Nouvelles annales de mathématiques

E. Barisien

Sur les podaires successives d'une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 233-244

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__233_0>

SUR LES PODAIRES SUCCESSIVES D'UNE COURBE [fin [1]];

PAR M. LE CAPITAINE E. BARISIEN.

III. — APPLICATION AU CERCLE ET A SES PODAIRES PAR RAPPORT A UN POINT DE LA CIRCONFÉRENCE DU CERCLE.

En prenant pour pôle le point de la circonférence et pour axe polaire le diamètre passant par le point, l'équation du cercle est

$$r = a\cos\theta,$$

a désignant le diamètre du cercle.

Nous avons donc

$$r' = -a\sin\theta, \qquad r'' = -a\cos\theta,$$

$$r^2 + r'^2 = a^2, \qquad r'^2 - rr'' = a^2, \qquad r^2 + 2r'^2 - rr'' = 2a^2.$$

Aire de la $m^{\text{ième}}$ podaire. — On trouve

$$\frac{dU_m}{d\theta} = \frac{a^2}{2}(m+1)\cos^{2m+2}\theta.$$

Donc

$$U_m = a^2(m+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+2}\theta\, d\theta.$$

Or, on sait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+2}\theta\, d\theta = \frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2.4.6\ldots(2m+2)}\,\frac{\pi}{2}.$$

Par suite

$$U_m = \frac{\pi a^2}{4}\,\frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2.4.6\ldots 2m},$$

(1) *Voir* même Tome, p. 207.

ou encore

$$U_m = \frac{\pi a^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2m}\right).$$

Donc

$$\text{(Cercle)}\quad U_0 = \frac{\pi a^2}{4},$$

$$\text{(Limaçon de Pascal)}\quad U_1 = \frac{3\pi a^2}{8},$$

$$U_2 = \frac{15\pi a^2}{32},$$

$$U_3 = \frac{35\pi a^2}{64},$$

$$U_4 = \frac{315\pi a^2}{512},$$

....

Si l'on veut avoir l'équation de la $m^{\text{ième}}$ podaire, il suffit d'éliminer θ entre les deux équations

$$\theta_m = (m+1)\theta,$$
$$r_m = a\cos^{m+1}\theta,$$

ce qui donne

$$r_m = a\cos^{m+1}\left(\frac{\theta_m}{m+1}\right).$$

Rayon de courbure de la $m^{ième}$ podaire

$$R_m = \frac{a(m+1)}{m+2}\cos^m\theta.$$

On trouve par suite, pour la longueur de la développée de la $m^{\text{ième}}$ podaire,

$$S_m = 2a\,\frac{(m+1)}{m+2}\,(\cos^m\theta)_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}},$$

c'est-à-dire

$$S_m = \frac{2a(m+1)}{m+2}.$$

Rectification de la $m^{ième}$ podaire. — On a

$$\frac{ds_m}{d\theta} = a(m+1)\cos^m\theta.$$

Donc

$$s_m = 2a(m+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\theta\, d\theta.$$

Si m est pair, on aura

$$s_m = 2a(m+1)\,\frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m}\,\frac{\pi}{2}.$$

Si m est impair, on aura

$$s_m = 2a(m+1)\,\frac{2.4.6\ldots(m-1)}{1.3.5\ldots m}.$$

On a donc

$$\begin{array}{rl}
\text{(Cercle)} & s_0 = \pi a, \\
\text{(Limaçon de Pascal)} & s_1 = 4a, \\
 & s_2 = \dfrac{3\pi a}{2}, \\
 & s_3 = \dfrac{16a}{3}, \\
 & s_4 = \dfrac{15\pi a}{8}, \\
 & s_5 = \dfrac{32a}{5}, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Anti-podaires. — Pour la première anti-podaire, on trouve

$$\theta_{-1} = 0, \qquad U_{-1} = 0.$$

C'est qu'en effet la première anti-podaire se réduit alors à l'autre extrémité P_{-1} du diamètre passant par O.

La seconde anti-podaire donne

$$\theta_{-2} = -\theta, \qquad r_{-2} = \frac{a}{\cos\theta}.$$

Son équation est par suite

$$r_{-2} = \frac{a}{\cos \theta_{-2}}.$$

Elle représente la droite tangente à l'extrémité P_{-1} du diamètre passant par O.

Pour la troisième anti-podaire, on a

$$\theta_{-3} = -2\theta, \qquad r_{-3} = \frac{a}{\cos^2 \theta}.$$

Son équation est donc

$$r_{-3} = \frac{a}{\cos^2 \frac{\theta_{-3}}{2}}.$$

Elle représente une parabole ayant pour sommet le point P_{-1} et pour foyer le point O. On sait, en effet, que le lieu des projections du foyer d'une parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet.

Les autres anti-podaires successives sont alors les anti-podaires du foyer de la parabole.

Aire de la podaire de la développée de la courbe. — La courbe primitive étant un cercle, sa développée n'est autre chose que le centre du cercle : par suite, la podaire de ce point est le lieu des projections du point sur les droites passant par le centre du cercle. Ce lieu est le cercle de rayon $\frac{a}{4}$ dont l'aire est

$$W_1 = \frac{\pi a^2}{16}.$$

Aire de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ *podaire.* — On a

$$\frac{dW_m}{d\theta} = \frac{a^2(m+1)}{2} \cos^2 \theta \sin^{2m} \theta.$$

Donc

$$W_m = a^2(m+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\theta \cos^2\theta \, d\theta,$$

c'est-à-dire

$$W_m = \frac{\pi a^2}{4} \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}.$$

Par conséquent

$$W_m = \frac{U_m}{2m+1}.$$

Rayon de courbure de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ *podaire.* — Nous n'avons pas donné de formule générale pour ce rayon de courbure $\mathcal{R}_m$, parce qu'elle serait trop compliquée. Dans le cas présent, nous avons

$$\rho_m = a \sin\theta \cos^m\theta.$$

Or on a

$$\mathcal{R}_m = \frac{(\rho_m^2 + \rho_m'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho_m^2 + 2\rho_m'^2 - \rho_m \rho_m''}.$$

En posant

$$\rho_m' = \frac{d\rho_m}{d\omega_m}, \qquad \rho_m'' = \frac{d^2\rho_m}{d\omega_m^2},$$

on a donc

$$\begin{aligned}\rho_m' &= a\cos^{m-1}\theta(\cos^2\theta - m\sin^2\theta)\frac{d\theta}{d\omega_m}\\ &= \frac{a}{m+1}\cos^{m-1}\theta(\cos^2\theta - m\sin^2\theta).\end{aligned}$$

On calculerait de même ρ_m''. On a enfin

$$\mathcal{R}_m = \frac{a\cos^{m-1}\theta}{m+1} \frac{(m^2\sin^2\theta + \cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{m^2\sin^2\theta - m\sin^2\theta\cos 2\theta + \cos^2\theta(1+\cos^2\theta)}.$$

Longueur de la développée de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ *podaire.* — On a

$$\mathcal{S}_m = 2(\mathcal{R}_m)_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{m+1}.$$

IV. — Application a la lemniscate de Bernoulli et a ses podaires du centre.

L'équation cartésienne de la lemniscate de Bernoulli

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

devient en coordonnées polaires

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

On trouve pour l'aire U_0 de la courbe

$$U_0 = a^2.$$

Aire de la $m^{\text{ième}}$ podaire. — On trouve

$$U_m = 2a^2(m+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{(2m+1)} 2\theta \, d\theta = \frac{2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\, a^2.$$

Donc

$$U_0 = a^2,$$
$$U_1 = 2a^2,$$
$$U_2 = \frac{8a^2}{3},$$
$$U_3 = \frac{48a^2}{15},$$
$$U_4 = \frac{128a^2}{35},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'équation de la $m^{\text{ième}}$ podaire est

$$r_m^2 = a^2 \cos^{2m+1}\left(\frac{2\theta_m}{2m+1}\right).$$

Remarquons que l'aire U_m peut aussi s'écrire

$$U_m = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2m-1}\right)a^2.$$

Si donc on compare cette aire à l'aire analogue de la $m^{\text{ième}}$ podaire du cercle (§ III), on a la propriété suivante :

Si l'on considère une lemniscate de centre O et dont l'un des sommets est en A, tel que $OA = a$, avec le cercle décrit sur AO comme diamètre, le produit des aires des $m^{\text{ièmes}}$ podaires relatives à la lemniscate et au cercle a pour expression

$$\frac{\pi a^4}{4}(2m+1).$$

On en déduit l'identité assez curieuse

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2m-1}\right)\left(1+\frac{1}{2m}\right) = 2m+1$$

ou

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p}\right) = p+1.$$

Rayon de courbure de la podaire d'ordre m. — On a

$$R_m = \frac{a(2m+1)}{2m+3}\cos^{m-\frac{1}{2}}2\theta.$$

Longueur de la développée de la podaire d'ordre m. — On déduit de la formule précédente

$$S_m = \frac{4a(2m+1)}{2m+3}\left(\cos^{m-\frac{1}{2}}2\theta\right)_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{4a(2m+1)}{2m+3}.$$

Pour $m = 0$, on obtient la longueur S_0 de la développée de la lemniscate

$$S_0 = \frac{4a}{3}.$$

Anti-podaires. — On trouve pour l'équation de cette anti-podaire

$$r_{-1} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta_{-1}}};$$

elle représente l'hyperbole équilatère ayant même arc réel en grandeur et en direction que celui de la lemniscate.

Toutes les autres anti-podaires sont par suite des courbes à branches infinies et ne présentent rien d'intéressant. Il en est de même des podaires des développées des anti-podaires.

Podaire de la développée de la lemniscate. — On trouve pour l'équation de cette podaire

$$\rho_1^2 = a^2 \sin^2 \frac{2\omega_1}{3} \cos \frac{2\omega_1}{3},$$

et pour son aire

$$W_m = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi = a^2.$$

Podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ podaire. — On a pour l'aire de cette podaire

$$W_m = 2a^2(2m+1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2\theta \cos^{2m-1} 2\theta \, d\theta,$$

$$W_m = a^2 \frac{2.4.6\ldots(2m-2)}{1.3.5\ldots(2m-1)}.$$

Donc

$$W_m = \frac{U_m}{2m}.$$

Rayon de courbure de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ podaire de la lemniscate. — Sans donner l'expression de ce rayon de courbure, laquelle est assez compliquée, nous nous contenterons de donner la longueur de *la développée de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ podaire*

$$S_m = 4(\mathcal{R}_m)_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{4a}{2m+1}.$$

V. — Application aux courbes de la famille

$$r^m = a^m \cos m\theta.$$

On a ici

$$r = a(\cos m\theta)^{\frac{1}{m}},$$

$$r^2 + r'^2 = a^2(\cos m\theta)^{\frac{2}{m}-2},$$

$$r'^2 - rr'' = ma^2(\cos m\theta)^{\frac{2}{m}-2}.$$

Donc

$$\frac{dV}{d\theta} = m, \qquad \frac{d\theta_1}{d\theta} = m+1, \qquad \theta_1 = (m+1)\theta$$

et

$$r_1 = a(\cos m\theta)^{\frac{m+1}{m}}.$$

Podaires successives. — On déduit de là pour l'équation de la première podaire

$$r_1 = a\left(\cos\frac{m}{m+1}\theta_1\right)^{\frac{m+1}{m}}$$

ou

$$r_1^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}}\cos\frac{m}{m+1}\theta_1.$$

Cette équation représente une courbe de même famille que la courbe primitive; c'est ce qu'a démontré M. de Rhéville à l'article déjà cité (*Nouvelles Annales*, 1890, p. 143).

L'équation de la deuxième podaire sera de même

$$r_2^{\frac{m}{2m+1}} = a^{\frac{m}{2m+1}}\cos\frac{m}{2m+1}\theta_2$$

et en général celle de la $n^{\text{ième}}$ podaire

$$r_n^{\frac{m}{nm+1}} = a^{\frac{m}{nm+1}}\cos\frac{m}{nm+1}\theta_n.$$

Rayon de courbure des podaires. — On trouve pour le rayon de courbure de la première podaire

$$R_1 = a(\cos m\theta)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{m+1}{2m+1}\right)$$

ou

$$R_1 = r\frac{m+1}{2m+1}.$$

Or, le rayon de courbure de la courbe primitive a pour expression

$$R_0 = \frac{a}{m+1}(\cos m\theta)^{\frac{1}{m}-1} = \frac{r}{(m+1)\cos m\theta} = \frac{r}{(m+1)\sin V}.$$

Donc, on a

$$r = (m+1)R_0\sin V.$$

C'est, aux notations près, la formule de M. du Chatenet rappelée par M. de Rhéville à l'article précité.

Pour la $n^{\text{ième}}$ podaire, on trouve

$$R_n = \frac{r^{m(n-1)+1}}{a^{m(n-1)}}\left[\frac{mn+1}{m(n-1)+1}\right].$$

Anti-podaires. — On trouve pour l'équation de la première anti-podaire

$$r_{-1}^{\frac{m}{1-m}} = a^{\frac{m}{1-m}}\cos\frac{m}{1-m}\theta_{-1}$$

et pour celle de la $n^{\text{ième}}$ podaire

$$r_{-n}^{\frac{m}{1-mn}} = a^{\frac{m}{1-mn}}\cos\frac{m}{1-mn}\theta_{-n}.$$

Il est intéressant de voir dans quel cas l'une des podaires successives peut être une *transformée par rayons vecteurs réciproques* de la courbe donnée.

Il faut déterminer n de façon que

$$\frac{m}{mn+1} = -m;$$

d'où

$$n = -\frac{2}{m}.$$

Comme m doit être un nombre entier, il faut donc que m soit égal à ± 1, ± 2, ou à une fraction de l'unité. Dans ce cas la courbe aura parmi l'une de ses podaires ou anti-podaires sa propre transformée par rayons vecteurs réciproques.

Si $m = \pm 1$, on a $n = \mp 2$, l'une des courbes est un cercle et sa transformée est la droite qui est en même temps la seconde anti-podaire du cercle par rapport à un point de sa circonférence.

Si $m = \pm 2$, il en résulte $n = \mp 1$, et l'on obtient les mêmes courbes que précédemment.

Si $m = -\frac{1}{2}$, on a $n = 4$, ce qui veut dire que la courbe

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos\frac{\theta}{2}}}$$

a pour transformée par rayons vecteurs réciproques sa quatrième podaire.

Si $m = +\frac{1}{9}$, $n = -18$: c'est donc la dix-huitieme anti-podaire qui est la transformée de la courbe

$$r = a\sqrt[9]{\cos\frac{\theta}{9}}.$$

Écrivons maintenant les équations des podaires et anti-podaires des courbes de la famille

$$r^m = a^m \cos m\theta,$$

dans les cas particuliers de $m = 1$ et $m = 2$: le premier cas correspond au cercle et le second à la lemniscate. Nous avons étudié ces deux cas particuliers en détail.

1° $m = 1$:

$$r_{-n} = \frac{a}{\left(\cos\frac{\theta_{-n}}{n-1}\right)^{(n-1)}},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$r_{-3} = \frac{a}{\cos^2\frac{\theta_{-3}}{2}} \qquad \text{(Parabole)},$$

$$r_{-2} = \frac{a}{\cos\theta_{-2}} \qquad \text{(Droite)},$$

$$\left\{\begin{array}{l} r_{-1} = a \\ \theta_{-1} = 0 \end{array}\right. \qquad \text{(Point)},$$

$$r = a\cos\theta \qquad \text{(Cercle)},$$

$$r_1 = a\cos^2\frac{\theta_1}{2} \qquad \text{(Limaçon de Pascal)},$$

$$r_2 = a\cos^3\frac{\theta_2}{3},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$r_n = a\left(\cos\frac{\theta_n}{n+1}\right)^{n+1};$$

2° $m = 2$:

$$r_{-n} = a\left(\cos\frac{2}{1-2n}\,\theta_{-n}\right)^{\frac{1-2n}{n}},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$r_{-1} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta_{-1}}} \qquad \text{(Hyperbole équilatère)},$$

$$r = (\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(Lemniscate de Bernoulli)},$$

$$r_1 = a\left(\cos\frac{2\theta_1}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$r_n = a\left(\cos\frac{2}{2n+1}\,\theta_n\right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

Nos formules donnent lieu également à des applications intéressantes relatives à la cycloïde et aux développantes de cercle.