Nouvelles annales de mathématiques

Étude géométrique d'un complexe du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 433-437

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__433_1>

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE;

PAR M. R. S.

On considère le complexe formé par les cordes d'un hyperboloïde à une nappe vues du centre sous un angle droit.

Cônes du complexe qui sont de révolution.

Courbes du complexe qui sont des paraboles ou des cercles.

L'étude analytique ne présente pas de difficultés; pour l'étude géométrique, nous nous appuierons sur les deux propositions suivantes :

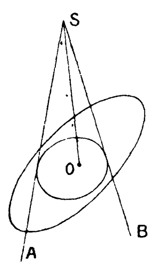
LEMME I. — *L'enveloppe des cordes d'une conique,* *vues du centre sous un angle droit, est un cercle concentrique.*

Si la conique est une hyperbole équilatère, l'enveloppe se réduit aux deux points I et J.

Lemme II. — *L'enveloppe des plans coupant le cône* C *suivant deux droites rectangulaires est un cône du second degré* φ ayant mêmes plans principaux.

I. — Cône du complexe.

Mode de génération. — Soit S le sommet du cône, O le centre de l'hyperboloïde H; si je considère un plan quelconque par SO, la courbe du complexe dans ce plan est le cercle O (Lemme I), et les génératrices du cône S situées dans ce plan sont les tangentes menées de S à ce cercle. On peut engendrer tout le cône en faisant tourner le plan autour de SO, la droite SO ne fait pas partie du complexe, et les droites SA et SB



sont constamment symétriques par rapport à SO ; donc :

1° *Le complexe est du second ordre ;*

2° *La droite* SO *est un axe du cône du complexe.*

Plans cycliques. — SO étant un axe, il y a deux plans cycliques passant par SO. Soit P l'un d'eux ; il faut que les deux droites SA et SB correspondantes soient isotropes. S n'étant pas centre du cercle O, il faut donc que ce cercle se réduise aux deux points I et J. Il faut donc que la conique d'intersection de H par P soit une hyperbole équilatère (Lemme I). Mais alors P coupe le cône C suivant deux droites rectangulaires : il est tangent au cône φ (Lemme II).

On obtient les plans cycliques passant par SO *en menant par* SO *les plans tangents au cône* φ.

CÔNES DU COMPLEXE QUI SONT DE RÉVOLUTION. — Les conclusions relatives aux plans cycliques sont alors de deux natures différentes :

1° SO n'est pas l'axe de révolution. Alors les deux plans cycliques par SO sont confondus, ce qui arrivera seulement quand SO sera une génératrice du cône φ.

Un premier lieu de sommets des cônes du complexe qui sont de révolution est le cône φ.

2° SO est l'axe de révolution. Les deux plans cycliques P et Q, passant par SO, passent alors par les points I et J du plan R perpendiculaire à SO, et ils sont tangents au cône φ. Considérons, d'autre part, le point sphère ou cône isotrope S; pour avoir les plans tangents à ce point sphère passant par SO, il faut considérer la polaire conjuguée de SO : c'est la droite de l'∞ du plan R, intersection des plans polaires de deux points de SO. Ces plans tangents sont donc définis par la droite SO et par les points I et J du plan R; ils coïncident avec les plans P et Q. Le plan P est tangent au cône φ suivant une génératrice G; il est tangent au cône isotrope S suivant une génératrice G'. Au point d'intersection de G et G', φ et S sont tangents. Donc le point sphère S est bitangent au cône φ.

Un second lieu de sommets des cônes du complexe *qui sont de révolution se compose des focales du cône* φ : ce sont six droites dont deux sont réelles.

II. — Courbe du complexe.

Nous avons vu antérieurement que le complexe était du second ordre. *Donc la courbe du complexe est de seconde classe :* c'est une conique.

Courbes du complexe qui sont des paraboles. — Ce sont des coniques tangentes à la droite de l'∞. La droite de l'∞ du plan doit être vue du centre sous un angle droit : la conique d'intersection doit être une hyperbole équilatère (Lemme I).

Les plans pour lesquels la courbe du complexe est une parabole sont les plans tangents au cône φ *et tous les plans parallèles.*

Courbes du complexe qui sont des cercles. — *Les plans pour lesquels la courbe du complexe est une circonférence sont d'abord tous les plans par l'origine* (Lemme I).

En second lieu, soit P un plan tel que la courbe du complexe soit une circonférence. Une circonférence est une conique par les points I et J, telle, par conséquent, que les tangentes issues d'un de ces points soient confondues.

Cela posé, soit P ce plan, I un des points cycliques de ce plan. On obtiendra les tangentes issues de I à la courbe du complexe en prenant l'intersection de P avec le cône du complexe de sommet I. Pour que la courbe du complexe soit un cercle, il faut et il suffit que le plan P soit tangent aux deux cônes I et J. Les deux cônes I et J, qui n'ont pas même sommet, ni même base et ne sont pas homothétiques, admettent un plan tangent commun; donc ils sont de révolution et circonscrits à une même sphère.

Or le lieu des sommets des cônes de révolution est le cône φ. Le cercle de l'∞ rencontre le cône φ en deux couples de points IJ, I'J'. Les deux cônes IJ sont de révolution et imaginaires conjugués : une sphère inscrite à l'une est évidemment inscrite à l'autre. Donc on peut leur mener un plan tangent commun P passant par la droite des sommets IJ.

Les plans tels que la courbe du complexe soit une circonférence sont donc les plans cycliques du cône φ *et tous les plans parallèles.*