RAYMOND SÉE

Problème du concours général de 1894

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 272-280
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__272_1>

PROBLÈME DU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1894;

PAR M. RAYMOND SÉE,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée Janson de Sailly.

On donne un triangle ABC dont les côtés ont respectivement pour équations

$$\begin{cases} X = 0, \\ Y = 0, \\ Z = 0, \end{cases}$$

une conique S touchant en A et B les côtés CA et CB de l'angle ACB et dont l'équation est $XY = Z^2$.

Sur cette conique S, on prend le point μ défini par les équations $X = Y = Z$, et un point variable M; enfin on désigne par ν le point où la droite $C\mu$ rencontre la corde de contact AB.

Cela posé, on joint le point M à l'un des points m de AB qui ont même polaire par rapport aux angles AMB et $\mu M \nu$:

1° Démontrer que, M décrivant S, la droite Mm enveloppe une courbe Σ du quatrième ordre et de la troisième classe, dont l'équation tangentielle est

$$u^3 + v^3 - uvw = 0.$$

2° Aux points où une droite D rencontre la courbe Σ, on mène à cette courbe les quatre tangentes T_1, T_2, T_3, T_4, et l'on considère la conique C_1 inscrite dans le pentagone formé par ces quatre tangentes et la droite AB. Démontrer que, si l'on assujettit C_1 à passer par un point P, la droite D enveloppe une conique C_2;

3° Montrer que la conique C_2 se réduit à deux points f, f' quand le point P est sur une certaine conique C_3. Trouver dans ce cas l'enveloppe Σ' de la droite ff' et le lieu des points f et f'.

$$S \left\{ XY - Z^2 = 0, \right. \qquad \mu \left\{ X = Y = Z, \right. \qquad M\mu \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \frac{1}{\lambda} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

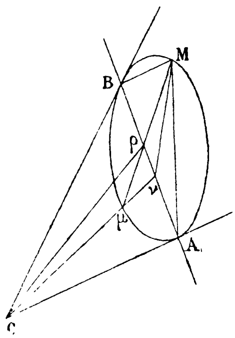
$$\left| \begin{array}{ll} BC & X = 0, \\ CA & Y = 0, \\ AB & Z = 0, \end{array} \right. \qquad \nu \left\{ \begin{array}{l} X = Y, \\ Z = 0, \end{array} \right.$$

$$M \left\{ \begin{array}{l} X = \lambda Z, \\ Y = \dfrac{Z}{\lambda}, \end{array} \right. \qquad \rho \left\{ \begin{array}{l} Z = 0, \\ \dfrac{X}{-\lambda} = Y. \end{array} \right.$$

Les points de AB, qui ont même polaire par rapport aux deux angles AMB, $\mu M \nu$, ont même conjugué harmonique par rapport aux deux segments AB et $\rho\nu$ et, par suite, même polaire par rapport aux angles ACB et $\rho C \nu$.

$$m \left\{ \begin{array}{l} Z = 0, \\ Y = \alpha X; \end{array} \right.$$

Fig. 1.



sa polaire par rapport à

$$\begin{array}{lc} \text{ACB}, & \alpha X + Y = 0, \\ \rho C \nu, & X[\alpha(\lambda - 1) + 2] + Y(-2\alpha\lambda + \lambda - 1) = 0, \\ & \alpha(-2\alpha\lambda + \lambda - 1) = \alpha(\lambda - 1) + 2, \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\alpha^2 \lambda + 1 = 0.$$

Donc à tout point M correspondent deux points

$$m \left\{ \begin{array}{l} Z = 0, \\ Y = \mp \sqrt{\dfrac{-1}{\lambda}} X, \end{array} \right.$$

réels si $\lambda < 0$.

I.

$$M\left\{\begin{aligned} X &= \lambda Z,\\ Y &= \frac{Z}{\lambda},\end{aligned}\right.\qquad m\left\{\begin{aligned} Z &= 0,\\ Y &= \alpha X,\end{aligned}\right.\qquad \text{avec}\qquad \alpha^2\lambda+1=0,$$

$$M\mu\qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z\\ \lambda & \frac{1}{\lambda} & 1\\ 1 & \alpha & 0\end{vmatrix} = -\alpha X + Y + Z\left(\lambda\alpha-\frac{1}{\lambda}\right)=0.$$

J'identifie avec

$$uX+vY+wZ=0,$$

$$\frac{-\alpha}{u}=\frac{1}{v}=\frac{\lambda\alpha-\frac{1}{\lambda}}{w},\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= -\frac{u}{v},\\ \lambda\alpha-\frac{1}{\lambda} &= \frac{w}{v},\\ \alpha^2\lambda+1 &= 0,\end{aligned}\right.$$

ou, en éliminant α et λ,

$$\Sigma\quad \left\{\ u^3+v^3=uvw,\right.$$

courbe de la troisième classe.

Pour avoir l'équation ponctuelle, je cherche l'enveloppe de

$$\alpha^3 Z-\alpha^2 X+\alpha Y-Z=0$$

(obtenue en remplaçant λ dans Mm), c'est-à-dire que j'élimine α entre

$$\left\{\begin{aligned} 3\alpha^2 Z-2\alpha X+Y&=0,\\ -\alpha^2 X+2\alpha Y-3Z&=0,\end{aligned}\right.\qquad \Sigma\left\{\ (XY-9Z^2)^2-4(3YZ-X^2)(3XZ-Y^2)=0,\right.$$

courbe du quatrième ordre.

II.

Soit une droite D de coordonnées u_0, v_0, w_0.

$$\Sigma = u^3-v^3-uvw=0.$$

$$u_0\frac{\partial\Sigma}{\partial u}+v_0\frac{\partial\Sigma}{\partial v}+w_0\frac{\partial\Sigma}{\partial w}$$
$$= u_0(3u^2-vw)+v_0(3v^2-uw)-w_0uv=0$$

représente une conique tangente aux quatre droites T_1, T_2, T_3, T_4. Elle est de plus tangente à AB (puisque pas de terme en w^2). Il n'y a qu'une seule conique tangente à cinq droites. L'équation précédente est donc celle de la conique C_1,

$$C_1 = 3u_0u^2 + 3v_0v^2 - u_0vw - v_0wu - w_0uv = 0.$$

Soit

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0$$

l'équation d'un point P. Pour exprimer qu'il est sur la conique C_1, j'élimine w et j'exprime que l'équation homogène

$$3u_0u^2 + 3v_0v^2 - w_0uv + (u_0v + v_0u)\left(\frac{ux_0 + vy_0}{z_0}\right) = 0$$

a ses racines égales.

En supprimant les indices,

$$C_2 = (ux_0 + vy_0 + wz_0)^2 - 4(3uz_0 - vx_0)(3vz_0 - uy_0) = 0,$$

équation de la conique enveloppée par D.

III.

Pour que la conique C_2 se réduise à deux points, il faut que le premier membre de son équation soit une somme de deux carrés au plus. Il faut donc que les trois demi-dérivées partielles, égalées à zéro, aient en u, v, w un système commun de solutions, qui sont précisément les coordonnées de la droite ff'.

C_2 est de la forme $R^2 - 4PQ = 0$,

$$\left|\begin{array}{l} R = ux_0 + vy_0 + wz_0, \\ P = 3uz_0 - vx_0, \\ Q = 3vz_0 - uy_0, \end{array}\right.$$

$$(1) \qquad \left|\begin{array}{l} x_0R - 2y_0P - 6z_0Q = 0, \\ y_0R - 6z_0P + 2x_0Q = 0, \\ z_0R = 0. \end{array}\right.$$

J'élimine P, Q, R : il vient

$$\text{AB} \qquad Z = 0,$$
$$C_3 = XY - 9Z^2 = 0,$$

conique bitangente à S aux deux points A et B.

Enveloppe de ff'. — Posons

$$P \left\{ \begin{aligned} X_0 &= 3\lambda Z_0, \\ Y_0 &= \frac{3 Z_0}{\lambda}. \end{aligned} \right.$$

Il faut éliminer λ entre les deux équations auxquelles se réduit le système (1),

$$\left\{ \begin{aligned} &Y_0 P + 3 Z_0 Q = 0, \\ &R = 0, \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} &u + \lambda v = 0, \\ &3\left(u\lambda + \frac{v}{\lambda}\right) + w = 0, \end{aligned} \right.$$

$$\Sigma' = u^3 + v^3 - \tfrac{1}{3} uvw = 0.$$

Lieu des points f et f'. — Je remplace, dans C_2, X_0, Y_0, Z_0 en fonction de λ,

$$\left(3u\lambda + \frac{3v}{\lambda} + w\right)^2 - \frac{4}{\lambda}(3u + 3\lambda v)^2 = 0.$$

C_2 se décompose alors en deux fonctions linéaires, équations des points dont nous cherchons le lieu.

Soit

$$f = u\lambda + \frac{v}{\lambda} + \frac{w}{3} - \frac{2}{\sqrt{\lambda}}(u + \lambda v) = 0.$$

Je pose $\sqrt{\lambda} = t$,

$$u(t^4 - 2t) + v(1 - 2t^3) + w\frac{t^2}{3} = 0.$$

Je résous donc les deux équations

$$\left\{ \begin{aligned} &u(2t^3 - 1) - 3t^2 v + \frac{t}{3} w = 0, \\ &u(3t) + (t^3 - 2)v - \frac{t^2}{3} w = 0, \end{aligned} \right.$$

et

$$\frac{u}{\frac{2t}{3}(t^3+1)} = \frac{v}{\frac{2t^2}{3}(t^3+1)} = \frac{w}{2(t^3+1)^2},$$

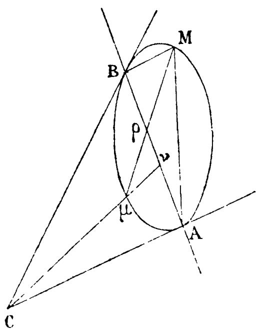
$$\left\{\begin{array}{l} v = tu, \\ w = 3\,\dfrac{(t^3+1)}{t}\,u, \end{array}\right. \qquad \Sigma' = u^3 + v^3 - \tfrac{1}{3}\,uvw = 0.$$

L'enveloppe de ff', le lieu de f, le lieu de f' sont donc une seule et même courbe : cette courbe Σ' est du quatrième ordre et de la troisième classe, comme Σ.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Les deux points m, qui ont même polaire par rapport aux deux angles AMB, $\mu M \nu$, sont les points de AB

Fig. 2.

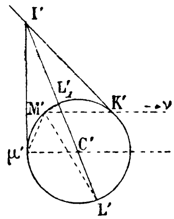


communs aux deux involutions définies par leurs points doubles A, B, ρ; ν.

Cela posé, je projette la figure de manière que la droite AB devienne la droite de l'infini, et les points AB les points cycliques. La conique S devient un cercle de centre C' projection de C. Le point μ devient un certain point μ'.

Le faisceau en involution MA, MB se projette suivant un nouveau faisceau en involution. Ce dernier traçant sur la droite de l'infini une involution dont les points

Fig. 3.

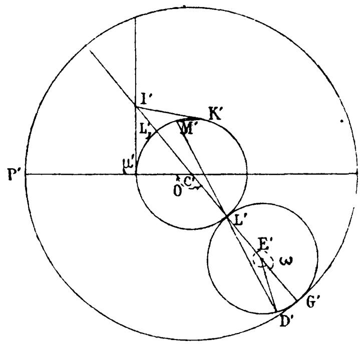


doubles sont les points cycliques est engendré par un angle droit tournant autour de M', et son point image est C', quel que soit M'.

Le deuxième faisceau en involution a pour point image le point I'. Par suite, les droites dont nous cherchons l'enveloppe sont les droites M'L', M'L'$_1$.

Cette enveloppe doit être une hypocycloïde à trois

Fig. 4.



rebroussements : car elle est de troisième classe, de quatrième ordre, et bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques. De plus, cette hypocycloïde doit avoir pour centre le point C' et pour cercle de roulement un cercle de rayon égal au triple de celui de S', car les deux droites $M'L'$ et $M'L'_1$ sont rectangulaires, et l'on sait que le lieu des points, d'où l'on peut mener à l'hypocycloïde à trois rebroussements deux tangentes rectangulaires, est le cercle inscrit à cette hypocycloïde.

Nous allons le démontrer directement.

Considérons le cercle de centre C' et de rayon égal au triple de celui de S', et le cercle de rayon égal à celui de S' tangent à S' en L'. La droite $M'L'$ rencontre le second cercle en D'. Cherchons le lieu de D',

$$\omega = 2\pi + G'E'D' = 2\pi + 2M'L'L'_1,$$
$$2M'L'L'_1 = M'C'\mu' - (\pi - O),$$
$$2(\pi - O) = \pi - M'C'\mu',$$
$$\omega + 2\pi + \pi - 2(\pi - O) - (\pi - O) = 3O.$$

$\omega = 3O$. Donc D' décrit une hypocycloïde à trois rebroussements, et l'on sait que la tangente à cette hypocycloïde en D' est la droite $L'D'$. Donc $M'L'$ enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.

La courbe Σ est donc la perspective d'une hypocycloïde à trois rebroussements.