d'équation génératrice

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \xi & \lambda_1^k & \ldots & \lambda_{p_1}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi^{p_1} & \lambda_1^{p_1 k} & \ldots & \lambda_{p_1}^{p_1 k} \end{vmatrix} = 0,$$

dont les racines sont $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_{p_1}^k$. Si la loi (9) n'est pas la plus petite loi commune aux k suites, ces dernières satisferont à une loi d'ordre plus petit dont le polynome générateur aura au moins un facteur de moins, $(\xi - \lambda_1^k)$ par exemple, que le polynome générateur (10). On en conclut facilement en exprimant d'après les formules de Lagrange $y_s, y_{s+1}, \ldots,$ en fonction des racines de l'équation génératrice irréductible de la suite (3) et égalant aux expressions (8), que le coefficient de $\lambda_1, \ldots, \lambda_1^{p_1 k}$ dans ces dernières expressions est nul, et cela quelle que soit celle des k suites (3) considérée. En les prenant successivement, on en déduira

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{r} a_1 + a'_1 + \ldots = 0, \\ a_1 \lambda_1 + a'_1 \lambda'_1 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1 \lambda_1^{k-1} + a'_1 \lambda_1'^{k-1} + \ldots = 0. \end{array} \right.$$

Ces relations ont lieu entre les i_1 racines dont les puissances $k^{\text{ièmes}}$ appartiennent à la première ligne de (7). On a d'ailleurs $i_1 \leqq k$, puisque ces i_1 racines sont distinctes et que leur rapport à l'une d'entre elles arbitrairement choisie doit être une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité distincte pour chacune d'elles. Les relations (11) donneraient alors ou $a_1 = a'_1 = \ldots = 0$, et la suite (1) serait d'ordre p réductible contrairement à l'hypothèse, ou

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots \\ \lambda_1 & \lambda'_1 & \ldots \\ \lambda_1^{i_1-1} & \lambda_1'^{i_1-1} & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui n'a pas lieu, puisque $\lambda_1, \lambda'_1, \ldots$ sont distinctes. On voit donc qu'en supposant l'existence d'une loi commune aux k suites (3) plus petite que la loi (9), on est conduit à un résultat absurde. Dès lors :

La loi (9), *d'équation génératrice* (10) *est la plus petite loi commune aux k suites* (3).

Les relations (8) montrent que la condition nécessaire et suffisante pour que la loi (9) soit irréductible pour une des suites Σ est que les coefficients de $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_{p_1}^k$ dans y_{s+1} soient tous différents de zéro. Or la loi (1) étant irréductible, et $a_1, a_2, \ldots, a_p$ différents de zéro, cette condition aura toujours lieu en particulier pour chacune des k suites si $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_p^k$, c'est-à-dire les puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines de (2), sont toutes distinctes, ou si le rapport de deux des racines de (2) ne peut être une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité ; donc :

Si l'on ne peut trouver deux racines de l'équation génératrice irréductible (2) *de la suite* (1) *dont le rapport soit une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité, les k suites* (3) *satisferont simultanément à la loi irréductible* (9).

Remarque I. — On doit noter l'intervention dans ce qui précède de l'équation aux puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines d'une équation.

D'abord l'équation (10) n'est autre que l'équation ayant pour racines les puissances $k^{\text{ièmes}}$ distinctes des racines de (2) ou (5) ; mais on obtient de la manière suivante l'équation ayant pour racines les k puissances $k^{\text{ièmes}}$, distinctes ou non, des racines de (2) ou (5); considérant les relations

$$(12)\quad \begin{cases} x_{n+p} = A_1 x_{n+p-1} + \ldots + A_p x_n, \\ x_{n+p+1} = A_1 x_{n+p} + \ldots + A_p x_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n+pk} = A_1 x_{n+pk-1} + \ldots + A_p x_{n+(k-1)p}, \end{cases}$$

remplaçant x_n, x_{n+k}, ..., x_{n+pk} par y_s, y_{s+1}, ..., y_{s+p} et éliminant les autres quantités x_i, nous obtiendrons, sous forme d'un déterminant égalé à zéro, une relation de récurrence entre y_s, y_{s+1}, ..., y_{s+p}, dont l'équation génératrice est précisément l'équation cherchée. La chose est évidente dans le cas où λ_1^k, λ_2^k, ..., λ_p^k sont distincts; on en conclut facilement qu'elle a lieu encore, par raison de continuité, quand certaines de ses quantités sont égales.

Remarque II. — Ce qui précède donne un moyen de simplifier l'étude de certaines suites récurrentes : supposons que l'équation génératrice irréductible d'une suite, de racines distinctes, en possède deux λ_1, λ_2, par exemple, telles que $\lambda_1 = \lambda_2 r$, r étant une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité. On a $\lambda_1^k = \lambda_2^k$, et dès lors les k suites récurrentes formées en partant de chacun des termes x_0, x_1, ..., x_{k-1} et prenant les termes de la suite proposée de k en k, satisfont à une loi commune d'ordre plus petit que celui de la proposée.

En particulier, si les rapports de toutes les racines à λ_1 sont des racines de l'unité, ces dernières satisferont à une même relation $r^k - 1 = 0$, k étant convenablement choisi, et la suite proposée se décomposera en k suites d'équation génératrice $\xi - \lambda_1^k = 0$, c'est-à-dire en k progressions géométriques.

II. — *L'équation génératrice irréductible de la suite* S *a des racines égales.*

Les raisonnements étant semblables à ceux du paragraphe précédent, nous pourrons abréger.

Conservons les notations des formules (1), (2), (3), et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p'}$ les racines distinctes de (2), $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{p'}$ leurs degrés de multiplicité respectifs. On aura [1]

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} y_s = x_n = \lambda_1^n f_1(n) + \ldots + \lambda_{p'}^n f_{p'}(n), \\ y_{s+1} = x_{n+k} = \lambda_1^{n+k} f_1(n+k) + \ldots + \lambda_{p'}^n f_{p'}(n+k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

où $f_1(n), \ldots, f_{p'}(n)$ sont des polynomes entiers en n de degrés respectifs $\rho_1^{-1}, \rho_2^{-1}, \ldots, \rho_{p'}^{-1}$. Dans ces polynomes les coefficients des puissances les plus élevées de n sont $\neq 0$, puisque la loi d'équation génératrice (2) est irréductible (d'ordre $p = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_{p'}$).

Supposons que, parmi les puissances $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_p^k$, il y en ait

$$(14)\quad \left\{ \begin{array}{llll} i_1 \text{ égales à } \lambda_1^k, & \text{que l'on peut désigner par} & & \lambda_1^k, \lambda_1'^k, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ i_2 \quad » \quad \lambda_2^k, & » & » & \lambda_2^k, \lambda_2'^k, \ldots, \\ i_{p'_1} \quad » \quad \lambda_{p_1}^k, & » & » & \lambda_{p'_1}^k, \lambda_{p'_1}'^k, \ldots, \end{array} \right.$$

$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_{p'_1}^k$ étant distinctes et $l_1 + i_2 + \ldots + i_{p'_1} = p'$. Parmi les quantités $\lambda_l, \lambda'_l, \ldots$ dont les puissances $k^{\text{ièmes}}$ appartiennent à une même ligne de (14), considérons celle dont l'ordre de multiplicité dans (2) est le plus grand, et supposons par exemple que ce soit λ_l.

Je dis que les k suites Σ analogues à (13) satisferont à

---

[1] D'après les formules connues de Lagrange.

la loi d'équation génératrice

$$(15)\qquad (\xi-\lambda_1^k)^{\rho_1}(\xi-\lambda_2^k)^{\rho_2}\cdots(\xi-\lambda_{p'_1}^k)^{\rho_{p'_1}}=0$$

et que cette loi sera la plus petite loi commune à ces k suites.

Vérifions d'abord le premier point.

Les équations (13) pourront s'écrire

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} y_s = x_n &= [\lambda_1^n f_1(n)+\lambda_1'^n f_1'(n)+\ldots]+\ldots\\ &\quad+[\lambda_{p'_1}^n f_{p'_1}(n)+\lambda_{p'_1}'^n f'_{p'_1}(n)+\ldots],\\ y_{s+1} = x_{n+k} &= [\lambda_1^{n+k} f_1(n+k)+\lambda_1'^{n+k} f_1'(n+k)+\ldots]+\ldots\\ &\quad+[\lambda_{p'_1}^{n+k} f_{p'_1}(n+k)+\lambda_{p'_1}'^{n+k} f'_{p'_1}(n+k)+\ldots],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ y_{s+j} = x_{n+jk} &= [\lambda_1^{n+jk} f_1(n+jk)+\lambda_1'^{n+jk} f_1'(n+jk)+\ldots]+\ldots\\ &\quad+[\lambda_{p'_1}^{n+jk} f_{p'_1}(n+jk)+\lambda_{p'_1}'^{n+jk} f'_{p'_1}(n+jk)+\ldots],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}\right.$$

n étant un nombre entier arbitrairement choisi, mais donné, et j un entier quelconque.

En désignant par $\varphi_1(j)$, $\varphi_2(j)$, ..., $\varphi_{p'_1}(j)$ des polynomes entiers en j de degrés respectifs au plus égaux à ρ_1-1, ρ_2-1, ..., $\rho_{p'_1}-1$, (13) devient, d'après (16),

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} y_s &= \varphi_1(0)+\ldots+\varphi_{p'_1}(0),\\ y_{s+1} &= \lambda_1^k\varphi_1(1)+\ldots+\lambda_{p'_1}^k\varphi_{p'_1}(j),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ y_{s+j} &= \lambda_1^{jk}\varphi_1(j)+\ldots+\lambda_{p'_1}^{jk}\varphi_{p'_1}(j),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

ce qui montre immédiatement que la suite y_s, y_{s+1}, ... satisfait [1] à la loi d'équation génératrice (15); il en

---

[1] On verrait de la même manière que la suite $\lambda_1^n f_1(n)$, ..., $\lambda_1^{n+k} f_1(n+k)$, ..., $\lambda_1^{n+jk} f_1(n+jk)$, ... satisfait à la loi d'équa-

est donc de même des k, suites Σ, puisque (15) ne dépend pas de n.

Vérifions le second point :

Si une des suites (17) satisfait à une loi d'équation génératrice ayant son degré inférieur à celui de (15), elle satisfera à une loi dont l'équation génératrice sera, par exemple, de la forme

$$(\xi - \lambda_1^k)^{\rho_1 - 1}\Phi(\xi) = 0.$$

$\Phi(\xi)$ n'admettant pas le facteur $(\xi - \lambda_1^k)$, le coefficient de la puissance $\rho_1 - 1$ de j dans $\varphi_1(j)$ devra être nul. Si $a_1, a'_1, \ldots$ désignent les i_1 coefficients de $n^{\rho_1 - 1}$ dans les i_1 polynomes $f_1(n), f'_1(n), \ldots$ faisant partie de la première parenthèse du dernier membre des expressions (16), un au moins, a_1, de ces coefficients est $\neq 0$, puisque la loi (1) est irréductible pour la suite S, et il faudra

$$a_1\lambda_1^{n+jk} + a'_1\lambda_1^{n+jk} + \ldots = 0;$$

et si la loi d'équation génératrice (15) n'est pas la plus petite loi commune aux k suites Σ, on en conclura encore k relations de la forme (11) que l'on reconnaîtra être impossibles. Donc

La loi d'équation génératrice (15) *est la plus petite loi commune aux k suites* (3).

De même, la condition nécessaire et suffisante pour que la loi d'équation génératrice (15) soit irréductible pour une des suites Σ est que les coefficients des puis-

---

tion génératrice $(\zeta - \lambda_1^k)^{\rho_1}$, ce qui donne l'identité

$$f_1(n+jk) - \ldots + (-1)^\alpha C_{\rho_1}^\alpha f_1(n+[j-\alpha]k) + \ldots$$
$$+ (-1)^{\rho_1} f_1(n+[j-\rho_1]k) = 0,$$

f_1 étant un polynome quelconque de degré $\leq \rho_1 - 1$.

sances $\rho_1 - 1$, $\rho_2 - 1$, ..., $\rho_{p'_1} - 1$ de j dans les polynomes $\varphi_1(j)$, $\varphi_2(j)$, ..., $\varphi_{p'}(j)$ respectivement soient $\neq 0$.

Cela aura lieu en particulier si, parmi les racines λ_l λ'_l, ... dont les puissances k^{iemes} font partie d'une même ligne de (14), il n'y en a qu'une dont le degré de multiplicité dans (2) soit ρ_l, quel que soit l.

Si, parmi les racines de l'équation génératrice irréductible (2) de la suite (1), dont le rapport à l'une d'elles est une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité, il n'y en a pas deux qui possèdent un ordre de multiplicité égal et maximum parmi ceux de ces mêmes racines, les k suites (3) satisfont simultanément à la loi irréductible d'équation génératrice (15).

Ceci est applicable en particulier aux suites S d'équation génératrice irréductible $(\xi - \lambda_1)^p = 0$.

Remarque I. — On doit noter encore l'intervention de l'équation aux puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines de (2).

Remarque II. — Ce qui précède permet encore de simplifier l'étude de certaines suites récurrentes : il suffit que l'équation génératrice irréductible d'une suite S possède deux racines λ_1, λ_2 dont le rapport soit une racine $k^{\text{ième}}$ de l'unité pour que les termes de S pris de k en k forment k suites satisfaisant à une loi commune d'ordre plus petit que celui de S.

En particulier, si les rapports de toutes les racines à λ_1 sont des racines de l'unité, on peut trouver k de façon à décomposer S en k suites Σ satisfaisant à une même équation génératrice

$$(18) \qquad (\xi - \lambda_1^k)^{\rho_1} = 0,$$

λ_1 étant la racine d'ordre de multiplicité maximum dans l'équation génératrice irréductible de S. Si cette dernière ne possède pas une racine $\neq \lambda_1$ et d'ordre de multiplicité égal à ρ_1, l'équation génératrice (18) est irréductible pour les k suites Σ.

Quand $\rho_1 = 2$ et quand toutes les racines de (2) sont des racines de l'unité, on voit qu'on peut trouver k tel que les k suites (3) ou (13) soient des progressions arithmétiques ou géométriques ; on obtiendra exclusivement ainsi des progressions arithmétiques si en même temps l'équation (2) n'a qu'une racine double.

Si en particulier la suite (1) est du deuxième ordre, son équation génératrice sera d'une des deux formes $(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2) = 0$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ou $(\xi - \lambda_1)^2 = 0$. Dans le premier cas, (10) devient $(\xi - \lambda_1^k)(\xi - \lambda_2^k) = 0$ si $\lambda_1^k \neq \lambda_2^k$ ou $(\xi - \lambda_1^k) = 0$ si $\lambda_1^k = \lambda_2^k$; dans le deuxième, (15) devient $(\xi - \lambda_1^k)^2 = 0$ et est irréductible pour les k suites (3). Pour $\lambda_1^k = 1$, on retrouve alors un théorème de M. d'Ocagne [1] :

Si, dans une suite récurrente du deuxième ordre, les termes pris de k en k à partir d'un certain terme forment une progression arithmétique, il en est de même à partir d'un terme quelconque.

A titre de vérification de ce qui précède, nous citerons non seulement le Mémoire de M. d'Ocagne, mais encore une Note de M. Appell [2] sur *les fractions continues périodiques :* si k est le nombre des quotients de la période, les numérateurs et les dénominateurs des réduites forment respectivement une suite récurrente dont l'équation génératrice irréductible a $2k$ racines qui sont le produit de deux d'entre elles convenablement choisies

(1) Mémoire déjà cité, p. 199.

(2) *Archiv der Math. und Phys.*, 1878, t. LXII, p. 183. *Voir* aussi le Mémoire précité, p. 217.

par les k racines de l'équation $\xi^k - 1 = 0$. Chacune de ces deux suites pourra donc se décomposer en k suites récurrentes du deuxième ordre, ce qui résulte d'ailleurs immédiatement de la forme spéciale de l'équation génératrice.

III. — *Le problème de l'interpolation dans les suites récurrentes.*

C'est le problème inverse de celui que nous venons de résoudre : il s'agit de trouver toutes les suites (1) qui peuvent conduire à une même suite (3).

Soit q l'ordre de la loi irréductible de (3); l'ordre p de la loi irréductible de (1) sera $\geqq q$.

Si l'on veut que $p = q$, il suffira d'identifier l'équation irréductible E_0 de (3), suivant qu'elle aura ou non des racines égales, avec (15) ou (10) : l'équation irréductible E de (1) aura pour racines les racines $k^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation irréductible de (3) avec les mêmes ordres de multiplicité respectifs.

Si l'on veut que E_0 soit la plus petite équation génératrice commune aux k suites analogues à (3) que l'on pourra déduire de (1), E aura encore toutes ses racines distinctes ou non en même temps que E_0, et ces racines seront encore des racines $k^{\text{ièmes}}$ de celles de E_0. En mettant E_0 sous la forme (15) ou (10) et tenant compte des conditions (14) ou (7), on déterminera facilement les équations génératrices (2) d'ordre p admissibles : d'après (14) ou (7) il faudra évidemment $p \leqq qk$.

Dans le cas général, on remarquera que le polynome générateur irréductible de (3) est un diviseur du premier membre de (15) ou (10). Il suffira donc de multiplier ce polynome par un polynome quelconque et de considérer le produit E'_0 comme le plus petit polynome générateur commun aux k suites analogues à (3) que l'on pourra déduire de (1), de l'identifier avec (15) ou (10), puis d'en déduire (1) et (2) comme précédemment, en tenant compte de ce que E_0 et E sont irréductibles.

Nous nous contenterons simplement d'indiquer la solution dans le cas où E doit n'avoir que des racines distinctes, ce qui exige que E_0 n'ait que des racines distinctes.

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$ les racines de E_0, $\mu_{q+1}, \ldots, \mu_{q'}$ les autres racines de E'_0. D'après (7) et (8) on devra avoir, à cause de la relation

$$y_{s+t} = b_1 \mu_1^t + b_2 \mu_2^t + \ldots + b_q \mu_q^t + 0.\mu_{q+1}^t + \ldots + 0.\mu_{q'}^t,$$

quel que soit t, s étant donné,

$$(18)\quad \begin{cases} b_1 = a_1 \lambda_1^n + a'_1 \lambda_1'^n + \ldots, \\ b_2 = a_2 \lambda_2^n + a'_2 \lambda_2'^n + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = a_{q+1} \lambda_{q+1}^n + a'_{q+1} \lambda_{q+1}'^n + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = a_{q'} \lambda_{q'}^n + a'_{q'} \lambda_{q'}'^n + \ldots. \end{cases}$$

Dans ces formules on aura $q' = p_1$, $b_1 \neq 0, \ldots, b_q \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a'_1 = 0, \ldots; \ldots; a_{q'} \neq 0$, $a'_{q'} \neq 0, \ldots$, et de plus

$$\mu_1 = \lambda_1^k = \lambda_1'^k = \ldots; \qquad \ldots; \qquad \mu_{q'} = \lambda_{q'}^k = \lambda_{q'}'^k = \ldots.$$

$\lambda_1, \lambda'_1, \ldots; \ldots; \lambda_{q'}, \lambda'_{q'}, \ldots$, étant distinctes.

On pourra toujours satisfaire à toutes ces conditions pourvu toutefois que dans chacune des $q' - q$ dernières équations (18) on ait au moins deux racines λ_l.

IV. — *Des suites autointerpolables.*

Nous ne considérerons comme suites autointerpolables que les suites analogues à (3) d'équation génératrice irréductible E_0 telles qu'après interpolation la suite (1) obtenue ait aussi pour équation génératrice, évidemment irréductible d'après ce qui précède, E_0.

1° E_0 *n'a que des racines distinctes.* — On identifiera E_0 avec (5) et (10) à la fois. Les puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines de E_0 seront les racines de E_0 prises dans un ordre différent ou non

$$\lambda_1^k = \lambda_{t_1}, \qquad \lambda_2^k = \lambda_{t_2}, \qquad \ldots, \qquad \lambda_p^k = \lambda_{t_p}.$$

On en conclut que toutes les racines de E_0 satisfont à une même relation

$$\xi^{k^m - 1} = 1$$

et que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont des racines de l'unité. Il en résulte facilement, d'après les formules de Lagrange,

$$x_n = x_{n+k^m - 1},$$

quel que soit n. La suite récurrente proposée ne renfermera, à proprement parler, que $k^m - 1$ termes distincts au plus.

2° E_0 *a des racines multiples.* — On identifiera encore E_0 avec (2) et (15). Les puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines de E_0 qui sont d'ordre de multiplicité ρ seront ces mêmes racines prises dans un ordre différent ou non. On en conclut encore que les racines de E_0 sont des racines de l'unité.

Mais ici les formules (13) montrent immédiatement, puisque E_0 est irréductible pour les suites considérées et que par suite $f_1(n), \ldots, f_{p'}(n)$ prennent une infinité de valeurs avec n, que la suite considérée contiendra une infinité de termes distincts.

Exemples. — Comme exemple du premier cas, on peut citer les suites d'équation génératrice irréductible

$$\xi^p - 1 = 0,$$

qui sont autointerpolables d'indice $k - 1$, pour k premier à p, et les suites telles que

$$\lambda_l^k = \lambda_l,$$

quel que soit l.

Comme exemple du deuxième cas, nous citerons : les suites pour lesquelles E_0 est de la forme

$$(\xi - 1)^p = 0,$$

qui sont autointerpolables d'indice $k - 1$ quelconque; les suites pour lesquelles E_0 est de la forme

$$(\xi - 1)^{\rho_1} (\xi + 1)^{\rho_2} = 0$$

ou

$$(\xi - 1)^{\rho_1} (\xi + 1)^{\rho_2} (\xi^2 + 1)^{\rho_3} = 0,$$

autointerpolables d'indice $(k - 1)$ pair quelconque; les suites pour lesquelles E_0 est de la forme

$$(\xi - 1)^{\rho_1} (\xi + 1)^{\rho_2} (\xi - i)^{\rho_3} (\xi + i)^{\rho_4} = 0,$$

où

$$i = \sqrt{-1},$$

autointerpolaires d'indice $k - 1 = 4k'$; les suites pour lesquelles E_0 n'admet comme racines que des racines de $\xi^q - 1 = 0$, qui sont autointerpolables d'indice $k - 1 = mq$ (m quelconque entier).

On voit en particulier qu'une progression arithmétique, d'équation génératrice irréductible $(\xi - 1)^2 = 0$, est autointerpolable d'indice $k - 1$ quelconque.

D'après ce qui précède, les valeurs de l'indice pour lesquelles une suite d'équation génératrice irréductible E_0 est autointerpolable forment une ou plusieurs progressions arithmétiques.

A titre de vérification, nous renvoyons à ce qu'a fait M. d'Ocagne pour les suites du deuxième ordre [1].