NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. BARISIEN

Sur les podaires successives d'une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 207-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__207_0>

SUR LES PODAIRES SUCCESSIVES D'UNE COURBE [suite (1)];

PAR M. LE CAPITAINE E. BARISIEN.

Rayon de courbure de la première podaire. — On trouve sans difficulté, en faisant $m = 1$ dans la formule (11) et tenant compte des valeurs de r, r', r'',

$$R_1 = \frac{a^3 b^3}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,[a^2(2b^2 - a^2)\sin^2\theta + b^2(2a^2 - b^2)\cos^2\theta]}.$$

L'examen du dénominateur montre que R_1 ne peut devenir infini que si

$$a > b\sqrt{2},$$

auquel cas la podaire a des points d'inflexion. Dans ce cas, il est inutile de chercher la longueur de la développée de la première podaire, puisqu'elle a des branches infinies. Mais, lorsque

$$a < b\sqrt{2},$$

on a pour la longueur S_1 de la développée de la première podaire

$$S_1 = 4[R_1]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{4[b^3(2a^2 - b^2) - a^3(2b^2 - a^2)]}{(2a^2 - b^2)(2b^2 - a^2)}.$$

Rayon de courbure de la $m^{\text{ième}}$ podaire. — On a de même

$$R_m = ab\frac{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{2m-3}{2}}}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^{\frac{m-1}{2}}}$$
$$\times\left[\frac{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta + mc^2(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta)}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta + (m+1)c^2(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta)}\right].$$

(1) *Voir* même Tome, p. 157,

Et si

$$a > c\sqrt{m+1},$$

la développée de la $m^{\text{ième}}$ podaire est une courbe fermée d'aire S_m

$$S_m = 4[R_m]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{4(a-b)[m^2c^4 + ab(a^2+ab+b^2)]}{(a^2+mc^2)(b^2-mc^2)}.$$

Pour $m=0$, on retrouve bien la longueur de la développée de la courbe

$$S_0 = \frac{4(a^3-b^3)}{ab}.$$

Aire de la première anti-podaire de l'ellipse. — La formule (13) donne

$$\begin{aligned}\frac{dU_{-1}}{d\theta} = {} & \frac{a^2b^2}{2}\,\frac{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^3} \\ & - \frac{a^2b^2c^2}{2}\,\frac{(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta)}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^3}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}U_{-1} = {} & 2a^2b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)\,d\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^3} \\ & - 2a^2b^2c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta)\,d\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^3}.\end{aligned}$$

Ces intégrations s'effectuent facilement, comme dans le cas des podaires, et l'on trouve

$$U_{-1} = \pi ab - \frac{\pi c^4}{8ab}.$$

Donc

L'aire de la première anti-podaire du centre de l'ellipse est égale à l'aire de l'ellipse diminuée du tiers de l'aire de la développée de l'ellipse.

Aire de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire de l'ellipse. — On obtient par la formule (14)

$$U_{-m} = 2(m+1)a^2b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^m}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{2m+1}}\,d\theta$$
$$- 2ma^4b^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^{m-1}}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{2m+1}}\,d\theta.$$

Rayon de courbure de la première anti-podaire. — On a par la formule (15)

$$R_{-1} = \frac{ab}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\times [a^2(2a^2 - b^2)\sin^2\theta + b^2(2b^2 - a^2)\cos^2\theta].$$

R_{-1} n'est jamais infini, quel que soit le rapport de a à b.

La développée de la première anti-podaire est donc toujours une courbe fermée qui a pour longueur

$$S_{-1} = L[R_{-1}]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{a^2b^2}[b^3(2a^2 - b^2) - a^3(2b^2 - a^2)].$$

Rayon de courbure de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire. — On a de même

$$R_{-m} = \frac{ab(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^{\frac{m+3}{2}}}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{2m+3}{2}}}$$
$$\times \left[\frac{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta - mc^2(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta)}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta - (m-1)c^2(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta)}\right].$$

Si donc

$$b > c\sqrt{m-1},$$

la développée de la $m^{\text{ième}}$ anti-podaire n'aura pas de branches infinies et sa longueur S_{-m} sera

$$S_{-m} = \frac{4(a-b)[m^2c^4 + ab(a^2 + ab + b^2)]}{(a^2 - mc^2)(b^2 + mc^2)}.$$

Aire de la podaire de la développée de l'ellipse. — La formule (17) donne

$$W_1 = 2a^4 b^4 c^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)(a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}(a-b)^2.$$

La comparaison des aires U_1 et W_1 donne lieu à la relation suivante :

$$U_1 - W_1 = \pi ab,$$

c'est-à-dire que la différence des aires de la première podaire de l'ellipse et de la podaire de la développée de l'ellipse est égale à l'aire de l'ellipse.

Aire de la podaire de la développée de la $(m-1)^{ième}$ *podaire.*—On trouve par application de la formule (18)

$$W_m = 2m a^4 b^4 c^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta (a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^{2m-3} \, d\theta}{(a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)^{m+1}}$$

$$- 2(m-1) a^2 b^2 c^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta (a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^{2m-3} \, d\theta}{(a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)^{m}}.$$

En posant $\tang\theta = u$, on effectuerait ces intégrales comme pour les aires des podaires et anti-podaires, en les ramenant aux intégrales connues de la forme

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{(a^4 u^2 + b^4)^p}.$$

Aire de la podaire de la développée de la $m^{ième}$ *anti-podaire de l'ellipse.* — La formule (19) donne

$$W_{-m} = 2m a^2 b^2 c^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta (a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)^{m-1}}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^{2m+1}}$$

$$- 2(m-1) a^4 b^4 c^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta (a^4 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^{m-2} \, d\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^{2m+1}}.$$

En particulier, pour $m = 1$, on a

$$W_{-1} = 2a^2 b^2 c^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^3} = \frac{\pi c^4}{8ab}.$$

En comparant U_{-1} et W_{-1}, on a la relation

$$U_{-1} + W_{-1} = \pi ab.$$

Donc l'aire de la première anti-podaire de l'ellipse augmentée de l'aire de la podaire de la développée de cette anti-podaire est égale à l'aire de l'ellipse.

Nous avons donc aussi pour l'ellipse

$$U_1 - W_1 = U_{-1} + W_{-1}.$$

De quelques autres propriétés des podaires de l'ellipse. — Voici d'autres propriétés sur les podaires d'ellipse qui sont faciles à démontrer et qu'il suffit de signaler :

1° L'aire de la podaire d'un point (α, β) du plan d'une ellipse est

$$A = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2);$$

2° L'aire du lieu des projections du point (α, β) sur les normales à l'ellipse a pour expression

$$A' = \frac{\pi}{2}(a - b)^2 + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2);$$

3° Comme conséquence des deux premières propositions, on a

$$2A' - A = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 - 4ab) = \text{const.},$$

quel que soit le point (α, β);

4° La somme des aires des podaires des quatre sommets d'une ellipse est égale à six fois l'aire de la podaire du centre.

II. — Application a la parabole et a ses podaires du sommet.

Il est facile de démontrer que l'équation de la parabole étant

$$y^2 = 2px,$$

celle de sa première podaire du sommet est

$$y^2 = -\frac{2x^3}{2x + p}.$$

C'est l'équation d'une cissoïde de Dioclès ayant pour asymptote la directrice de la parabole. Cette cissoïde est en même temps la transformée par rayons vecteurs réciproques de la parabole.

Si l'on prend le sommet de la parabole pour pôle et pour axe polaire l'axe de la parabole, cette parabole a pour équation

$$r = 2p\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

L'aire de la cissoïde comprise entre la courbe et son asymptote est finie et a pour expression $\frac{3\pi p^2}{16}$.

La seconde podaire du sommet de la parabole ou première podaire de la cissoïde est une courbe fermée ayant pour aire

$$U_2 = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{p}{4}\right)^2.$$

On trouve aussi pour la troisième podaire de la parabole ou deuxième de la cissoïde

$$U_3 = \frac{1}{216}\pi\left(\frac{p}{4}\right)^2.$$

Ces aires deviennent de plus en plus petites et tendent à se rapprocher de zéro.

Première anti-podaire de la parabole. — Cherchons directement l'équation de cette anti-podaire qui est une courbe à branches infinies et dont l'aire ne présente aucun intérêt.

M étant un point de la parabole et O son sommet, il suffit de chercher l'enveloppe de la droite perpendiculaire en M à MO pour avoir l'équation de l'anti-podaire.

Si y est l'ordonnée du point M, l'équation de la perpendiculaire en M à MO est

$$Y - y = -\frac{y}{2p}\left(X - \frac{y^2}{2p}\right).$$

Cette équation ordonnée par rapport à y peut s'écrire

$$y^3 + 2p(2p - X)y - 4p^2 Y = 0.$$

Si nous exprimons que cette équation en y a une racine double, nous avons immédiatement pour l'équation de l'enveloppe

$$Y^2 = \frac{2(X - 2p)^3}{27p}.$$

C'est une courbe de forme analogue à la développée de la parabole.

Les autres courbes anti-podaires de la parabole ou podaires de développées n'offrent rien d'intéressant.

(*A suivre.*)