

MEYER

Étude sur un faisceau de coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 291-297

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__291_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE SUR UN FAISCEAU DE CONIQUES;

PAR M. MEYER,

Professeur au lycée de Nancy.

Nous nous proposons de montrer comment on peut étendre à un faisceau de quatre coniques certaines propriétés bien connues du système de deux coniques. A cet effet, nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Étant données trois coniques d'un faisceau ponctuel (S, S', Σ) , la droite AB qui joint un point quelconque A de la conique (S) à un point B de la conique (S') conjugué de A par rapport à (Σ) est tangente à une conique fixe, et le lieu du point de rencontre des tangentes à S et à S' aux points A et B est une conique du faisceau considéré. Soient en effet

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

$$S' = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0$$

les équations des coniques (S, S') rapportées à leur triangle autopolaire commun, et $S - KS' = 0$ l'équation de (Σ) . Si (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) sont les coordonnées

des points A' et B' où AB rencontre Σ , les coordonnées des points A et B sont de la forme $(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$ et $(x_1 - \lambda x_2, y_1 - \lambda y_2, z_1 - \lambda z_2)$. Écrivons que ces points appartiennent à S et à S', on obtient

$$\begin{aligned} a(x_1 + \lambda x_2)^2 + b(y_1 + \lambda y_2)^2 + c(z_1 + \lambda z_2)^2 &= 0, \\ a'(x_1 - \lambda x_2)^2 + b'(y_1 - \lambda y_2)^2 + c'(z_1 - \lambda z_2)^2 &= 0, \end{aligned}$$

et en retranchant de la première équation la deuxième multipliée par K

$$ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2 + k(a'x_1x_2 + b'y_1y_2 + c'z_1z_2) = 0.$$

égalité qui montre que les points A' et B' sont conjugués par rapport à la conique $\Sigma' = S + KS' = 0$.

Dès lors, la droite AB est coupée harmoniquement par les coniques Σ et Σ' , et par suite a pour enveloppe une conique. Cette conique a pour équation tangentielle

$$(1) \quad bcu^2 + cav^2 + abw^2 = K^2(b'c'u^2 + c'a'v^2 + a'b'w^2).$$

De même, en exprimant que les tangentes à S, S', aux points A et B, sont conjuguées par rapport à la conique

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = \frac{1}{K} \left(\frac{u^2}{a'} + \frac{v^2}{b'} + \frac{w^2}{c'} \right),$$

on obtiendra l'équation ponctuelle du deuxième lieu

$$(2) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = \frac{abc}{K^2 a' b' c'} (a'x^2 + b'y^2 + c'z^2);$$

c'est une conique du faisceau (S, S', Σ). Réciproquement si C, S, S' sont trois coniques d'un faisceau ponctuel, et que d'un point M de l'une d'elles (C) on mène des tangentes MA, MB aux deux autres, les points A et B sont conjugués par rapport à l'une ou l'autre des coniques $\Sigma_1 = S - KS' = 0$, $\Sigma_2 = S + KS' = 0$.

La valeur de K se détermine en identifiant l'équation (2) avec l'équation de la conique C.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème suivant :

Si quatre coniques (S, S', S'', Σ) d'un faisceau ponctuel sont telles qu'il existe un triangle conjugué par rapport à l'une d'elles Σ, et dont les sommets soient situés respectivement sur les trois autres, il en existe une infinité.

Soient en effet

$$\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

$$S' = (a + K)x^2 + (b + K)y^2 + (c + K)z^2 = 0,$$

$$S'' = (a + K')x^2 + (b + K')y^2 + (c + K')z^2 = 0,$$

et ABC un triangle remplissant les conditions de l'énoncé. Si le point A (x_1, y_1, z_1) se trouve sur la conique S, on a

$$(3) \quad ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 = 0,$$

et la droite BC a pour équation

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0.$$

Mais, d'après ce qui précède, elle est tangente à la conique dont l'équation tangentielle est

$$[(b + K)(c + K) - (b + K')(c + K')]u^2 + \dots = 0,$$

ou

$$(b + c + K + K')u^2 + \dots = 0.$$

On a donc

$$(4) \quad (b + c + K + K')x_1^2 + \dots = 0.$$

En ajoutant les équations (3) et (4), il vient

$$(a + b + c + K + K')(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 0$$

ou

$$(5) \quad a + b + c + K + K' = 0,$$

car $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ n'est pas nul, puisque A n'est pas un point commun aux coniques du faisceau. Cette dernière relation étant indépendante du point A considéré, le théorème est démontré. Il y a plus, les sommets du triangle dont les côtés touchent respectivement les coniques S, S', S'' aux points A, B, C appartiennent à une conique fixe (E) du faisceau. En effet, les points de rencontre des tangentes à S et à S' aux points A et B a pour lieu la conique

$$(a + K)x^2 + \dots = \frac{(a + K)(b + K)(c + K)}{abc} [ax^2 + \dots]$$

ou

$$(6) \quad a(a + K)(a + K')x^2 + \dots = 0,$$

en tenant compte de la relation (5). Il est clair qu'on trouverait le même lieu pour les autres sommets. Plus généralement, si l'équation de (Σ) est de la forme

$$(a + l)x^2 + \dots = 0,$$

la conique (E) est représentée par

$$\frac{a(a + K)(a + K')}{(a + l)^2} x^2 + \dots = 0.$$

Réciproquement, soient (S, S', Σ) trois coniques d'un faisceau ponctuel, si deux sommets d'un triangle conjugué par rapport à Σ décrivent respectivement les coniques S, S', le troisième sommet resté libre décrit une conique S'' du faisceau précédent.

Ces propriétés nous conduisent presque immédiatement à la proposition suivante, qui est due à Chasles :

Étant données trois coniques (S, S', E) d'un faisceau ponctuel, si un triangle LMP inscrit dans la conique (E) se déforme de manière que deux de ses côtés restent respectivement tangents aux coniques S, S', le

troisième côté a pour enveloppe deux coniques du faisceau.

Soient

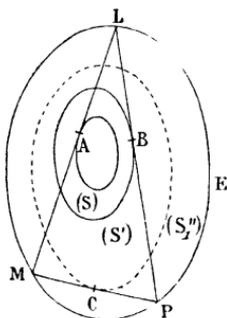
$$E = x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

$$S' = (a + K)x^2 + (b + K)y^2 + (c + K)z^2 = 0$$

les équations des trois coniques.

Du point L , pris sur la première, menons les tangentes LA , LB aux deux autres. Les points A et B sont



conjugués par rapport à l'une des coniques Σ_1, Σ_2 , soit Σ_1 par exemple. Cela étant, désignons par C le pôle de AB par rapport à cette conique. Lorsque le point L décrit la conique (E) le point C se déplace sur une conique (S'') du faisceau, car le triangle ABC est conjugué par rapport à Σ_1 ; de plus les tangentes en A, B, C aux coniques S, S', S'' se coupent aux points L, M, P situés sur une conique du faisceau.

Comme cette conique n'est autre que (E) elle-même, le théorème est démontré. Rien de plus simple, dès lors, que d'obtenir les équations des enveloppes S'_1, S''_2 . Représ-

sentons en effet par

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= (a+l)x^2 + (b+l)y^2 + (c+l)z^2 = 0, \\ S'_1 &= (a+K')x^2 + (b+K')y^2 + (c+K')z^2 = 0,\end{aligned}$$

les équations des coniques (Σ_1) , (S'_1) .

D'après les calculs précédents, l'équation de la conique (E) est de la forme

$$0 = \frac{\alpha(\alpha+K)(\alpha+K')}{(\alpha+l)^2} x^2 + \frac{b(b+K)(b+K')}{(b+l)^2} y^2 + \frac{c(c+K)(c+K')}{(c+l)^2} z^2,$$

d'où les relations

$$\frac{\alpha(\alpha+K)(\alpha+K')}{(\alpha+l)^2} = \frac{b(b+K)(b+K')}{(b+l)^2} = \frac{c(c+K)(c+K')}{(c+l)^2}.$$

Pour éliminer l entre ces équations, désignons par ρ la valeur commune de ces rapports.

L'expression $\frac{x(x+K)(x+K')}{(x+l)^2} - \rho$ s'annulant pour les valeurs a, b, c attribuées à x , on a identiquement

$$\frac{x(x+K)(x+K')}{(x+l)^2} - \rho \equiv \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(x+l)^2},$$

ou

$$x(x+K)(x+K') - \rho(x+l)^2 \equiv (x-a)(x-b)(x-c);$$

en identifiant, on trouve

$$\begin{aligned}K + K' + a + b + c &= \rho, \\ abc &= \rho l^2\end{aligned}$$

et

$$[KK' - (ab + bc + ca)]^2 = 4abc(K + K' + a + b + c),$$

équation qui donne deux valeurs pour K' , comme on devait s'y attendre.

Dans le cas particulier où $K = K' = 0$, les trois coniques S, S', S'' se confondent; l'égalité précédente

devient

$$(ab + bc + ca)^2 - 4abc(a + b + c) = 0.$$

C'est la relation connue

$$\theta^2 - 4\Delta'\theta = 0,$$

exprimant qu'il existe un triangle inscrit dans (E) et circonscrit à (S).