Nouvelles annales de mathématiques

Francesco Ferrari

Théorèmes sur les transversales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 41-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__41_0>

THÉORÈMES SUR LES TRANSVERSALES;

PAR M. LE PROFESSEUR FRANCESCO FERRARI.

M. L. Ravier démontra (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XI, 3e série) un théorème analogue à un théorème de Carnot et qui est une généralisation du théorème de Ceva. Ce théorème, si un point d'un côté d'un polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$ signifie un point de la droite à laquelle appartient le côté, et si le rapport dans lequel un point M divise un côté $A_s A_{s+1}$ du polygone signifie le rapport positif ou négatif $\frac{A_s M}{M A_{s+1}}$, peut être énoncé ainsi :

I. *Si, par tout sommet d'un polygone plan, on mène toutes les tangentes à une courbe algébrique de son plan, leurs points d'intersection avec les côtés du polygone non adjacents à ce sommet divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$.

Sur cet intéressant argument, je veux faire remarquer les autres théorèmes suivants :

II. *Si, par tout sommet d'un polygone plan de n côtés, on mène m droites dont les points d'intersection avec les côtés non adjacents à ce sommet divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est $+1$ et $mn-1$ de ces droites sont tangentes à une même courbe de $mn^{\text{ième}}$ classe, la $mn^{\text{ième}}$ droite sera aussi tangente à la même courbe.*

En effet, si la $mn^{\text{ième}}$ droite (soit $A_1 T_1$) n'était pas tangente à la courbe, la $m^{\text{ième}}$ tangente à la courbe passant par A_1 serait une autre droite A_1T', et en appelant respectivement p_1, p' les produits des rapports dans lesquels les côtés du polygone non adjacents à A_1 sont divisés par leurs points d'intersection avec les droites A_1T_1, A_1T', devrait être, à cause de l'hypothèse et du théorème I, $p_1 = p'$. Mais si M, N sont respectivement les points où les A_1T_1, A_1T' coupent la diagonale A_nA_2, le polygone $A_2A_3 \ldots A_n$ coupé par A_1T_1, A_1T' donne

$$p_1 \frac{A_nM}{MA_2} = (-1)^{n-1}, \qquad p' \frac{A_nN}{NA_2} = (-1)^{n-1},$$

et de là il s'ensuivrait que

$$\frac{A_nM}{MA_2} = \frac{A_nN}{NA_2},$$

ce qui est absurde.

Par

$$\begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases},$$

on obtient les deux propriétés :

1. *Si trois points divisent les côtés d'un triangle dans des rapports dont le produit est* $+1$, *les droites qui les joignent aux sommets opposés passent par un même point (situé au fini ou à l'infini).*

2. *Si sur les côtés d'un triangle sont situés six points (deux sur chacun), qui divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$, *les droites qui les joignent aux sommets opposés sont tangentes à une même conique.*

III. *Si, par les sommets d'un polygone plan d'un nombre impair de côtés, on mène toutes les tangentes à une courbe algébrique de son plan, leurs points d'intersection avec les côtés respectivement opposés divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$.

Réciproquement : *Si, sur tout côté d'un polygone plan d'un nombre impair n de côtés, existent m points qui divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$, *et* $mn-1$ *des droites, qui les joignent aux sommets respectivement opposés, sont tangentes à une même courbe de* $m^{\text{ième}}$ *classe, la* $mn^{\text{ième}}$ *droite sera aussi tangente à la même courbe.*

IV. *Si, par tout sommet* (A_1) *d'un polygone plan* $A_1 A_2 \ldots A_n$, *on mène toutes les tangentes à une courbe algébrique de son plan à rencontrer deux côtés quelconques équidistants de ce sommet* $(A_s A_{s+1}, A_{n-s+1}, A_{n-s+2})$, *ensuite par le sommet successif* (A_2) *les tangentes à la même courbe à rencontrer les deux côtés successifs aux précédents* $(A_{s+1} A_{s+2}, A_{n-s+2}, A_{n-s+3})$, *et ainsi de suite par chacun des autres sommets, tous ces points d'intersection divisent les côtés du polygone dans des rapports dont le produit est* $+1$.

Ces deux théorèmes III, IV se démontrent à l'aide des formules mêmes établies par M. Ravier.

V. *Si, par tout côté d'un polygone gauche, on mène tous les plans tangents à une surface algébrique, leurs points d'intersection avec les côtés du polygone non adjacents à ce côté divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$.

Réciproquement : *Si, par tout côté d'un polygone gauche de n côtés, passent m plans, dont les points d'intersection avec les côtés non adjacents à ce côté divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$, *et* $mn-1$ *de ces plans sont tangents à la même surface de classe m, le* $mn^{\text{ième}}$ *plan sera aussi tangent à la même surface.*

Le théorème direct peut être démontré suivant un procédé analogue à celui de M. Ravier par le théorème I.

Soit, en effet,

$$f(u, v, w, \omega) = 0$$

l'équation en coordonnées de plans de la surface de classe m. La condition, pour qu'un plan passant par trois points (x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2), (x', y', z', t') soit tangent à la surface, sera

$$(1)\qquad f\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ y' & z' & t' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & z_2 & t_2 \\ x' & z' & t' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x' & y' & t' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}\right) = 0.$$

Si x', y', z', t' sont variables, la (1) représente le faisceau de plans tangents à la surface et passant par la droite $(x_1, \ldots)(x_2, \ldots)$. Si (x_r, y_r, z_r, t_r), (x_s, y_s, r_s, t_s) sont deux points quelconques, en mettant dans la (1)

$$x_r + \lambda x_s,\quad y_r + \lambda y_s,\quad z_r + \lambda z_s,\quad t_r + \lambda t_s$$

au lieu de x', y', z', t', on a une équation de $m^{\text{ième}}$ degré en λ, dont les solutions sont les m rapports dans lesquels le segment $(x_r, \ldots)(x_s, \ldots)$ vient d'être divisé par les plans du faisceau. Le produit de ces rapports, en désignant par $f_{1,2,r}$ et $f_{1,2,s}$ ce que devient le premier membre de la (1) si, au lieu de x', y', z', t', on met x_r, y_r, z_r, t_r ou x_s, y_s, z_s, t_s, sera de là égal à

$$(-1)^m \frac{f_{1,2,r}}{f_{1,2,s}}.$$

Si les sommets d'un polygone gauche $A_1 A_2 \ldots A_n$ sont (x_1, y_1, z_1, t_1), $(x_2, \ldots)$, ..., $(x_n, \ldots)$, le produit P de tous les rapports, dont on parle dans l'énoncé du théorème, sera de là donné par la formule

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} = \; & (-1)^m \frac{f_{1,2,3}}{f_{1,2,4}} (-1)^m \frac{f_{1,2,4}}{f_{1,2,5}} \cdots (-1)^m \frac{f_{1,2,n-1}}{f_{1,2,n}} \\
& \times (-1)^m \frac{f_{2,3,4}}{f_{2,3,5}} (-1)^m \frac{f_{2,3,5}}{f_{2,3,6}} \cdots (-1)^m \frac{f_{2,3,n}}{f_{2,3,1}} \\
& \times (-1)^m \frac{f_{3,4,5}}{f_{3,4,6}} (-1)^m \frac{f_{3,4,6}}{f_{3,4,7}} \cdots (-1)^m \frac{f_{3,4,1}}{f_{3,4,2}} \\
& \times \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \times (-1)^m \frac{f_{n,1,2}}{f_{n,1,3}} (-1)^m \frac{f_{n,1,3}}{f_{n,1,4}} \cdots (-1)^m \frac{f_{n,1,n-2}}{f_{n,1,n-1}} \\
= \; & (-1)^{mn(n-3)} \frac{f_{1,2,3}}{f_{1,2,n}} \frac{f_{2,3,4}}{f_{2,3,1}} \frac{f_{3,4,5}}{f_{3,4,2}} \cdots \frac{f_{n,1,2}}{f_{n,1,n-1}};
\end{aligned}$$

et puisque $n(n-3)$ est nombre pair, et

$$f_{1,2,3} = f_{2,3,1}, \; \ldots,$$

on a

$$\mathrm{P} = +1.$$

La réciproque se démontre comme le théorème II.

De là, ayant égard aux théorèmes de Carnot, dérivent les corollaires :

1. Les plans, qui passent par les côtés d'un quadrilatère gauche et par un même point, rencontrent les côtés opposés en points situés dans un même plan; *réciproquement,* si quatre points sont les intersections d'un plan avec un quadrilatère gauche, les plans passant par chacun d'eux et par les côtés opposés passent par un même point.

2. Si par tout côté d'un pentagone gauche et par un même point passe un plan, les points d'intersection de ces plans avec les côtés du pentagone non adjacents à ce côté sont situés sur une même surface de second ordre.

3. Si, par tout côté d'un pentagone gauche passent deux plans qui coupent les côtés non adjacents en points qui divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est $+1$, les dix plans sont tangents à la même surface de deuxième classe.

4. Si, par les côtés d'un quadrilatère gauche, passent les plans tangents à une surface de deuxième classe, et si quatre de leurs points d'intersection avec les côtés non adjacents sont les points d'intersection d'un plan avec les côtés du quadrilatère, les autres quatre sont situés aussi dans un même plan; *ou,* si quatre de ces plans (deux quelconques ne passant pas par le même côté) passent par un même point, les autres passent aussi par un même point.

5. Si, par les côtés d'un pentagone gauche passent les plans tangents à une même surface de deuxième classe, et si dix de leurs points d'intersection avec les côtés non adjacents sont les points d'intersection d'une surface de second ordre avec les côtés du pentagone, les autres dix sont aussi situés sur une même surface de second ordre.

Si la surface du théorème V est de deuxième classe, et le polygone a les côtés tangents à la surface même, les deux plans tangents qui passent par tout côté coïncident, et le produit des rapports, etc., pourra être $+1$ ou -1. Pour $n=4$, $n=5$, on a donc :

6. Les plans tangents à une même surface de deuxième classe, qui passent par les côtés d'un quadrilatère gauche circonscrit à elle-même, coupent les côtés opposés en quatre points, qui sont dans le même plan ou tels que trois quelconques d'eux et le conjugué harmonique de l'autre, par rapport aux sommets du côté sur lequel il est situé, sont dans le même plan.

7. Les plans tangents à une même surface de deuxième classe, qui passent par les côtés d'un pentagone gauche circonscrit à elle-même, coupent les côtés non adjacents en dix points, qui sont situés sur une même surface de second ordre ou tels que neuf quelconques d'eux et le conjugué harmonique de l'autre, par rapport

aux sommets du côté sur lequel il est situé, sont sur une même surface de second ordre.

Le polygone du théorème V direct peut être aussi plan; s'il est plan, le théorème devient le suivant :

8. *Dans un polygone plan, les points d'intersection de tout côté avec les côtés non adjacents à lui divisent ces côtés dans des rapports dont le produit est* $+1$.

VI. *Si* $A_1 A_2 \ldots A_n$ *est un polygone plan, en faisant*

$$A_s A_{s+1} = a_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n;\; n+1 = 1),$$

et désignant par $t_s', t_s'', \ldots, t_s^{(m)}$ *les* m *tangentes conduites par* A_s *à une courbe de classe* m, *on a la relation*

$$(2) \qquad \prod_{s=1}^{s=n} \frac{\sin(a_s \,.\, t'_{s+1})}{\sin(t'_{s+1} \,.\, a_{s+1})} \frac{\sin(a_s \,.\, t''_{s+1})}{\sin(t''_{s+1} \,.\, a_{s+1})} \cdots \frac{\sin(a_s \,.\, t^{(m)}_{s+1})}{\sin(t^{(m)}_{s+1} \,.\, a_{s+1})} = +1.$$

En effet, si t_{s+1} est une droite passant par un sommet A_{s+1} du polygone et M le point où t_{s+1} coupe la diagonale $A_s A_{s+2}$, le produit des rapports, dans lesquels les points d'intersection de t_{s+1} avec les côtés non adjacents à A_{s+1} divisent ces côtés, est

$$\frac{A_{s+2} M}{M A_s}$$

et pour cela

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} \frac{\sin(a_{s+1}\, t_{s+1})}{\sin(t_{s+1} \,.\, a_s)};$$

et donc le produit de tous les rapports analogues correspondant aux mn tangentes $t_s', t_s'', \ldots\, t_s^{(m)}$ est égal à l'inverse du premier membre de la (2).

VII. *Si* $A_1 A_2 \ldots A_n$ *est un polygone gauche, et si l'on désigne par* a_s *le côté*

$$A_s A_{s+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n;\; n+1 = 1;\; n+2 = 2),$$

par p_s le triangle $A_s A_{s+1} A_{s+2}$ ou son plan, et par t'_s, t''_s, ..., $t^{(m)}_s$ les m plans tangents conduits par a_s à une surface de classe m, on a les relations

$$(3)\quad \prod_{s=1}^{s=n} \frac{\sin(a_s\,.\,t'_{s+1})}{\sin(t'_{s+1}\,.\,a_{s+2})}\,\frac{\sin(a_s\,.\,t''_{s+1})}{\sin(t''_{s+1}\,.\,a_{s+2})}\cdots\frac{\sin(a_s\,.\,t^{(m)}_{s+1})}{\sin(t^{(m)}_{s+1}\,.\,a_{s+2})}=+1,$$

$$(4)\quad \prod_{s=1}^{s=n} \frac{\sin(p_s\,.\,t'_{s+1})}{\sin(t'_{s+1}\,.\,p_{s+1})}\,\frac{\sin(p_s\,.\,t''_{s+1})}{\sin(t''_{s+1}\,.\,p_{s+1})}\cdots\frac{\sin(p_s\,.\,t^{(m)}_{s+1})}{\sin(t^{(m)}_{s+1}\,.\,p_{s+1})}=+1.$$

En effet, si t_{s+1} est un plan passant par a_{s+1}, et M le point où t_{s+1} coupe la diagonale $A_s A_{s+3}$, le produit des rapports dans lesquels les points d'intersection de t_{s+1} avec les côtés non adjacents à a_{s+1} divisent ces côtés est égal à

$$\frac{A_{s+3}M}{MA_s}.$$

Mais on a

$$\frac{A_{s+3}M}{MA_s}=\frac{a_{s+2}}{a_s}\,\frac{\sin(a_{s+2}\,.\,t_{s+1})}{\sin(t_{s+1}\,.\,a_s)},$$

et aussi

$$\frac{A_{s+3}M}{MA_s}=\frac{\text{tétraèdre } A_{s+3}A_{s+2}A_{s+1}M}{\text{tétraèdre } MA_{s+1}A_{s+2}A_s}=\frac{p_{s+1}}{p_s}\,\frac{\sin(p_{s+1}\,.\,t_{s+1})}{\sin(t_{s+1}\,.\,p_s)};$$

et pour cela le produit de tous les rapports correspondant à tous les plans tangents, comme au théorème V, est égal soit à l'inverse du premier membre de la (3), soit à l'inverse du premier membre de la (4).

VIII. J'observerai encore que l'on peut formuler des théorèmes analogues aux théorèmes I, II, III, IV, VI et relativement au polygone sphérique, et relativement au polygone gauche, par les sommets duquel passent les plans tangents à une surface algébrique et parallèles à une même droite PQ. Ces théorèmes se démontrent en ayant recours, dans le premier cas, à la projection de la figure du centre de la sphère sur un plan, dans le second cas, à la projection sur un plan parallèlement à la droite PQ.