Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 266-268

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__266_1>

CORRESPONDANCE.

Monsieur le Rédacteur,

Bien qu'en dépit d'une légende assez répandue, le sujet de la Composition mathématique, pour l'admission à l'École Polytechnique, n'ait pas été, cette année, proposé par moi, j'ai rencontré, en m'en occupant, une élégante solution géométrique de l'une des questions posées, qui intéressera peut-être quelques-uns de vos lecteurs. Je vous demande la permission de l'exposer en quelques mots.

Étant donnés deux couples de droites quelconques D, D' et Δ, Δ', un plan P et un point O dans ce plan, il s'agit de trouver le lieu de l'intersection de deux surfaces du second ordre S et Σ, contenant toutes deux une même droite variable OA du plan P et passant, l'une par les droites D et D', l'autre par les droites Δ et Δ'.

Soient a, a', α, α' les traces respectives de D, D', Δ, Δ' sur le plan P, b et b' les points où D et D' sont rencontrées par une même droite issue du point O, β et β' les points où Δ et Δ' sont rencontrées par une même droite issue également de O. Les droites aa' et bb', rencontrant chacune les trois droites OA, D et D' de la surface S, sont situées sur cette surface. Par suite, lorsque OA pivote autour du point O, la surface S passe constamment par le quadrilatère gauche $aa'b'b$, de manière à engendrer un faisceau ponctuel, en restant constamment en correspondance homographique avec OA. De même la surface Σ passe constamment par le quadrilatère gauche $\alpha\alpha'\beta'\beta$ et forme un second faisceau ponctuel, en restant également en correspondance homographique avec OA. Par suite, les surfaces S et Σ des deux faisceaux se correspondent homographiquement et, d'après un théorème bien connu, leur intersection complète engendre une surface du quatrième ordre. Mais l'intersection comprend la droite OA qui décrit le plan P. La cubique gauche, complétant cette intersection, engendre donc une surface du troisième ordre.

Cette surface, comme on le voit presque immédiatement, peut encore être engendrée de la manière suivante. On fait pivoter le plan P autour du point O. Dans chacune de ses positions, on joint les points où il rencontre les droites D et D′, les points où il rencontre les droites Δ et Δ′. Le point d'insersection des droites ainsi obtenues engendre la surface du troisième ordre en question. Ce qu'il y a de particulièrement remarquable, c'est que toute surface du troisième ordre peut être décrite par le mode de génération qui vient d'être indiqué et même d'un certain nombre de manières. Ce nombre est égal à 216000, dans le cas où les 27 droites de la surface sont réelles. Enfin ce mode de génération conduit à un mode de représentation plane d'une surface quelconque du troisième ordre. En effet, au plan P, mobile autour du point O, menons, dans chacune de ses positions, une perpendiculaire en O. La trace de cette droite sur un plan fixe arbitraire correspondra à un point unique de la surface et réciproquement.

Il y aurait là matière à de plus amples développements; mais je me bornerai à ces remarques très générales, qui m'ont paru présenter un certain intérêt, sans pouvoir affirmer d'ailleurs qu'elles sont nouvelles.

Veuillez, Monsieur le Rédacteur, agréer l'expression de mes sentiments distingués.

G. Fouret.

Paris, le 5 juin 1895.