Nouvelles annales de mathématiques

P. Sondat

Sur quelques propriétés des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 309-329

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__309_0>

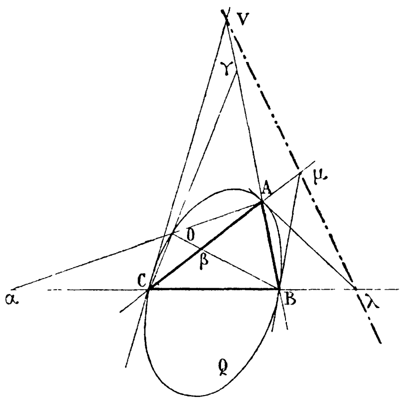
SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES;

PAR M. P. SONDAT.

1. Comme applications d'une Note insérée dans les *Nouvelles Annales* (1893, p. 360), je me propose de démontrer quelques propriétés des coniques.

Je rappelle d'abord que si un point $O(\alpha, \beta, \gamma)$, rapporté, en coordonnées *segmentaires*, à un triangle de

Fig. 1.



référence ABC, appartient à une droite $X(\lambda, \mu, \nu)$, l'équation

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1 \tag{1}$$

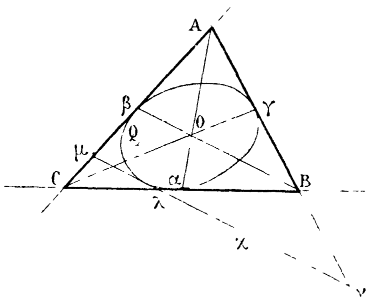
est à la fois celle de X en coordonnées *ponctuelles*, et celle de O en coordonnées *tangentielles*.

Si le point O cesse d'appartenir à X, l'équation

$$\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1 \tag{2}$$

représente aussi, en coordonnées ponctuelles, si X est fixe, la conique Q (*fig.* 1) tangente en A, B, C aux droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$, et, en coordonnées tangentielles, si O est fixe, la conique Q_1 (*fig.* 2) inscrite à ABC en α, β, γ.

Fig. 2.



Nous dirons que la conique Q est circonscrite à ABC selon la droite X, et que la conique Q_1 est inscrite selon le point O.

2. Le lieu du point O pour lequel Q_1 admet la tangente fixe x est la conique Q circonscrite selon cette droite, et, corrélativement, l'enveloppe de X, pour laquelle Q passe par le point fixe O, est la conique Q_1 inscrite selon ce point. Ainsi le lieu du point O, pour lequel Q_1 est une parabole, est l'ellipse circonscrite à ABC selon la droite à l'infini, et l'enveloppe de la droite X, pour laquelle Q passe par le centre de gravité de ABC, est l'ellipse inscrite selon ce centre.

3. Soit $O(\alpha, \beta, \gamma)$ un point lié à la droite $X(\lambda, \mu, \nu)$ par l'équation

$$(\lambda - \alpha)(\mu - \beta)(\nu - \gamma) + 1 = 0.$$

En vertu des égalités

$$\lambda\mu\nu = +1, \qquad \alpha\beta\gamma = -1,$$

cette équation peut s'écrire

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\beta}{\mu}-1\right)\left(\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\mu}{\beta}-1\right)=0,$$

et se décompose en celles-ci

$$\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\beta}{\mu}=1, \qquad \frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\mu}{\beta}=1.$$

Donc (1)

1° Avec X fixe, O appartient à X ou à Q;

2° Avec O fixe, X enveloppe O ou Q_1.

Comme les triangles αCA, βAB, γBC, coupés par les droites BOβ, COγ, AOβ, donnent

$$\frac{OA}{O\alpha}=\gamma(1-\alpha), \qquad \frac{OB}{O\beta}=\alpha(1-\beta), \qquad \frac{OC}{O\gamma}=\beta(1-\gamma),$$

le lieu du point O pour lequel

$$OA.OB.OC=O\alpha.O\beta.O\gamma$$

aura pour équation

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+1=0,$$

c'est-à-dire sera, avec la droite à l'infini (111), l'ellipse circonscrite à ABC selon cette droite.

4. Coupons la conique Q par la droite $X_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ la rencontrant aux points $O(\alpha, \beta, \gamma)$ et $O_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Comme O appartient à X_1 et à Q, on a (1)

$$\frac{\lambda_1}{\alpha}+\frac{\beta}{\mu_1}=1, \qquad \frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\mu}{\beta}=1,$$

et, en éliminant β,

$$(4) \qquad \alpha^2-\left(\lambda+\lambda_1-\frac{\lambda\mu}{\mu_1}\right)\alpha+\lambda\lambda_1=0.$$

Or les racines de cette équation convenant à O et O_1, on a

$$(5)\quad \alpha\alpha_1 = \lambda\lambda_1, \qquad \text{et de même} \qquad \beta\beta_1 = \mu\mu_1, \qquad \gamma\gamma_1 = \nu\nu_1.$$

Si X_1 est une tangente, O_1 se confond avec O, et l'on a, pour ce point de contact,

$$(6)\qquad \alpha^2 = \lambda\lambda_1, \qquad \beta^2 = \mu\mu_1, \qquad \gamma^2 = \nu\nu_1,$$

L'équation (2), qui devient alors

$$(7)\qquad \pm\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \pm \sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}} = 1,$$

est celle de Q en coordonnées tangentielles, et exprime, sous sa forme rationnelle

$$(8)\qquad \left(\lambda + \lambda_1 - \frac{\lambda\mu}{\mu_1}\right)^2 - 4\lambda\lambda_1 = 0,$$

que les racines de (4) sont égales.

5. Théorème. — *Si sur la conique Q, circonscrite à ABC selon la droite* $X(\lambda, \mu, \nu)$, *on prend trois points* $A_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $B_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $C_1(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, *le triangle* $A_1B_1C_1$ *sera circonscrit à la conique* Q_1, *inscrite à ABC selon le point* $O(\alpha, \beta, \gamma)$, *ayant pour coordonnées*

$$\alpha = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\lambda^2}, \qquad \beta = \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\mu^2}, \qquad \gamma = \frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\nu^2}.$$

Soient, en effet, $a_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $b_1(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $c_1(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ les côtés de $A_1B_1C_1$. On a (4)

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha_2\alpha_3 = \lambda\lambda_1, & \alpha_1\alpha_3 = \lambda\lambda_2, & \alpha_1\alpha_2 = \lambda\lambda_3, \\ \beta_2\beta_3 = \mu\mu_1, & \beta_1\beta_3 = \mu\mu_2, & \beta_1\beta_2 = \mu\mu_3, \\ \gamma_2\gamma_3 = \nu\nu_1, & \gamma_1\gamma_3 = \nu\nu_2, & \gamma_1\gamma_2 = \nu\nu_3. \end{array}\right.$$

Or le point A_1 appartenant à Q, on a (1)

$$\frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta_1} = 1,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\lambda^2}:\frac{\alpha_3\alpha_3}{\lambda}+\frac{\beta_2\beta_3}{\mu}:\frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{\mu^2}=1$$

ou

$$\frac{\alpha}{\lambda_1}+\frac{\mu_1}{\beta}=1,$$

c'est-à-dire (1) que a_1 enveloppe Q_1.

On prouverait de même que b_1 et c_1 sont des tangentes à Q_1.

Remarque. — Si les points A_1, B_1, C_1 sont ceux où les droites qui joignent un point $\omega(x, y, z)$ de X aux sommets A, B, C, coupent Q, on aura

$$A_1\left(x, \frac{\mu z}{\nu}, \frac{\nu y}{\mu}\right),\quad B_1\left(\frac{\lambda z}{\nu}, y, \frac{\nu x}{\lambda}\right),\quad C_1\left(\frac{\lambda y}{\mu}, \frac{\mu x}{\lambda}, z\right).$$

Il résulte de là que

$$\alpha=-\lambda,\qquad \beta=-\mu,\qquad \gamma=-\nu,$$

ou O est le pôle de X(triangle ABC).

De plus, on a les trois systèmes homologiques

$$\left|\begin{matrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1\end{matrix}\right|,\qquad \left|\begin{matrix} A & B & C \\ C_1 & A_1 & B_1\end{matrix}\right|,\qquad \left|\begin{matrix} A & B & C \\ B_1 & C_1 & A_1\end{matrix}\right|,$$

dont les centres appartiennent à X, et dont les axes passent par O.

6. Menons à la conique Q_1 les tangentes $X(\lambda, \mu, \nu)$ et $X_1(\lambda_1, \mu, \nu_1)$, partant d'un point $O_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Comme X enveloppe O_1 et Q_1, on a (1)

$$\frac{\lambda}{\alpha_1}+\frac{\beta_1}{\mu}=1,\qquad \frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\mu}{\beta}=1,$$

et, en éliminant μ,

$$\lambda^2-\left(\alpha+\alpha_1-\frac{\alpha_1\beta_1}{\beta}\right)\lambda+\alpha\alpha_1=0, \tag{9}$$

et comme les racines de cette équation conviennent à X et X_1,

$$(10)\quad \lambda\lambda_1 = \alpha\alpha_1, \qquad \text{et de même,} \qquad \mu\mu_1 = \beta\beta_1, \qquad \nu\nu_1 = \gamma\gamma_1.$$

Si O_1 se porte sur Q_1, X_1 se superpose à X, et l'on a, pour cette tangente,

$$(11)\qquad \lambda^2 = \alpha\alpha_1, \qquad \mu^2 = \beta\beta_1, \qquad \nu^2 = \gamma\gamma_1,$$

L'équation (2), qui devient alors

$$(12)\qquad \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}} \pm \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta}} = 1,$$

est celle de Q_1 en coordonnées ponctuelles, et exprime, sous sa forme rationnelle

$$(13)\qquad \left(\alpha + \alpha_1 - \frac{\alpha_1\beta_1}{\beta}\right)^2 - 4\alpha\alpha_1 = 0,$$

que les racines de (9) sont égales.

7. Théorème. — *Si à la conique* Q_1 *inscrite à* ABC *selon le point* $O(\alpha, \beta, \gamma)$, *on mène trois tangentes* $a_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $b_1(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $c_1(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$, *le trilatère* $a_1b_1c_1$ *sera inscrit dans la conique* Q *circonscrite à* ABC *selon la droite* $X(\lambda, \mu, \nu)$, *ayant pour coordonnées*

$$\lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\alpha^2}, \qquad \mu = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\beta^2}, \qquad \nu = \frac{\nu_1\nu_2\nu_3}{\gamma^2}.$$

Soient, en effet, $A_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $B_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $C_1(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ les sommets de $a_1b_1c_1$. On a (6)

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda_2\lambda_3 = \alpha\alpha_1, & \lambda_1\lambda_3 = \alpha\alpha_2, & \lambda_1\lambda_2 = \alpha\alpha_3, \\ \mu_2\mu_3 = \beta\beta_1, & \mu_1\mu_3 = \beta\beta_2, & \mu_1\mu_2 = \beta\beta_3, \\ \nu_2\nu_3 = \gamma\gamma_1, & \nu_1\nu_3 = \gamma\gamma_2, & \nu_1\nu_2 = \gamma\gamma_3. \end{array}\right.$$

Or la droite a_1 étant tangente à Q_1, on a (1)

$$\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta} = 1,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\lambda_2\lambda_3}{\alpha} : \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\alpha^2} + \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\beta^2} : \frac{\mu_2\mu_3}{\beta} = 1$$

ou

$$\frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta_1} = 1,$$

c'est-à-dire (1) que A_1 est sur Q.

On prouverait de même que B_1 et C_1 appartiennent à Q.

Remarque. — Si a_1, b_1, c_1 sont les tangentes à Q_1, menées par les points où une droite $\rho(x, y, z)$, passant par O, coupe les côtés de ABC, on a

$$a_1\left(x, \frac{\beta z}{\gamma}, \frac{\gamma y}{\beta}\right), \quad b_1\left(\frac{\alpha z}{\gamma}, y, \frac{\gamma x}{\alpha}\right), \quad c_1\left(\frac{\alpha y}{\beta}, \frac{\beta x}{\alpha}, z\right).$$

Il en résulte que $\lambda = -\alpha$, $\mu = -\beta$, $\nu = -\gamma$, ou X est la polaire de O.

De plus, on a les trois systèmes homologiques

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ C_1 & A_1 & B_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ B_1 & C_1 & A_1 \end{vmatrix},$$

et il est facile de voir que les trois axes passent par O et que les trois centres se trouvent sur X.

8. Théorème. — *Étant données la conique* Q *circonscrite à* ABC *selon la droite* $X(\lambda, \mu, \nu)$ *et la conique* Q_1 *inscrite selon le point* $O(\alpha, \beta, \gamma)$, *il existe une infinité de triangles inscrits dans* Q *et circonscrits à* Q_1.

Soit $A_1 B_1 C_1$ un triangle inscrit dans Q; il sera circonscrit à Q_1 si l'on a (théorème V),

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha\lambda^2, \qquad \beta_1\beta_2\beta_3 = \beta\mu^2, \qquad \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma\nu^2.$$

Or les deux dernières conditions se réduisent, en vertu des équations de Q, à la suivante

$$\nu\beta(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)=\lambda^2.$$

On peut donc se donner à volonté α_1, c'est-à-dire le point A_1, et si l'on détermine α_2 et α_3 par l'équation précédente et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\alpha\lambda^2$, le triangle $A_1B_1C_1$ sera circonscrit à Q_1.

9. Théorème. — *Si une droite* $X_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ *est tangente à la conique* Q *circonscrite à* ABC *selon la droite fixe* $X(\lambda, \mu, \nu)$, *le pôle* $O_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *de* X *par rapport à* ABC *appartient à la conique* Q_1 *inscrite selon le pôle* $O(\alpha, \beta, \gamma)$ *de* X_1; *de plus, le point de contact* ω *de* X_1 *est le pôle de la tangente* ρ *en* O_1.

En effet, comme X_1 est une tangente à Q, on a (4)

$$\pm\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}}\pm\sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}}=1,$$

et puisque

$$\lambda=-\alpha_1,\qquad \mu=-\beta_1,\qquad \lambda_1=-\alpha_1,\qquad \mu_1=-\beta_1,$$

il vient, en remplaçant,

$$\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}}\pm\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta}}=1, \tag{14}$$

ou (6) O_1 est sur Q_1.

D'ailleurs, si $\rho(x, y, z)$ est la tangente à Q_1 en O_1, on a (1)

$$\frac{-\lambda_1}{x}+\frac{y}{-\mu_1}=1,\qquad \frac{x}{-\lambda}+\frac{-\mu}{y}=1,$$

d'où

$$\frac{\lambda_1}{-x}+\frac{-y}{\mu_1}=1,\qquad \frac{-x}{\lambda}+\frac{\mu}{-y}=1.$$

Donc (1), le point $(-x, -y, -z)$, pôle de ρ, se trouve sur X_1 et sur Q ou se confond avec le point de contact ω.

Remarque I. — Comme O_1 est fixe, O décrit la quartique (14).

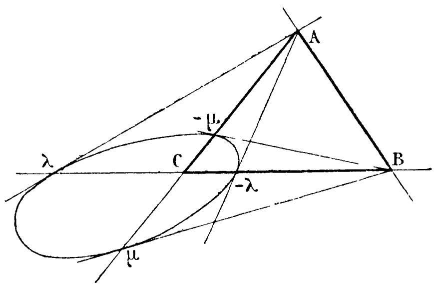
Remarque II. — On aura le théorème corrélatif en supposant le point O fixe ainsi que Q_1, et le point O_1 mobile sur Q_1.

10. Conique rapportée à l'un de ses triangles conjugués. — Son équation est

$$\frac{\lambda^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\mu^2} = 1, \tag{15}$$

car cette conique (*fig.* 3) coupe BC et CA aux points conjugués harmoniques $\pm\lambda$, $\pm\mu$. De plus, les droites

Fig. 3.



qui joignent A et B à ces points sont des tangentes, puisque, pour $\alpha = \pm\lambda$, les deux valeurs de β sont nulles, et pour $\beta = \pm\mu$ les deux valeurs de α sont infinies.

Si, comme au n° 4, on écrit qu'une droite $X_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ est une tangente, on aura pour les coordonnées du point de contact

$$\alpha\lambda_1 = \lambda^2 \qquad \beta\mu_1 = \mu^2, \qquad \gamma\nu_1 = \nu^2, \tag{16}$$

et l'équation (15), qui devient

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} + \frac{\mu^2}{\mu_1^2} = 1, \tag{17}$$

est alors celle de la conique en coordonnées tangentielles.

Si AB passe à l'infini, C devient le milieu de chacun des segments $(\lambda, -\lambda)$, $(\mu, -\mu)$, et les droites $A\lambda$, $B\mu$ restent tangentes. Le sommet de l'angle C est alors le centre et les côtés prennent les directions de deux diamètres conjugués.

Si l'on désigne par $2a$, $2b$ les longueurs de ces diamètres, par x et y les coordonnées cartésiennes d'un point de la courbe, on aura

$$\lambda = \frac{\infty}{a}, \qquad \mu = \frac{b}{\infty}, \qquad \alpha = \frac{\infty}{x}, \qquad \beta = \frac{y}{\infty},$$

et l'équation (15) prendra la forme connue

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équation (17) devient aussi

$$\frac{a^2}{x_1^2} + \frac{b^2}{y_1^2} = 1, \tag{18}$$

x_1 et y_1 étant les longueurs $C\lambda_1$, $C\mu_1$, qui seraient les coordonnées cartésiennes de la tangente mobile X_1.

De plus, $O(x, y)$ étant le point de contact, les relations (16) donnent

$$xx_1 = a^2, \qquad yy_1 = b^2.$$

11. Polaire d'un point par rapport à Q.

Théorème. — *Étant donnés la conique Q circonscrite à ABC selon la droite $X(\lambda, \mu, \nu)$ et le point $O(\alpha, \beta, \gamma)$, les droites qui joignent deux à deux les points $(.\mu\gamma)$ et $(.\beta\nu)$, $(\lambda.\gamma)$ et $(\alpha.\nu)$, $(\lambda\beta.)$ et $(\alpha\mu.)$ forment un triangle $A_1B_1C_1$ homologique avec ABC, et l'axe ρ d'homologie est la polaire de O par rapport à Q.*

Les droites a_1, b_1, c_1 coupent, en effet, les côtés BC, CA, AB aux points

$$(19)\quad x=\frac{\mu-\beta}{\mu\beta(\gamma-\nu)},\qquad y=\frac{\nu-\gamma}{\nu\gamma(\alpha-\lambda)},\qquad z=\frac{\lambda-\alpha}{\lambda\alpha(\beta-\mu)},$$

et, comme $xyz=+1$, ces trois points sont situés sur une droite $\rho(x, y, z)$.

Or, si les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ coupent Q en A_2, B_2, C_2, on a (1), pour le point A_2,

$$\alpha,\quad \frac{1}{\nu(\lambda-\alpha)},\quad \frac{\nu(\alpha-\lambda)}{\alpha},$$

et (4), pour la tangente en A_2,

$$\frac{\alpha^2}{\lambda},\quad \frac{\lambda}{\nu(\lambda-\alpha)^2},\quad \frac{\nu(\lambda-\alpha)^2}{\alpha^2}.$$

Cette tangente coupe $A\lambda$ au point

$$\mathrm{I}\qquad \lambda,\quad \frac{\mu(\lambda+\alpha)}{\lambda-\alpha},\quad \frac{\nu(\alpha-\lambda)}{\lambda+\alpha}.$$

De même les tangentes en B_2 et C_2 coupent $B\mu$ et $C\nu$ aux points

$$\mathrm{H}\qquad \frac{\lambda(\beta-\mu)}{\mu+\beta},\quad \mu,\quad \frac{\nu(\mu+\beta)}{\mu-\beta},$$

$$\mathrm{K}\qquad \frac{\lambda(\nu+\gamma)}{\nu-\gamma},\quad \frac{\mu(\gamma-\nu)}{\nu+\gamma},\quad \nu.$$

Il résulte de ces valeurs que les points I, H, K, qui fixent la polaire de O, appartiennent à la droite ρ.

Remarque I. — On peut donc (avec la règle) construire la polaire de O, sans qu'il soit nécessaire de tracer la conique Q.

Remarque II. — Si $x=y=z=1$, O est le centre de Q, et les formules (19) donnent, pour ce centre,

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{\lambda(1-\lambda+\lambda\mu)}{1-\lambda-\lambda\mu},\\ \beta &= \frac{\mu(1-\mu+\mu\nu)}{1-\mu-\mu\nu},\\ \gamma &= \frac{\nu(1-\nu+\lambda\nu)}{1-\nu-\lambda\nu}. \end{aligned}\right.$$

12. Théorème. — *Si les droites qui joignent un point* $O(\alpha, \beta, \gamma)$ *de la conique* Q *circonscrite à* ABC *selon la droite* $X(\lambda, \mu, \nu)$, *aux points* λ, μ, ν, *coupent la conique en* A_1, B_1, C_1, *le triangle* $A_1B_1C_1$ *est homologique avec* ABC; *le centre* ω *d'homologie est le point où la tangente* X *touche la conique* Q_1 *inscrite selon le point* O, *et l'axe* ρ, *qui est la polaire de* ω *par rapport à* Q, *tourne autour du point* O_1, *pôle de* X *par rapport à* ABC.

En effet, d'après (4), l'une des coordonnées de A_1 est $\lambda^2 : \alpha$, et on aura les autres par l'équation (2). De même, pour B_1 et C_1. On trouve ainsi

$$\left\{\begin{array}{llll} A_1 & \dfrac{\lambda^2}{\alpha}, & \dfrac{1}{\lambda\gamma}, & \dfrac{1}{\lambda\beta},\\[2ex] B_1 & \dfrac{1}{\mu\gamma}, & \dfrac{\mu^2}{\beta}, & \dfrac{1}{\mu\alpha},\\[2ex] C_1 & \dfrac{1}{\nu\beta}, & \dfrac{1}{\nu\alpha}, & \dfrac{\nu^2}{\gamma}. \end{array}\right.$$

Les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont donc concourantes au point

$$\omega\left(\frac{\lambda^2}{\alpha}, \frac{\mu^2}{\beta}, \frac{\nu^2}{\gamma}\right),$$

et ce point, qui appartient à X pour vérifier son équation (1), est de plus (6) le point où X touche Q_1.

Les côtés de $A_1B_1C_1$ coupent les côtés correspondants de ABC aux points

$$x = -\alpha, \qquad y = -\beta, \qquad z = -\gamma,$$

et ces points sont situés sur la droite $\rho(-x, -y, -z)$, polaire de O par rapport à ABC.

Comme on a

$$\frac{-\alpha}{-\lambda} + \frac{-\mu}{-\beta} = 1,$$

cette droite ρ passe par le point $O(-\lambda, -\mu, -\nu)$, pôle de X (triangle ABC); elle est de plus polaire de ω (conique Q), car les relations (1), qui lient le point à sa polaire, se trouvent vérifiées.

13. Théorème. — *Le lieu des centres* $\omega(x, y, z)$ *de la conique* Q_1 *inscrite à* ABC *selon le point* $O(\alpha, \beta, \gamma)$, *mobile sur la droite fixe* $X(\lambda, \mu, \nu)$, *est une conique.*

Comme O appartient à X, on a (1)

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1.$$

Or (formule 22),

$$\alpha = \frac{1 + x - xy}{1 + x + xy}, \qquad \beta = \frac{1 + x + xy}{-1 + x + xy}.$$

En remplaçant, il vient

$$\begin{aligned}[(\lambda\mu + \mu - 1)y^2 + 2\lambda\mu y + (1 + \lambda\mu - \mu)]\,x^2 \\ - 2(\mu y - 1)\,x + (1 + \mu - \lambda\mu) = 0.\end{aligned}$$

Cette équation est celle d'une conique Q_2 qui coupe les côtés BC, CA, AB aux points qui sont les racines des équations

$$\begin{gathered}(1 + \lambda\mu - \mu)x^2 + 2x + (1 + \mu - \lambda\mu) = 0, \\ (\lambda\mu + \mu - 1)y^2 + 2\lambda\mu y + (1 + \lambda\mu - \mu) = 0, \\ (1 + \mu - \lambda\mu)z^2 + 2\mu z + (\lambda\mu + \mu - 1) = 0,\end{gathered}$$

c'est-à-dire en leurs milieux et aux points

$$x_1 = \frac{\lambda\mu - \mu - 1}{\lambda\mu - \mu + 1}, \qquad y_1 = \frac{\mu - 1 - \lambda\mu}{\lambda\mu + \mu - 1}, \qquad z_1 = \frac{1 - \mu - \lambda\mu}{1 + \mu - \lambda\mu}.$$

Or, si Q_3 est la conique inscrite ayant pour centre $\omega_1(-\lambda^{-1}, -\mu^{-1}, -\nu^{-1})$, cette conique est inscrite à ABC selon le point $O_1(x_1, y_1, z_1)$.

Remarque I. — Si X passe à l'infini, on a

$$x_1 = y_1 = z_1 = -1,$$

et Q_2 devient l'ellipse inscrite selon le centre de gravité.

Remarque II. — Si $\lambda = \frac{b^2}{c^2}$, $\mu = \frac{c^2}{a^2}$, $\nu = \frac{a^2}{b^2}$, ou si X est la droite isotomique de celle suivant laquelle le cercle est circonscrit à ABC, ω_1 devient le point de Lemoine, O_1 est l'orthocentre et Q_2 est le cercle des neuf points.

14. Pôle d'une droite par rapport à la conique Q_1.

Théorème. — *Étant données la conique Q_1 inscrite à ABC selon le point $O(\alpha, \beta, \gamma)$ et la droite $\rho(\lambda, \mu, \nu)$, si l'on appelle A_1, B_1, C_1 les points $(\mu\gamma, \nu\beta)$, $(\lambda\gamma, \nu\alpha)$, $(\lambda\beta, \mu\alpha)$, les droites AA_1, BB_1, CC_1 seront concourantes en un point ω, pôle de ρ par rapport à Q_1.*

En effet, les coordonnées des droites AA_1, BB_1, CC_1 sont

$$(21) \quad x = \frac{\nu - \gamma}{\nu\gamma(\mu - \beta)}, \qquad y = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda\alpha(\nu - \gamma)}, \qquad z = \frac{\mu - \beta}{\mu\beta(\lambda - \alpha)},$$

et comme $xyz = -1$, ces droites sont concourantes en un point $\omega(x, y, z)$.

Or, si l'on mène à Q_1 les tangentes λI, μH, νK, on aura, pour λ_1,

$$\lambda, \quad \frac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda}, \quad \frac{1}{\beta(\lambda-\alpha)},$$

et (6), pour le point de contact I,

$$\frac{\lambda^2}{\alpha}, \quad \frac{\beta(\lambda-\alpha)^2}{\lambda^2}, \quad \frac{-\alpha}{\beta(\lambda-\alpha)^2}.$$

On en déduit, pour αI,

$$\alpha, \quad \frac{\beta(\lambda-\alpha)}{\lambda+\alpha}, \quad \frac{\gamma(\lambda+\alpha)}{\alpha-\lambda}.$$

On aurait de même pour βH et γK,

$$\frac{\alpha(\mu+\beta)}{\beta-\mu}, \quad \beta, \quad \frac{\gamma(\mu-\beta)}{\mu+\beta},$$

$$\frac{\alpha(\nu-\gamma)}{\nu+\gamma}, \quad \frac{\beta(\nu+\gamma)}{\nu-\gamma}, \quad \gamma.$$

Il résulte de ces valeurs que les droites αI, βH, γK, qui fixent le pôle de ρ, passent par ω.

Remarque I. — On pourra donc (avec la règle) trouver le pôle d'une droite X, et, si cette droite est à l'infini, on aura le centre de Q_1 en joignant A, B, C aux milieux des segments $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$.

Remarque II. — Si O est le centre de Q_1, on a

$$(22) \qquad x = \frac{1-\gamma}{\gamma(1-\beta)}, \qquad y = \frac{1-\alpha}{\alpha(1-\gamma)}, \qquad z = \frac{1-\beta}{\beta(1-\alpha)}.$$

15. Théorème. — *Si par le point où une tangente* X(λ, μ, ν) *à une conique* Q_1 *inscrite à* ABC *selon le point* O(α, β, γ), *coupe les rayons* Aα, Bβ, Cγ, *on mène les secondes tangentes* a_1, b_1, c_1, *le trilatère* $a_1 b_1 c_1$ *est homologique avec* abc; *l'axe* ρ *d'homologie, qui tourne autour de* O, *est tangent à la conique* Q *circonscrite à* ABC *selon la droite* X, *et le centre* ω

d'homologie, qui est le pôle de ρ par rapport à Q_1, *décrit la droite* X_1, *polaire de* O *par rapport à* ABC.

D'après (4), $\alpha^2 : \lambda$ est l'une des coordonnées de A_1, et l'on aura (1) les deux autres en écrivant que a_1 enveloppe Q_1. En procédant de même pour b_1 et c_1, on trouve

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 : \dfrac{\alpha^2}{\lambda}, \quad \dfrac{-1}{\nu\alpha}, \quad \dfrac{-1}{\mu\alpha}, \\[2ex] b_1 : \dfrac{-1}{\nu\beta}, \quad \dfrac{\beta^2}{\mu}, \quad \dfrac{-1}{\lambda\beta}, \\[2ex] c_1 : \dfrac{-1}{\mu\gamma}, \quad \dfrac{-1}{\lambda\gamma}, \quad \dfrac{\gamma^2}{\nu}. \end{array}\right.$$

On voit par là que les points (aa_1), (bb_1), (cc_1) sont situés sur la droite $\rho\left(\dfrac{\alpha^2}{\lambda}, \dfrac{\beta^2}{\mu}, \dfrac{\gamma^2}{\nu}\right)$.

Cette droite, qui passe par O pour vérifier son équation (1), est de plus (4) tangente à Q.

Les droites AA_1, BB_1, CC_1, qui ont pour coordonnées $x = -\lambda$, $y = -\mu$, $z = -\nu$, sont concourantes au point $\omega(-\lambda, -\mu, -\nu)$, pôle de X (tri. ABC).

Ce point appartient d'ailleurs à la droite

$$X_1(-\alpha, -\beta, -\gamma),$$

car

$$\frac{-\alpha}{-\lambda} + \frac{-\mu}{-\beta} = 1,$$

et il est le pôle de ρ (conique Q) parce qu'il vérifie les relations (21) qui lient le pôle à sa polaire.

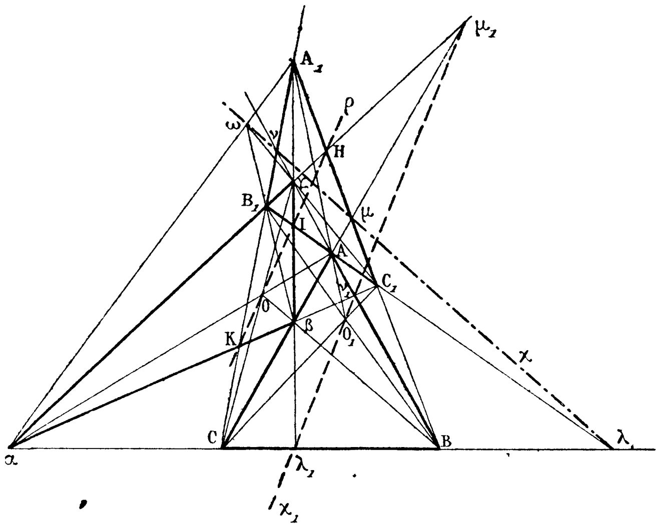
16. *Génération de la conique.* — Coupons le triangle ABC par la droite $X(\lambda, \mu, \nu)$ (*fig.* 4), et tirons les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ formant le triangle $A_1B_1C_1$ homologique de ABC selon l'axe X, et son pôle

$$O_1(-\lambda, -\mu, -\nu)$$

par rapport à ces triangles.

Proposons-nous de décrire la conique Q circonscrite à ABC selon la droite X et inscrite à $A_1 B_1 C_1$ selon le

Fig. 4.



point O_1 qui est aussi le pôle de X par rapport à cette conique.

Si $\omega(x, y, z)$ est un point de X, on aura (1)

$$(23)\qquad \frac{\lambda}{x}+\frac{y}{\mu}=1, \qquad \frac{\mu}{y}+\frac{z}{\nu}=1, \qquad \frac{\nu}{z}+\frac{x}{\lambda}=1.$$

Les droites ωA_1, ωB_1, ωC_1 coupent BC, CA, AB en α, β, γ, et comme

$$A_1(-\lambda, \mu, \nu), \quad B_1(\lambda, -\mu, \nu), \quad C_1((\lambda, \mu, -\nu),$$

on aura, en utilisant les équations (23),

$$(24)\qquad \alpha x=\lambda^2, \qquad \beta y=\mu^2, \qquad \gamma z=\nu^2.$$

Il en résulte que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes au point $O(\alpha, \beta, \gamma)$.

Or, d'après (24), les équations (23) deviennent

$$(25)\qquad \frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\mu}{\beta}=1,\qquad \frac{\beta}{\mu}+\frac{\nu}{\gamma}=1,\qquad \frac{\gamma}{\nu}+\frac{\lambda}{\alpha}=1.$$

Donc (1) le point O appartient à Q. Les triangles $A_1B_1C_1$ et $\alpha\beta\gamma$ sont homologiques (centre ω), et l'axe $X_1(\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1)$ a pour coordonnées

$$\lambda_1=-\alpha,\qquad \mu_1=-\beta,\qquad \nu_1=-\gamma.$$

D'ailleurs, les équations (23) expriment que X_1 passe par O_1, et les équations (25) que le triangle $\alpha\beta\gamma$ est circonscrit à $A_1B_1C_1$.

On a ainsi le système homologique

$$\begin{array}{c|ccc|c} \omega & A & B & C & \rho \\ O & A_1 & B_1 & C_1 & X_1. \\ O_1 & \alpha & \beta & \gamma & X \end{array}$$

dans lequel chacun des centres ou des axes est celui des deux triangles non écrits sur la ligne où il se trouve.

Si I, H, K sont les points qui fixent l'axe ρ, on a

$$\left\{\begin{array}{llll} I: & \lambda, & \dfrac{\beta(\lambda+\alpha)}{\lambda}, & \dfrac{1}{\beta(\lambda+\alpha)}, \\ H: & \dfrac{1}{\gamma(\mu+\beta)}, & \mu, & \dfrac{\gamma(\mu+\beta)}{\mu}, \\ K: & \dfrac{\alpha(\nu+\gamma)}{\nu}, & \dfrac{1}{\alpha(\nu+\gamma)}, & \nu, \end{array}\right.$$

d'où, d'après (24) et (25),

$$(26)\qquad \rho:\frac{\lambda^3}{x^2},\quad \frac{\mu^3}{y^2},\quad \frac{\nu^3}{z^2}.$$

Ces valeurs montrent que la droite ρ passe par O. De plus, elle est tangente en ce point à Q, car (4) les coordonnées de cette tangente sont

$$\frac{\alpha^2}{\lambda},\quad \frac{\beta^2}{\mu},\quad \frac{\gamma^2}{\nu},$$

c'est-à-dire, d'après (24), celles (26) de ρ.

Il est facile de voir que le triangle $\alpha\beta\gamma$ est autopolaire par rapport à Q, car la polaire de α est $A_1 I$ ou $\beta\gamma$. Il en résulte que λ_1 est le pôle de $A_1\alpha$, et comme O_1 est le pôle de X, la droite $O_1\lambda_1$ ou X_1 est la polaire de ω.

En résumé, pour toute position de ω sur X, on pourra (avec la règle) obtenir un point O de Q, la tangente ρ en ce point, et la polaire X_1 de ω.

17. Théorème. — *Deux triangles* ABC *et* $A_1B_1C_1$, *conjugués par rapport à une conique, sont homologiques, et* réciproquement.

Soit Q une conique coupant les côtés BC, CA, AB du triangle de référence aux points λ et λ_1, μ et μ_1, ν et ν_1. On a

$$r = \lambda\lambda_1\mu\mu_1\nu\nu_1 = +1.$$

Appelons I et I_1, H et H_1, K et K_1 les points

$$\begin{array}{lcl}(\mu\nu,\ \mu_1\nu_1) & \text{et} & (\mu\nu_1,\ \mu_1\nu),\\ (\lambda\nu,\ \lambda_1\nu_1) & \text{et} & (\lambda\nu_1,\ \lambda_1\nu),\\ (\lambda\mu,\ \lambda_1\mu_1) & \text{et} & (\lambda\mu_1,\ \lambda_1\mu),\end{array}$$

et $A_1B_1C_1$ le triangle des droites II_1, HH_1, KK_1, lequel est conjugué de ABC par rapport à Q.

On a

$$I: \frac{\nu_1-\nu}{\nu\nu_1(\mu-\mu_1)},\quad \frac{\mu\nu-\mu_1\nu_1}{\nu-\nu_1},\quad \frac{\nu\nu_1(\mu-\mu_1)}{\mu\nu-\mu_1\nu_1},$$

et, en permutant ν et ν_1,

$$I_1: \frac{\nu-\nu_1}{\nu\nu_1(\mu-\mu_1)},\quad \frac{\mu\nu_1-\mu_1\nu}{\nu_1-\nu},\quad \frac{\nu\nu_1(\mu-\mu_1)}{\mu\nu_1-\mu_1\nu}.$$

D'où, pour le côté a_1,

$$\frac{\nu+\nu_1}{\nu\nu_1(\mu+\mu_1)},\quad \frac{\mu+\mu_1}{2},\quad \frac{2\nu\nu_1}{\nu+\nu_1}.$$

On trouverait de même, pour b_1 et c_1,

$$\frac{2\lambda\lambda_1}{\lambda+\lambda_1},\quad \frac{\lambda+\lambda_1}{\lambda\lambda_1(\nu+\nu_1)},\quad \frac{\nu+\nu_1}{2},$$
$$\frac{\lambda+\lambda_1}{2},\quad \frac{2\mu\mu_1}{\mu+\mu_1},\quad \frac{\mu+\mu_1}{\mu\mu_1(\lambda+\lambda_1)}.$$

Les points aa_1, bb_1, cc_1 ont donc pour coordonnées

$$x = \frac{\nu+\nu_1}{\nu\nu_1(\mu+\mu_1)},\qquad y = \frac{\lambda+\lambda_1}{\lambda\lambda_1(\nu+\nu_1)},\qquad z = \frac{\mu+\mu_1}{\mu\mu_1(\lambda+\lambda_1)}.$$

D'où

$$xyz = \frac{1}{r} = +1,$$

ou les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont homologiques selon l'axe $\rho(x, y, z)$.

Réciproquement, si $xyz = 1$, on aura $r = 1$ et les deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ homologiques seront conjugués par rapport à la conique Q circonscrite à l'hexagone $\lambda\lambda_1\mu\mu_1\nu\nu_1$.

D'ailleurs, si l'on connaît les coordonnées des côtés a_1, b_1, c_1, on pourra, en s'aidant des relations obtenues, trouver les points où cette conique Q coupe les côtés de ABC.

18. Théorème. — *Si deux triangles* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *sont homologiques, le triangle* $A'B'C'$ *des points* (BC_1, B_1C), (AC_1, A_1C), (AB_1, A_1B) *et le trilatère* $a'_1b'_1c'_1$ *des droites* (bc_1, b_1c), (ac_1, a_1c), (ab_1, a_1b) *sont aussi homologiques.*

En effet, les triangles homologiques ABC et $A_1B_1C_1$ sont conjugués par rapport à une certaine conique Q (17). Or, comme les points B et C_1 ont b_1 et c pour polaires, BC_1 est la polaire du point b_1c; de même B_1C est la polaire du point bc_1. Donc le point (BC_1, B_1C)

ou A' est le pôle de la droite $(b_1 c, bc_1)$ ou a'_1. De même, B' et C' sont les pôles de b'_1, c'_1. Les triangles $A'B'C'$ et $A'_1 B'_1 C'_1$ sont ainsi conjugués par rapport à Q, et, par suite (17), homologiques.