NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. WEBER

Formule de Cardan modifiée par Cayley

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 347-349

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__347_1>

FORMULE DE CARDAN MODIFIÉE PAR CAYLEY;

PAR M. H. WEBER,
Professeur à Göttingen.

TRADUIT PAR M. L. LAUGEL.

Cette démonstration est extraite du premier Volume du *Traité d'Algèbre* de M. H. Weber (Leipzig, Teubner, 1894), Ouvrage appelé sans aucun doute à jouer de nos jours le rôle de l'*Algèbre* de Serret autrefois, en nous initiant aux découvertes faites, depuis la publication de ce dernier livre, par l'éminent auteur et les savants de l'Allemagne et par nos compatriotes MM. Hermite, Laguerre, Jordan, etc.

Considérons dans la formule de Cardan les deux grandeurs u et v définies par les expressions

$$(1)\qquad \begin{cases} u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\ v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \end{cases}$$

On sait que toute racine cubique a trois valeurs distinctes que l'on obtient en multipliant l'une d'elles par 1, ε, ε^2 $(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0)$.

Par conséquent les grandeurs u, v définies par (1) ont trois valeurs et leur somme $u + v = y$, y, représentant les racines de l'équation du troisième degré

$$y^3 + py + q = 0,$$

possède, lorsqu'on n'a égard qu'aux expressions (1), *neuf valeurs distinctes*. Ces valeurs donnent du reste les trois solutions de l'équation du troisième degré lorsqu'on les distingue par la condition connue

$$(2)\qquad 3uv = -p.$$

La formule de Cardan présente donc une lacune, en ce sens que seule elle ne suffit pas à déterminer sans discussion les racines. Voici comment l'illustre et regretté Cayley a remédié à ce défaut [Cayley, *Philosophical Magaz.*, vol. XXI, 1861; *Collected math. Papers*, vol. V, p. 310)].

Définissons deux nouvelles grandeurs ξ, η par

$$(3)\qquad u = \xi^2\eta, \qquad v = \xi\eta^2.$$

Multiplions ces deux grandeurs en tenant compte de (2);

il vient

$$\xi\eta = \sqrt[3]{-\frac{p}{3}}. \tag{4}$$

Portons cette valeur en (3) et remplaçons u et v par leurs expressions tirées de (1), nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \sqrt[3]{\frac{3q}{2p} + \sqrt{\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{p}{3}}}, \\ \eta &= \sqrt[3]{\frac{3q}{2p} - \sqrt{\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{p}{3}}}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Si l'on écrit alors l'inconnue y de l'équation du troisième degré sous la forme

$$y = \xi\eta(\xi + \eta), \tag{6}$$

on obtient une expression qui, lorsque l'on remplace indépendamment l'un de l'autre ξ par ξ, $\varepsilon\xi$, $\varepsilon^2\xi$ et η par η, $\varepsilon\eta$, $\varepsilon^2\eta$ ne prendra plus *neuf* valeurs, mais *seulement* les *trois* valeurs suivantes

$$\begin{gathered} \xi^2\eta + \xi\eta^2, \\ \varepsilon\xi^2\eta + \varepsilon^2\xi\eta^2, \\ \varepsilon^2\xi^2\eta + \varepsilon\xi\eta^2, \end{gathered}$$

racines de l'équation.