Nouvelles annales de mathématiques

E. Goursat

Sur une application de la formule de multiplication des arcs

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 245-248

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__245_0>

SUR UNE APPLICATION DE LA FORMULE DE MULTIPLICATION DES ARCS;

PAR M. E. GOURSAT.

1. La formule qui donne $\cos ma$ en fonction de $\cos a$ permet de déterminer tous les arcs, commensurables avec la circonférence, pour lesquels $\cos^2 a$ est égal à un nombre rationnel. On trouve par là même tous ceux de ces arcs dont une des lignes trigonométriques est commensurable.

La formule qui donne $\cos ma$ en fonction de $\cos a$, m étant un nombre entier positif, peut s'écrire

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} 2\cos ma &= (2\cos a)^m - A_m^1 (2\cos a)^{m-2} + A_m^2 (2\cos a)^{m-4} \\ &\quad + (-1)^q A_m^q (2\cos a)^{m-2q} + \ldots; \end{aligned} \right.$$

le second membre est un polynome entier, de degré m par rapport à $2\cos a$, ne contenant que des termes dont le degré est de même parité que m, et tous les coefficients $A_m^1, A_m^2, \ldots, A_m^q, \ldots$ sont *des nombres entiers*. La loi se vérifie pour les premières valeurs de m

$$\begin{aligned} 2\cos 2a &= (2\cos a)^2 - 2, \\ 2\cos 3a &= (2\cos a)^3 - 3(2\cos a), \\ 2\cos 4a &= (2\cos a)^4 - 4(2\cos a)^2 + 2, \\ 2\cos 5a &= (2\cos a)^5 - 5(2\cos a)^3 + 5(2\cos a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

on démontre ensuite que la loi est générale à l'aide de la relation de récurrence

$$2\cos(m+1)a = 4\cos a \cos ma - 2\cos(m-1)a.$$

Cela posé, soit a un arc commensurable avec π, et $2p$

un nombre pair positif tel que $2pa$ soit un multiple de π. Remplaçons m par $2p$ dans la formule (1); on a $\cos 2pa = \pm 2$, et la formule (1) devient

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \pm 2 = (2\cos a)^{2p} - A^1_{2p}(2\cos a)^{2p-2} + \ldots \\ + (-1)^q A^q_m (2\cos a)^{2p-2q} + \ldots \end{aligned}\right.$$

ou, en posant

$$4\cos^2 a = x,$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x) = x^p - A^1_{2p}x^{p-1} + \ldots \\ + (-1)^q A^q_m x^{p-q} + \ldots \pm 2 = 0. \end{aligned}\right.$$

On voit donc que x est racine d'une équation algébrique à coefficients entiers, le premier coefficient étant égal à l'unité. Si cette équation admet une racine commensurable, on sait que cette racine est égale à un nombre entier. Comme x est compris entre 0 et 4, les seules valeurs admissibles sont 0, 1, 2, 3, 4 et, par conséquent, les seules valeurs possibles de $\cos a$ sont :

$$0, \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \pm 1.$$

On voit qu'en se bornant au premier quadrant les seuls arcs répondant à la question sont les arcs de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

2. La question peut être généralisée. Je dirai, pour abréger, qu'un nombre x est une irrationnelle algébrique d'ordre r, lorsque x est racine d'une équation algébrique entière d'ordre r, irréductible, à coefficients commensurables. Proposons-nous d'obtenir tous les arcs, commensurables avec la circonférence, dont une des lignes trigonométriques est une irrationnelle d'un ordre donné. Le problème sera évidemment résolu, si l'on a obtenu tous les arcs, commensurables avec π, pour lesquels le carré du cosinus est une irrationnelle d'un ordre r donné à l'avance.

Soient donc a un arc commensurable avec π, et $2p$ un nombre entier tel que $2pa$ soit un multiple de π. Le premier membre de l'équation (3) doit admettre un diviseur de degré r, à coefficients commensurables. S'il en est ainsi, on sait, d'après un théorème dû à Gauss, que $f(x)$ doit être le produit de deux polynomes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ à coefficients entiers, $\varphi(x)$ étant de degré r; comme le coefficient de x^p dans $f(x)$ est un, le coefficient de x^r dans $\varphi(x)$ doit aussi être égal à l'unité, et, par suite, x doit être racine d'une équation de degré r

$$\varphi(x) = x^r + Ax^{r-1} + Bx^{r-2} + \ldots + L = 0,$$

dont tous les coefficients A, B, ..., L sont des nombres entiers. Comme toutes les racines de cette équation doivent être comprises entre 0 et 4, on a immédiatement une limite supérieure de chacun des coefficients A, B, C, ..., L. Il n'y a donc qu'un nombre *fini* d'arcs répondant à la question, en ne considérant pas comme distincts deux arcs qui diffèrent par un multiple de π.

Il résulte aussi de là qu'une irrationnelle donnée y ne peut être le cosinus d'un arc commensurable avec π que si $4y^2$ est racine d'une équation algébrique irréductible à coefficients entiers, le premier coefficient étant l'unité, ayant toutes ses racines positives et inférieures à 4. Par exemple, soit A un nombre rationnel, qui n'est pas égal au cube d'un autre nombre rationnel; $\sqrt[3]{A}$ ne peut pas être égal au cosinus d'un arc commensurable avec π.

Proposons-nous, pour donner une application, de trouver tous les arcs commensurables avec π, pour lesquels le carré du cosinus est une irrationnelle du second degré. D'après ce qu'on vient de voir, $x = 4\cos^2 a$ doit être racine d'une équation du second degré

$$x^2 - Ax + B = 0,$$

où A et B sont des nombres entiers positifs, ayant ses deux racines réelles et positives, et inférieures à 4, ce qui exige que l'on ait

$$A < 8, \quad B < 16, \quad A^2 - 4B > 0, \quad 16 + B > 4A.$$

En négligeant les équations qui admettent des racines entières, on ne trouve que quatre équations satisfaisant à ces conditions

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \quad x^2 - 4x + 1 = 0,$$
$$x^2 - 4x + 2 = 0, \quad x^2 - 5x + 5 = 0,$$

les seules valeurs possibles pour $\cos a$ sont donc les suivantes :

$$\cos a = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{4},$$
$$\cos a = \pm\sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}} = \frac{\pm \sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{4},$$
$$\cos a = \frac{\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}{2},$$
$$\cos a = \frac{\pm\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Les arcs correspondants sont bien commensurables avec la circonférence. On a, en effet, en se bornant au premier quadrant,

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \qquad \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$
$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \qquad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$
$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \qquad \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2},$$
$$\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \qquad \cos\frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$