NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANDRÉ CAZAMIAN

Sur les cubiques unicursales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 297-304

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__297_1>

SUR LES CUBIQUES UNICURSALES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Dans une Note précédente (*Sur les points d'une conique situés sur un même cercle*), nous avons montré que plusieurs des théorèmes donnés par M. Balitrand et nous-même sur la strophoïde s'étendaient à toutes les cubiques circulaires unicursales. Nous allons compléter ces résultats en montrant que tous les théorèmes sur la strophoïde s'appliquent, à un degré plus général, aux cubiques unicursales circulaires (et même pour quelques-unes non altérées par la projection, aux cubiques unicursales non circulaires).

Définitions. — (a) Les cubiques circulaires unicursales sont les inverses des coniques, le point double étant au centre d'inversion, P, placé sur la conique, et les tangentes au point double étant parallèles aux asymptotes de la conique. Les cubiques acnodales sont les inverses de l'ellipse; les cubiques crunodales sont les inverses de l'hyperbole.

(b) Les cordes supplémentaires d'une conique sont parallèles aux systèmes de diamètres conjugués; il en résulte que ces cordes, issues d'un même point P, forment un faisceau harmonique avec les parallèles aux asymptotes menées par le point P. Ainsi :

A deux points diamétralement opposés d'une conique correspondent sur la cubique inverse deux points que nous appellerons points conjugués et qui sont tels que les droites les joignant au point double forment un faisceau harmonique avec les tangentes en ce point.

Plus généralement nous appellerons *points conjugués* sur une cubique unicursale quelconque deux points tels que les droites les joignant au point double forment un faisceau harmonique avec les tangentes en ce point.

(*c*) A un cercle tangent en P à la conique correspond une parallèle à l'asymptote de la cubique circulaire unicursale. D'après un théorème connu, les droites PC, PD joignant le point P aux points d'intersection de la conique avec le cercle ω sont également inclinées sur les axes et par suite sur les asymptotes. Donc :

Théorème. — *Les vecteurs des points d'intersection d'une cubique circulaire unicursale avec une parallèle à l'asymptote sont également inclinés sur les tangentes au point double.*

Nous appellerons ces points, qui n'existent que dans les cubiques unicursales circulaires, *points correspondants* (définition donnée pour la strophoïde par M. Enrique Valdès).

Nous allons maintenant énoncer un certain nombre de théorèmes en les divisant en deux groupes : 1° ceux qui ne sont pas altérés par la projection et s'appliquent à toutes les cubiques unicursales; 2° les théorèmes particuliers aux cubiques unicursales circulaires. Ces derniers sont obtenus par inversion en partant de théorèmes connus ou évidents sur les coniques, ou de théorèmes nouveaux obtenus par le même procédé de démonstration dont nous nous sommes servi dans notre Note *Sur les points concycliques d'une conique*. Nous ne reviendrons pas sur les théorèmes relatifs aux cubiques unicursales circulaires déjà énoncés dans cette Note.

I. — Théorèmes s'appliquant a toutes les cubiques unicursales.

1. *Les droites joignant le point double à tous les points conjugués forment un faisceau en involution dont les rayons doubles sont les tangentes au point double.*

Corollaires. — 1° Dans la strophoïde, les points cycliques sont conjugués. De là résultent les propriétés particulières de cette cubique de la famille.

2° En projetant une cubique unicursale de façon que deux points conjugués deviennent les points cycliques, la projection est une strophoïde. Deux points conjugués restent conjugués.

2. *Les droites joignant un point* M *quelconque d'une cubique unicursale à tous les points conjugués forment un faisceau involutif dont l'un des rayons doubles est la droite joignant le point* M *au point double.*

Corollaire. — Dans la strophoïde, les droites isotropes faisant partie du faisceau, le rayon double MO bissecte les couples de rayons homologues du faisceau.

3. *Si trois points d'une cubique unicursale sont collinéaires, l'un d'eux et les conjugués des deux autres sont également collinéaires.*

4. *Deux points conjugués ont le même tangentiel* (¹).

5. *Le collinéaire de deux points conjugués est conjugué de leur tangentiel.*

Appelons *cordes polaires* d'une cubique unicursale les droites joignant les couples de points conjugués.

6. *La droite joignant le collinéaire de deux points conjugués à leur tangentiel est une droite polaire.*

7. *Soient* (A, B), (A′, B′) *deux couples quelconques de points conjugués d'une cubique unicursale. Les droites* AA′, BB′ *se coupent en* I *sur la cubique; les droites* AB′ *et* A′B *se coupent en* I′ *sur la cubique; les points* I *et* I′ *sont conjugués.*

Corollaire. — Tout quadrilatère complet inscrit dans une cubique unicursale est un quadrilatère dont les sommets opposés sont conjugués.

Dans la strophoïde, ce quadrilatère est de plus circonscriptible à un cercle ayant pour centre le point double.

8. *L'enveloppe des cordes polaires d'une cubique unicursale est une conique tangente aux tangentes au point double* (²).

9. *Une corde polaire rencontrant une corde polaire fixe* Δ *au point* L, *le lieu du conjugué harmonique de* L *par rapport aux deux points conjugués de la cubique*

(¹) La réciproque est vraie; elle résulte d'ailleurs d'un théorème donné par M. Astor dans les *Nouvelles Annales* de juillet 1892.

(²) On retrouve un théorème de M. Astor (*loc. cit.*, p. 280).

située sur la corde considérée est une droite passant par le point double.

II. — Théorèmes particuliers aux cubiques unicursales circulaires.

10. *Les cercles circonscrits aux triangles formés par le point double et deux points conjugués quelconques passent par un point fixe qui est le symétrique du point double par rapport au conjugué du point réel à l'infini.*

11. *Les cercles circonscrits aux triangles formés par deux points conjugués et leur tangentielle passent par le conjugué du point réel à l'infini.*

12. *Les points situés sur les bissectrices des tangentes au point double sont en ligne droite avec le conjugué du point réel à l'infini* (1). *En ces points la tangente est parallèle à l'asymptote* (corollaire de la proposition 5).

13. *Les tangentiels de quatre points concycliques sont concycliques.*

14. *Les conjugués de quatre points concycliques sont concycliques.*

15. *Les conjugués de trois points collinéaires sont concycliques avec le point de section de l'asymptote réelle.*

16. *Si quatre points sont concycliques, deux de ces*

(1) Ce point F est le point de rencontre de la cubique avec la droite conjuguée harmonique de la parallèle à l'asymptote menée par le point double par rapport aux tangentes au point double.

points et les conjugués des deux autres sont également concycliques.

1° Les cercles osculateurs à une conique en deux points diamétralement opposés rencontrent de nouveau la conique en deux points diamétralement opposés.

17. *Les cercles osculateurs à une cubique unicursale circulaire en deux points conjugués rencontrent de nouveau la cubique en deux points conjugués.*

2° (Centre d'inversion en l'un des points diamétralement opposés.)

18. *Le cercle osculateur au conjugué du point réel à l'infini rencontre la cubique au conjugué du point de section.*

1° Par deux points pris sur une conique on peut mener deux cercles tangents à la conique; les points de contact sont diamétralement opposés.

19. *Par deux points pris sur une cubique unicursale circulaire on peut mener deux cercles tangents à la cubique, les points de contact sont conjugués.*

2° (Centre d'inversion en l'un des points).

20. *Réciproque du théorème 4.*

21. *La corde de contact d'un cercle bitangent à une cubique unicursale circulaire passe par l'un des points où la tangente est parallèle à l'asymptote, etc.*

La majorité des théorèmes énoncés (p. 251 à 258 du numéro de juillet) par M. Valdès sur la strophoïde ne s'appliquent pas à cette seule courbe, mais s'étendent de même à toutes les cubiques unicursales circulaires (en particulier les propriétés des points correspondants).

NOTES.

A. Les théorèmes que nous avons énoncés dans le numéro de juillet sur les *cycliques équilatères* s'étendent de même à toutes les *cycliques unicursales*. Il n'y a guère que le théorème énoncé page 276 qui soit particulier à cette classe de cycliques. Le point ω, pour les cycliques unicursales, est de même celui qui correspond, dans l'inversion, au centre de la conique.

B. Les polaires réciproques des cubiques unicursales sont des quartiques à trois rebroussements. Appelons *tangentes conjuguées* à ces quartiques deux tangentes dont les points de rencontre avec la tangente double sont conjugués harmoniques des points de contact de la tangente double avec la quartique. Nous aurons les théorèmes suivants :

Les points de rencontre d'une tangente quelconque à une quartique tricuspidale avec tous les couples de tangentes conjuguées forment une involution dont l'un des points doubles est le point de rencontre de la tangente considérée avec la tangente double.

Corollaire. — Si d'un point quelconque pris sur le cercle inscrit dans un hypocycloïde à trois rebroussements on mène les deux tangentes rectangulaires à la courbe, les segments interceptés sur une tangente fixe quelconque à l'hypocycloïde ont le même milieu.

Le lieu des points de rencontre des tangentes conjuguées est une conique passant par les deux points de contact de la tangente double.

Si d'un point on mène les trois tangentes à une quartique tricuspidale, l'une d'elles et les conjuguées des deux autres sont concourantes.

La droite joignant les points de contact de deux tangentes conjuguées est tangente à la quartique.

Si deux tangentes sont conjuguées, la troisième tangente que l'on peut mener à la quartique par leur *point de concours est conjuguée de la droite joignant les points de contact des deux premières.*

Dans le cas particulier où la tangente double est la droite de l'infini et les points de contact les points cycliques (hypocycloïde à trois rebroussements), les théorèmes précédents permettent de retrouver des propositions connues.

Enfin, en transformant le théorème 7, on obtient la proposition suivante :

Soient (D, D'), (Δ, Δ') *deux couples quelconques de tangentes conjuguées à une quartique tricuspidale. La droite joignant les points d'intersection des tangentes* (D, Δ), (D', Δ') *est tangente à la quartique. La droite joignant les points d'intersection des tangentes* (D, Δ') *et* (D', Δ) *est également tangente à la quartique. De plus, ces deux droites sont des tangentes conjuguées.*