ANDRÉ CAZAMIAN

Sur le théorème de Carnot

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 30-40

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__30_1>

SUR LE THÉORÈME DE CARNOT;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

I. — SUR LE THÉORÈME CORRÉLATIF DE CELUI DE CARNOT.

Nous partirons de la proposition suivante :

(A) *Considérons sur chaque côté d'un polygone* ABC...HKL *un même nombre de points* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$;

$\alpha', \beta', \gamma', \ldots, \lambda'; \ldots; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \ldots, \lambda_n$ *liés par la relation segmentaire*

$$\frac{A\alpha}{B\alpha}\frac{A\beta}{B\beta}\cdots\frac{A\lambda}{B\lambda}\frac{B\alpha'}{C\alpha'}\frac{B\beta'}{C\beta'}\cdots\frac{B\lambda'}{C\lambda'}\cdots\frac{L\alpha_n}{A\alpha_n}\frac{L\beta_n}{A\beta_n}\cdots\frac{L\lambda_n}{A\lambda_n}=\pm 1,$$

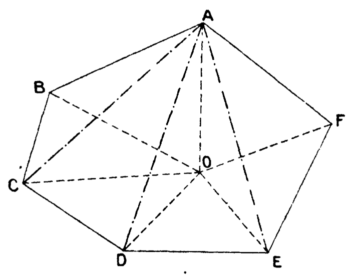
que nous appellerons relation de Carnot.

Prenons la figure polaire réciproque relativement à un cercle de ce polygone et des points situés sur ses côtés. Nous obtenons ainsi un nouveau polygone $A_1 B_1 C_1 \ldots H_1 K_1 L_1$ et des droites issues en nombre égal de chaque sommet de ce nouveau polygone, et correspondant aux points α, β, $\ldots$, α', β', ... Ces droites rencontrent chaque côté du polygone ne passant pas par le sommet d'où elles sont issues en un certain nombre de points.

Entre tous les points ainsi obtenus et les sommets du polygone il existe une relation de Carnot.

Remarquons d'abord que, si l'on joint un point O à

Fig. 1.



tous les sommets d'un polygone ABCDEF, on a la relation

$$(1)\qquad \frac{\sin OAB}{\sin OBA}\frac{\sin OBC}{\sin OCB}\cdots\frac{\sin OFA}{\sin OAF}=1.$$

On a en effet

$$\frac{\sin OAB}{\sin OBA}=\frac{OB}{OA},\qquad \frac{\sin OBC}{\sin OCB}=\frac{OC}{OB},\qquad \ldots.$$

En multipliant membre à membre, le second membre devient égal à l'unité.

En particulier, si l'on joint un sommet A du polygone à tous les autres sommets, on a

$$(2) \qquad \frac{\sin ABC}{\sin ACB}\,\frac{\sin ACD}{\sin ADC}\cdots\frac{\sin AEF}{\sin AFE}=1.$$

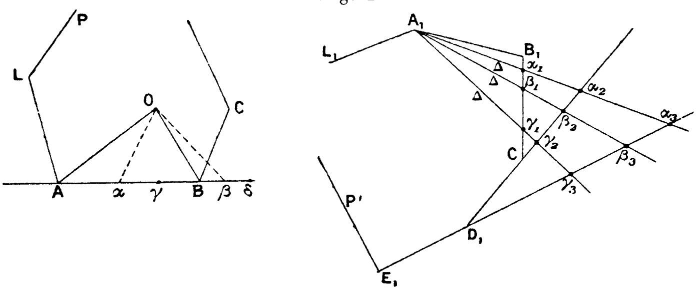
Joignons maintenant le point O à un certain nombre n de points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ situés sur le côté AB. On peut écrire

$$A\alpha = O\alpha\,\frac{\sin AO\alpha}{\sin OAB}, \qquad B\alpha = O\alpha\,\frac{\sin BO\alpha}{\sin OBA}$$

donc

$$\frac{A\alpha}{B\alpha}=\frac{\sin OBA}{\sin OAB}\,\frac{\sin AO\alpha}{\sin BO\alpha}.$$

Fig. 2.



On aura, par suite,

$$(3) \quad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{A\alpha}{B\alpha}\,\dfrac{A\beta}{B\beta}\cdots\dfrac{A\lambda}{B\lambda}\\[2ex] \quad =\left(\dfrac{\sin OBA}{\sin OAB}\right)^{n}\dfrac{\sin AO\alpha}{\sin BO\alpha}\,\dfrac{\sin AO\beta}{\sin BO\beta}\cdots\dfrac{\sin AO\lambda}{\sin BO\lambda}.\end{array}\right.$$

En joignant de même le point O à n points $\alpha', \beta', \ldots, \lambda'; \ldots; \alpha_n, \beta_n, \ldots, \lambda_n$ pris sur chaque côté du polygone, on aura

$$\begin{aligned}&\frac{A\alpha}{B\alpha}\,\frac{A\beta}{B\beta}\cdots\frac{A\lambda}{B\lambda}\,\frac{B\alpha'}{C\alpha'}\,\frac{B\beta'}{C\beta'}\cdots\frac{L\alpha_n}{A\alpha_n}\,\frac{L\beta_n}{A\beta_n}\cdots\frac{L\lambda_n}{A\lambda_n}\\ &\quad=\left(\frac{\sin OAB}{\sin OBA}\,\frac{\sin OBC}{\sin OCB}\cdots\frac{\sin OLA}{\sin OAL}\right)^{n}\\ &\qquad\times\frac{\sin AO\alpha}{\sin BO\alpha}\,\frac{\sin AO\beta}{\sin BO\beta}\cdots\frac{\sin BO\alpha'}{\sin CO\alpha'}\,\frac{\sin BO\beta'}{\sin CO\beta'}\cdots\frac{\sin LO\lambda_n}{\sin AO\lambda_n},\end{aligned}$$

La première partie du second membre est égale à l'unité d'après (2). Donc, si les points considérés sont liés par une relation de Carnot, le premier membre étant égal à l'unité, il en est de même, alors, de la seconde partie du second membre, et l'on a la relation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin AO\alpha}{\sin BO\alpha}\,\frac{\sin AO\beta}{\sin BO\beta}\cdots\frac{\sin AO\lambda}{\sin BO\lambda}\,\frac{\sin BO\alpha'}{\sin CO\alpha'}\cdots\\ &\qquad\times\frac{\sin BO\lambda'}{\sin CO\lambda'}\cdots\frac{\sin LO\alpha_n}{\sin AO\alpha_n}\cdots\frac{\sin LO\lambda_n}{\sin AO\lambda_n}=\pm 1.\end{aligned}\right.$$

Prenons maintenant la polaire réciproque du polygone P et des points situés sur ses côtés par rapport à un cercle de centre O. Au côté AB correspond le point A_1, et aux points α, β, ..., λ situés sur AB, des droites Δ issues de A_1. Appelons α_1, β_1, ..., λ_1 les points où ces droites rencontrent le côté B_1C_1 du polygone P'. On a [relation (3)]

$$\begin{aligned}&\frac{B_1\alpha_1}{C_1\alpha_1}\,\frac{B_1\beta_1}{C_1\beta_1}\cdots\frac{B_1\lambda_1}{C_1\lambda_1}\\ &\quad=\left(\frac{\sin A_1B_1C_1}{\sin A_1C_1B_1}\right)^n\frac{\sin C_1A_1\alpha_1}{\sin B_1A_1\alpha_1}\,\frac{\sin C_1A_1\beta_1}{\sin B_1A_1\beta_1}\cdots\frac{\sin C_1A_1\lambda_1}{\sin B_1A_1\lambda_1}.\end{aligned}$$

Appelant de même α_2, β_2, ..., λ_2; ...; α_n, β_n, ..., λ_n les points où les droites Δ rencontrent les côtés C_1D_1, ..., K_1L_1 du polygone, on a

$$\begin{aligned}&\frac{C_1\alpha_2}{D_1\alpha_2}\,\frac{C_1\beta_2}{D_1\beta_2}\cdots\frac{C_1\lambda_2}{D_1\lambda_2}\\ &\quad=\left(\frac{\sin A_1C_1D_1}{\sin A_1D_1C_1}\right)^n\frac{\sin D_1A_1\alpha_2}{\sin C_1A_1\alpha_2}\,\frac{\sin D_1A_1\beta_2}{\sin C_1A_1\beta_2}\cdots\frac{\sin D_1A_1\lambda_2}{\sin C_1A_1\lambda_2}.\end{aligned}$$

. . . . ,

$$\frac{K_1\alpha_n}{L_1\alpha_n}\,\frac{K_1\beta_n}{L_1\beta_n}\cdots\frac{K_1\lambda_n}{L_1\lambda_n}=\left(\frac{\sin A_1K_1L_1}{\sin A_1L_1K_1}\right)^n\frac{\sin L_1A_1\alpha_n}{\sin L_1A_1\alpha_n}\cdots.$$

Multiplions membre à membre, la première partie du second membre est égale à l'unité [d'après la relation (2)]; dans la seconde partie, les angles tels que $C_1A_1\alpha_1$ et $C_1A_1\alpha_2$ étant les mêmes, il reste finalement la relation

$$\frac{B_1\alpha_1}{C_1\alpha_1}\cdots\frac{B_1\lambda_1}{C_1\lambda_1}\,\frac{C_1\alpha_2}{D_1\alpha_2}\cdots\frac{C_1\lambda_2}{D_1\lambda_2}\,\frac{K_1\alpha_n}{L_1\alpha_n}\cdots\frac{K_1\lambda_n}{L_1\lambda_n}$$
$$=\frac{\sin L_1A_1\alpha_1}{\sin B_1A_1\alpha_1}\,\frac{\sin L_1A_1\beta_1}{\sin B_1A_1\beta_1}\cdots\frac{\sin L_1A_1\lambda_1}{\sin B_1A_1\lambda_1}.$$

Ainsi, en formant pour les points d'intersection avec les côtés du polygone P' des droites Δ issues de A_1 le produit que représente le premier membre, ce produit est égal au produit des rapports des sinus des angles que chaque droite Δ fait avec les côtés du polygone issus du sommet A_1 d'où elles partent; de même, en formant pour les droites Δ' issues de B_1 le produit analogue; ce produit sera égal au produit des rapports des sinus des angles que chaque droite Δ' fait avec les côtés B_1A_1 et B_1C_1, etc.

En multipliant membre à membre toutes les égalités ainsi obtenues, dans le premier membre on obtiendra le produit des rapports des distances de *tous* les points d'intersection sur chaque côté aux deux sommets du polygone limitant ce côté; quant au second membre, il sera égal (en valeur absolue) à l'unité d'après la relation (4), car l'angle $L_1A_1\alpha_1$ par exemple est égal (ou supplémentaire) à l'angle $AO\alpha$, dans le premier polygone, les côtés de ces deux angles étant perpendiculaires.

Donc la proposition se trouve démontrée.

Conséquences du théorème précédent. — Trois points étant pris en ligne droite sur les côtés d'un triangle, il existe entre ces points une relation de Carnot (théorème de Ménélaüs).

Transformons par polaires réciproques et appliquons le théorème (A). On voit que trois droites concourantes, issues des trois sommets d'un triangle, rencontrent les côtés opposés en trois points entre lesquels existe une relation de Carnot. C'est le théorème de Jean de Céva.

Plus généralement, les six points d'intersection d'une conique et des côtés d'un triangle sont liés par une relation de Carnot. Corrélativement, d'après le théorème (A), si l'on mène par les sommets d'un triangle les tangentes à une conique, elles rencontrent les côtés du triangle en six points liés par une relation de Carnot.

Plus généralement encore, on est conduit, dans le cas d'un polygone quelconque et d'une courbe algébrique quelconque, à un théorème énoncé et démontré algébriquement par M. L. Ravier (*Nouvelles Annales*, août 1892) et relatif aux points d'intersection avec les côtés d'un polygone des tangentes menées par chaque sommet à une courbe algébrique. Ces points sont liés par une relation de Carnot.

On sait que, dans le cas d'une conique et d'un triangle, la réciproque du théorème de Carnot est vraie. La réciproque de son corrélatif l'est également, de sorte que l'on peut énoncer la proposition suivante :

Six points étant pris sur les côtés d'un triangle, deux sur chaque côté, et liés par une relation de Carnot :

1° *Ces six points sont sur une même conique;*

2° *Les droites joignant chaque sommet du triangle aux deux points situés sur le côté opposé touchent une même conique.*

En d'autres termes, les points d'intersection avec chaque côté d'un triangle des tangentes menées par chaque sommet à une conique sont sur une même conique, et inversement les droites joignant chaque sommet aux points d'intersection d'une conique avec les côtés touchent une même conique.

Cas particuliers :

En joignant les points d'intersection de deux trans-

versales avec les côtés d'un triangle aux sommets, on obtient six droites tangentes à une même conique.

En joignant chaque sommet d'un triangle à deux points du plan, les droites ainsi obtenues rencontrent les côtés du triangle en six points situés sur une même conique.

Cette dernière proposition, bien connue, est due à Steiner.

II. — Applications (triangles homologiques).

(B) Théorème. — *Lorsque deux triangles sont homologiques :*

1° *Les points où chaque côté de l'un sont rencontrés par les deux côtés non correspondants de l'autre sont sur une même conique;*

2° *Les droites joignant chaque sommet de l'un aux deux sommets non correspondants de l'autre touchent une même conique;*

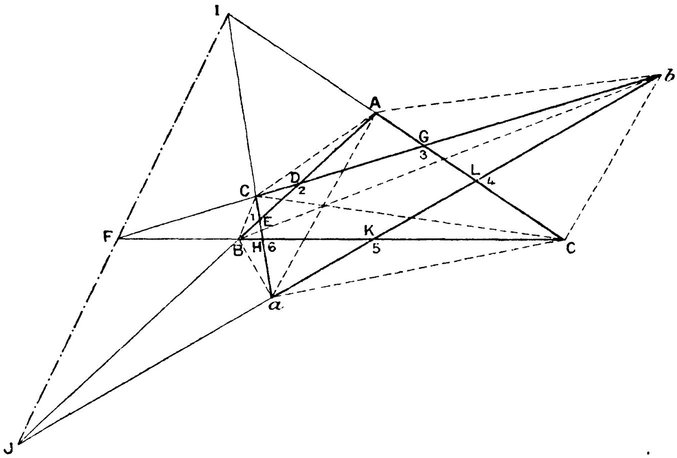
3° *Les droites joignant chaque sommet de l'un aux points où le côté opposé à ce sommet rencontre les deux côtés non correspondants de l'autre touchent une même conique;*

4° *Les points d'intersection de chaque côté de l'un avec les droites joignant le sommet opposé à ce côté aux deux sommets non correspondants de l'autre sont sur une même conique.*

Soient ABC, *abc* deux triangles homologiques. Les sommets correspondants (A, *a*), (B, *b*), (C, *c*) sont situés sur trois droites concourantes et les côtés correspondants (AB, *ab*), (AC, *ac*), (BC, *bc*) se rencontrent en trois points situés sur une même droite IFJ.

Ces six points H, K, L, G, D, E où chaque côté d'un triangle est rencontré par les côtés non correspondants de l'autre sont sur une même conique. En effet, le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle ABC coupé par

Fig. 3.



les transversales bc, ac, ab, IFJ, donne successivement les relations

$$\overline{AD}\times\overline{BF}\times\overline{CG}=\overline{AG}\times\overline{CF}\times\overline{BD},$$
$$\overline{AE}\times\overline{BH}\times\overline{CI}=\overline{AI}\times\overline{CH}\times\overline{BE},$$
$$\overline{AJ}\times\overline{BK}\times\overline{CL}=\overline{AL}\times\overline{CK}\times\overline{BJ},$$
$$\overline{AI}\times\overline{BJ}\times\overline{CF}=\overline{AJ}\times\overline{BF}\times\overline{CI}.$$

Multiplions membre à membre ces quatre relations, il vient, après simplifications,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}\overline{AD}\times\overline{AE}\times\overline{BH}\times\overline{BK}\times\overline{CL}\times\overline{CG}\\ \quad =\overline{AG}\times\overline{AL}\times\overline{CK}\times\overline{CH}\times\overline{BE}\times\overline{BD}.\end{array}\right.$$

1° Donc (réciproque du théorème de Carnot) les points H, K, L, G, D, E sont sur une même conique.

2° Transformons par dualité : à deux triangles homologiques correspondent deux triangles homologiques ; on obtient la proposition énoncée.

3° La troisième partie résulte de la relation (1) et de la réciproque du théorème corrélatif de celui de Carnot.

4° La quatrième partie s'obtient en appliquant à la troisième le principe de dualité.

Réciproques. — 1° *Une conique quelconque coupant les côtés d'un triangle en six points, si l'on numérote ces points en partant d'un sommet du triangle* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *les droites* 23, 45, 61 *forment un triangle homologique du triangle donné.*

En effet, en appliquant le théorème de Carnot, on a la relation

$$\overline{AD} \times \overline{AE} \times \overline{BH} \times \overline{BK} \times \overline{CL} \times \overline{CG}$$
$$= \overline{AG} \times \overline{AL} \times \overline{CK} \times \overline{CH} \times \overline{BE} \times \overline{BD},$$

et, en appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle ABC coupé par les transversales bc, ac, ab,

$$\overline{AD} \times \overline{BF} \times \overline{CG} = \overline{AG} \times \overline{CF} \times \overline{BD},$$
$$\overline{AE} \times \overline{BH} \times \overline{CI} = \overline{AI} \times \overline{CH} \times \overline{BE},$$
$$\overline{AJ} \times \overline{BK} \times \overline{CL} = \overline{AL} \times \overline{CK} \times \overline{BJ}.$$

Multipliant membre à membre les trois dernières relations et tenant compte de la première, il vient

$$\overline{AI} \times \overline{BJ} \times \overline{CF} = \overline{AJ} \times \overline{BF} \times \overline{CI}.$$

Donc (réciproque du théorème de Ménélaüs) les trois points I, F, J sont en ligne droite et les deux triangles ABC, abc sont homologiques.

2° *Si par les sommets d'un triangle on mène les tangentes à une conique quelconque, et si l'on numérote successivement ces tangentes à partir d'un sommet* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *les points de rencontre des tangentes* (2, 3), (4, 5), (6, 1) *forment un triangle homologique du premier.*

Ce théorème est corrélatif du précédent.

On peut encore énoncer ainsi les deux réciproques précédentes :

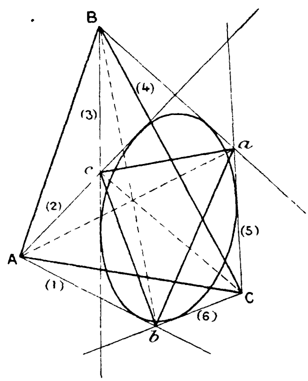
I. Lorsqu'un hexagone est inscrit dans une conique, si l'on numérote successivement les côtés 1, 2, 3, 4, 5, 6, les côtés (1, 3, 5) et (2, 4, 6) forment deux triangles homologiques [1].

Donc :

1° Les points de rencontre des côtés (1 et 4), (2 et 5), (3 et 6) sont en ligne droite (théorème de Pascal) ;

2° Les droites joignant les points (1, 3) [2] et (4, 6) ; (2, 4) et (5, 1) ; (3, 5) et (6, 2) sont concourantes.

Fig. 4.



Corollaires. — Les droites joignant le sommet (1, 3) aux points (2, 4) et (2, 6) et les droites analogues (droites joignant chaque sommet d'un triangle aux som-

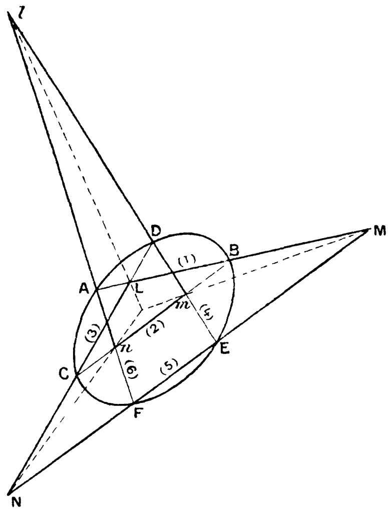
---

[1] Il nous paraît préférable d'énoncer ainsi le théorème de Pascal, car cet énoncé implique, outre la propriété si connue de l'hexagone inscrit, d'autres propriétés intéressantes.

[2] On a appelé point (1, 3) le point situé à l'intersection des côtés numérotés 1 et 3.

mets non correspondants de l'autre) touchent une même conique.

Fig. 5.



On obtiendra deux autres corollaires en appliquant les deux dernières parties du théorème fondamental (B).

II. Lorsqu'un hexagone est circonscrit à une conique, si l'on numérote successivement les sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6, en joignant les sommets (1, 3, 5) et (2, 4, 6), on forme deux triangles homologiques.

Donc :

1° Les droites joignant les sommets correspondants (1 et 4), (2 et 5), (3 et 6) sont concourantes (théorème de Brianchon).

2° Les points de rencontre des côtés correspondants (1, 3) et (4, 6); (2, 4) et (5, 1); (3, 5) et (6, 2) sont en ligne droite.

En appliquant le théorème (B), on obtiendra trois autres propriétés intéressantes de la figure.