NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ROMUALD BLAZEÏEVSKI

Sur un problème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 385-391

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__385_1>

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. ROMUALD BLAZEIEVSKI.

L'équation

$$(1 - nyD)y_1^2 + m_1 y_1 - \tfrac{1}{4}(k - lD) = 0$$

et les deux autres qu'on obtient en changeant $m_1 y_1$ en

$m_2 y_2$, $m_3 y_3$ donnent pour y_i les expressions contenant les radicaux $\sqrt{D-a}$, $\sqrt{D-b}$, $\sqrt{D-c}$. Posons, pour abréger,

$$m_1(D-a)=\alpha, \qquad m_2(D-b)=\beta, \qquad m_3(D-c)=\gamma,$$

$$F_0=\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}, \qquad F_1=\sqrt{\gamma}-\sqrt{\alpha}, \qquad F_2=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta};$$

$$G_0=\frac{1}{m_2}\sqrt{\beta}-\frac{1}{m_3}\sqrt{\gamma}, \qquad G_1=\ldots., \qquad G_2=\ldots,$$

désignons par F', G' les F et les G où le signe moins est remplacé par le signe plus.

Nous aurons

$$F_0 F'_0 = m_2(D-b)-m_3(D-c),$$

$$G_0 G'_0 = \frac{D-b}{m_2}-\frac{D-c}{m_3}$$

ou bien

$$1-m_1 D = \frac{l}{m_2-m_3} G_0 G'_0, \qquad Dl-k=\frac{l}{m_2-m_3} F_0 F'_0.$$

L'équation déterminant y_1 sera

$$l G_0 G'_0 y_1^2 + m_1(m_2-m_3)y_1+\tfrac{1}{4} l F_0 F'_0 = 0.$$

Soit A une constante numérique, faisons

$$G_0 y_1 = AF_0,$$

substituons dans l'équation et divisons le premier membre par $F_0 G_0$, on trouve

$$A^2 l F_0 G'_0 + m_1(m_2-m_3)A+\tfrac{1}{4} l G_0 F'_0 = 0;$$

mais

$$F_0 G'_0 = (\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})\left(\frac{1}{m_2}\sqrt{\beta}+\frac{1}{m_3}\sqrt{\gamma}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m_2}\right)(-1+\sqrt{\beta\gamma}),$$

$$G_0 F'_0 = \left(\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m_2}\right)(-1-\sqrt{\beta\gamma}) - (A^2+\tfrac{1}{4})\left(\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m_2}\right)$$

$$+(A^2-\tfrac{1}{4})\sqrt{\beta\gamma}\left(\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m_2}\right)+m_1(m_2-m_3)=0.$$

Pour satisfaire à cette équation, supposons $A = \pm \frac{1}{2}$, ainsi

$$y_1 = \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}}{\frac{\sqrt{\beta}}{m_2} - \frac{\sqrt{\gamma}}{m_3}},$$

de même on pourrait constater que

$$y_2 = \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\gamma} - \sqrt{\alpha}}{\frac{\sqrt{\gamma}}{m_3} - \frac{\sqrt{\alpha}}{m_2}}, \qquad y_3 = \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\frac{\sqrt{\alpha}}{m_1} - \frac{\sqrt{\beta}}{m_2}}.$$

Les y sont liés par la relation

$$y_1 + y_2 + y_3 - \frac{1}{D},$$

équation rationnelle et homogène par rapport à $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$,

$$F_0 G_1 G_2 + F_1 G_0 G_2 + F_2 G_0 G_1 = \frac{2}{D} G_0 G_1 G_2$$

Mais

$$G_1 G_2 = \frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{m_1 m_3} - \frac{\alpha}{m_1^2} - \frac{\sqrt{\beta\gamma}}{m_2 m_3},$$

$$F_0 G_1 G_2 - (c - b) \frac{\sqrt{\alpha}}{m_1} + \left(\frac{D - c}{m_2} - \frac{D - a}{m_1}\right) \sqrt{\beta}$$
$$+ \left(\frac{D - a}{m_1} - \frac{D - b}{m_2}\right) \sqrt{\gamma} + \left(\frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_2}\right) \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{m_1},$$

$$F_1 G_0 G_2 = (a - c) \frac{\sqrt{\beta}}{m_2} + \left(\frac{D - a}{m_3} - \frac{D - b}{m_2}\right) \sqrt{\gamma}$$
$$- \left(\frac{D - b}{m_2} - \frac{D - c}{m_3}\right) \sqrt{\alpha} + \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3}\right) \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{m_2},$$

$$F_2 G_0 G_1 = (b - a) \frac{\sqrt{\gamma}}{m_3} + \ldots,$$

$$G_0 G_1 G_2 = \left(\frac{D - b}{m_2} - \frac{D - c}{m_3}\right) \frac{\sqrt{\alpha}}{m_1}$$
$$+ \left(\frac{D - c}{m_3} - \frac{D - a}{m_2}\right) \frac{\sqrt{\beta}}{m_2}$$
$$+ \left(\frac{D - a}{m_1} - \frac{D - b}{m_2}\right) \frac{\sqrt{\gamma}}{m_3}.$$

L'équation sera

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{aligned} &(m_3 - m_2)\left(m_1 D^2 - D + \frac{2}{m_1}\right)\sqrt{\alpha}\\ &+(m_1 - m_3)\left(m_2 D^2 - D + \frac{2}{m_2}\right)\sqrt{\beta}\\ &+(m_2 - m_1)\left(m_3 D^2 - D + \frac{2}{m_3}\right)\sqrt{\gamma} = 0. \end{aligned}\right.$$

Comme il est facile de se convaincre, le facteur de $\sqrt{\alpha}$ est

$$\begin{aligned} &\frac{c-b}{m_1} + \frac{D-b}{m_2} - \frac{D-c}{m_1}\\ &\quad + \frac{D-b}{m_1} - \frac{D-c}{m_3} - \frac{2}{m_1 D}\left(\frac{D-b}{m_2} - \frac{D-c}{m_3}\right), \end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{2(c-b)}{m_1} + \left(1 - \frac{2}{m_1 D}\right)\left(\frac{D-b}{m_2} - \frac{D-c}{m_3}\right),$$

mais

$$\frac{c}{m_3} - \frac{b}{m_2} = c\left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1}\right) - b\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) - \frac{c-b}{m_1} = \frac{b-c}{m_1};$$

le facteur de $\sqrt{\alpha}$ est

$$2\frac{c-b}{m_1} + (c-b)\left(1 - \frac{2}{m_1 D}\right)\left(D - \frac{1}{m_1}\right),$$

qu'on peut écrire

$$\frac{m_3 - m_2}{l D}\left(\frac{2}{m_1} - D + m_1 D^2\right).$$

On a pris dans l'expression

$$y_1 = \pm\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}}{\dfrac{\sqrt{\beta}}{m_2} - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{m_3}}$$

le signe supérieur.

Toutes les combinaisons de signes sont au nombre de quatre, car $G'_0 y_1 = \frac{1}{2}F'_0$ est aussi une solution, mais peut-être y a-t-il quelques conditions limitant le nombre de solutions.

L'analyse précédente nous enseigne que le problème dépend seulement de $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}}, \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma}}$. Si l'on suppose, M, N étant des constantes,

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}} = M\cos\theta, \qquad \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma}} = N\sin\theta,$$

on peut exprimer les quantités y_i par les fonctions trigonométriques et l'argument θ sera déterminé par l'équation (E) : il se peut que θ soit complexe, de la forme $\theta' + \theta'' i$; cela introduira les fonctions hyperboliques.

Nous avons

$$m_1(D-a) = M^2 m_3(D-c)\cos^2\theta,$$
$$m_2(D-b) = N^2 m_3(D-c)\sin^2\theta:$$

on doit avoir l'identité, quel que soit D,

$$N^2 m_1(D-a) + M^2 m_2(D-b) = M^2N^2 m_3(D-c),$$
$$m_1 N^2 + m_2 M^2 = m_3 M^2 N^2,$$
$$m_1 a N^2 + m_2 b M^2 = M^2 N^2 m_3 c,$$
$$M^2 = \frac{m_1(b-a)}{m_3(b-c)}, \qquad N^2 = \frac{m_2(b-a)}{m_3(c-a)}.$$

Pour que la substitution soit réelle, il faut qu'on ait

$$b > c > a,$$

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} > \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} > \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3},$$

ou bien

$$m_1 < m_2 < m_3,$$

ou bien

$$w_1 < w_2 < w_3.$$

En disposant les données du problème dans un tel ordre, on est assuré que M, N sont réels.

Je vais ajouter quelques remarques au sujet de l'élimination. Soit C le cercle circonscrit au triangle cherché; nous avons posé

$$kD^2 = \frac{1}{x^2}, \qquad lD^3 = \frac{q}{x^3}, \qquad Dx = q_0;$$

on a

$$kq_0^2 = 1, \qquad lq_0^3 = q, \qquad q = \frac{l}{k^{\frac{3}{2}}};$$

les x_i satisfont à l'équation

$$t^3 - 2t^2 + yt - \frac{q}{z}(y-1) = 0.$$

Supposons que w_i varient de façon que les cercles inscrit et circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$ restent invariables. On a

$$z_1\zeta_1 = z_2\zeta_2 = z_3\zeta_3 = \frac{w_1 w_3 w_2}{D} x_1 x_2 x_3 = C,$$

en désignant par C une constante indépendante de $w_1 w_2 w_3$, comme

$$l = m_1 m_2 m_3 = \frac{w_1 w_2 w_3}{w_2 w_3 . w_1 w_3 . w_1 w_2} = \frac{1}{w_1 w_2 w_3},$$

on a

$$x_1 x_2 x_3 = lCD.$$

Ainsi

$$\frac{q}{z}(y-1) = lCD,$$

mais

$$z = x - x^3 = \frac{q_0}{D} - \frac{q_0^3}{D^3} = \frac{q_0}{D}\left(1 - \frac{1}{kD^2}\right),$$

$$y - 1 = \frac{l}{q} CD\left(1 - \frac{1}{kD^2}\right)\frac{q_0}{D} = C\left(k - \frac{1}{D^2}\right);$$

C est une fonction rationnelle de D; je ne cite pas ici la démonstration de la formule

$$C = \frac{(lD - k)D^4}{4(kD^2 - 1) - 8lD^3}$$

qui ne présente aucune difficulté, mais est seulement assez longue, comme toutes celles fondées sur la théorie des fonctions symétriques.