Nouvelles annales de mathématiques

Ed. Maillet

Des conditions pour que l'échelle d'une suite récurrente soit irréductible

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 197-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__197_1>

DES CONDITIONS POUR QUE L'ÉCHELLE D'UNE SUITE RÉCURRENTE SOIT IRRÉDUCTIBLE;

PAR M. ED. MAILLET,
Ingénieur des Ponts et Chaussées [1].

II.

ALTRE MANIÈRE D'ÉTABLIR UN CRITERIUM POUR LA RÉDUCTIBILITÉ D'UNE LOI POUR UNE SUITE RÉCURRENTE DONNÉE.

Supposons que la loi (1) soit réductible à la loi (2), pour la suite considérée; on aura

$$(3)\quad \begin{cases} Y_{p-1}+a_1Y_{p-2}+\ldots+a_{p-1}Y_0=0,\\ Y_p+a_1Y_{p-1}+\ldots+a_{p-1}Y_1=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ Y_{2p-2}+a_1Y_{2p-3}+\ldots+a_{p-1}Y_{p-1}=0,\end{cases}$$

et, par suite,

$$(4)\quad \begin{vmatrix} Y_{p-1} & Y_{p-2} & \ldots & Y_0\\ Y_p & Y_{p-1} & \ldots & Y_1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ Y_{2p-2} & Y_{2p-3} & \ldots & Y_{p-1}\end{vmatrix}=0.$$

Cette condition est nécessaire; on aurait même plus

[1] *Voir* même Tome, p. 152.

généralement ([1]) :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} Y_{n+p-1} & Y_{n+p-2} & \dots & Y_n \\ Y_{n+p} & Y_{n+p-1} & \dots & Y_{n+1} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ Y_{n+2p-2} & Y_{n+2p-3} & \dots & Y_{n+p-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons que le déterminant (4) est symétrique par rapport à la diagonale $Y_0, \dots, Y_{2p-2}$.

Supposons maintenant que la suite considérée satisfasse à une loi d'ordre $p-2$

$$(6)\qquad Y_n + b_1 Y_{n-1} + \dots + b_{p-2} Y_{n-p+2} = 0.$$

On aura

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} Y_{p-2} & Y_{p-3} & \dots & Y_0 \\ Y_{p-1} & Y_{p-2} & \dots & Y_1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ Y_{2p-4} & Y_{2p-5} & \dots & Y_{p-2} \end{vmatrix} = 0,$$

d'après ce qui précède.

Considérons le mineur principal du premier ordre du déterminant (4)

$$(8)\qquad \delta_i = \begin{vmatrix} Y_{p-1} & \dots & Y_{i+1} & Y_{i-1} & \dots & Y_0 \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ Y_{p+i-2} & \dots & Y_{2i} & Y_{2i-2} & \dots & Y_{i-1} \\ Y_{p+i} & \dots & Y_{2i+2} & Y_{2i} & \dots & Y_{i+1} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ Y_{2p-2} & \dots & Y_{p+i} & Y_{p+i-2} & \dots & Y_{p-1} \end{vmatrix}.$$

D'après (6), on aura

$$\delta_i = -\begin{vmatrix} b_1 Y_{p-2} + \dots + b_{p-2} Y_1 & \dots & Y_{i+1} & Y_{i-1} & \dots & Y_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ b_1 Y_{p+i-3} + \dots + b_{p-2} Y_i & \dots & Y_{2i} & Y_{2i-2} & \dots & Y_{i-1} \\ b_1 Y_{p+i-1} + \dots + b_{p-2} Y_{i+2} & \dots & Y_{2i+2} & Y_{2i} & \dots & Y_{i+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ b_1 Y_{2p-3} + \dots + b_{p-2} Y_p & \dots & Y_{p+i} & Y_{p+i-2} & \dots & Y_{p-1} \end{vmatrix}.$$

([1]) Toutes les lois, la loi (1) par exemple, donnent lieu à des relations analogues.

Ce déterminant peut être décomposé en $p - 2$ autres dont $p - 3$ sont nuls comme ayant leurs colonnes proportionnelles, en sorte que

$$\delta_i = -b_i \begin{vmatrix} Y_i & Y_{p-2} & \ldots & Y_{i+1} & Y_{i-1} & \ldots & Y_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_{2i-1} & Y_{p+i-3} & \ldots & Y_{2i} & Y_{2i-2} & \ldots & Y_{i-1} \\ Y_{2i+1} & Y_{p+i-1} & \ldots & Y_{2i+2} & Y_{2i} & \ldots & Y_{i+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_{p+i-1} & Y_{2p-3} & \ldots & Y_{p+i} & Y_{p+i-2} & \ldots & Y_{p-1} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant qui multiplie b_i dans le deuxième membre est au signe près un mineur du premier ordre du déterminant (4) qui est compris dans les mêmes colonnes de (4) que le mineur (7), et qui, par suite, est nul, d'après un théorème connu, puisque le déterminant (4) est symétrique par rapport à la diagonale $Y_0, \ldots, Y_{2p-2}$.

Il en résulte qu'un mineur quelconque du premier ordre de (4) est nul.

La démonstration aurait pu d'ailleurs s'opérer de même en partant d'un mineur quelconque du premier ordre de (4), directement.

Ainsi, quand pour la suite considérée la loi (1) d'ordre p est réductible à l'ordre $p - 2$, le déterminant (4) et ses mineurs du premier ordre sont nuls.

La propriété est d'ailleurs générale et s'établit par des procédés analogues.

Supposons que la loi soit réductible à l'ordre $p - q$ pour la suite considérée, laquelle satisfera alors à la loi

$$(9) \qquad Y_n + c_1 Y_{n-1} + \ldots + c_{p-q} Y_{n-p+q} = 0, \qquad q > 1.$$

D'après ce qu'on a vu au début, la suite satisfera à des lois d'ordre $p - 1$, $p - 2$, $\ldots$, $p + q + 1$; nous savons que le déterminant (4) et ses mineurs du premier ordre sont tous nuls; admettons qu'il en soit de même pour tous les mineurs d'ordre $\leqq q-2$ et montrons qu'il en est de même des mineurs d'ordre $q-1$, en remarquant que le mineur d'ordre $q-1$

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} Y_{p-q} & Y_{p-q-1} & \dots & Y_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{2(p-q)} & Y_{2(p-q)-1} & \dots & Y_{p-q} \end{vmatrix} = 0$$

à cause [1] de l'existence de la loi (9).

Supposons qu'il y ait des mineurs d'ordre $q-1$ qui soient différents de zéro; parmi ceux d'entre eux qui sont contenus dans les mêmes $(p-q+1)$ lignes arbitrairement choisies de (4), de la forme

$$(11)\qquad \delta = \begin{vmatrix} Y_r & \dots & Y_s \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{r_1} & \dots & Y_{s_1} \end{vmatrix}.$$

où l'on suppose que, comme dans (4), les colonnes soient ordonnées de façon que dans chaque ligne les indices aillent en décroissant, et que

$$(12)\qquad r > \dots > s, \qquad \dots, \qquad r_1 > \dots > s_1;$$

choisissons celui δ pour lequel les indices de la première colonne sont le plus petit possible : il suffit d'ailleurs que cette condition soit remplie pour une ligne de δ, la première par exemple, pour qu'elle ait lieu pour les autres lignes. Par hypothèse $\delta \neq 0$; par suite, on aura $r-s > p-q$, sans quoi, à cause des conditions (12), δ serait contenu dans les mêmes colonnes que (10), et serait nul, puisque (4) est symétrique par rapport à la diagonale $Y_0, \dots, Y_{2p-2}$.

La relation (9) permettra alors de remplacer chaque

---

(1) Il suffit, pour le voir, d'écrire les équations analogues à (3) résultant de la loi (9).

élément de la première colonne de δ en fonction linéaire homogène d'éléments d'indices respectivement plus petits compris dans la même ligne de (4). Le mineur δ sera donc égal à une fonction linéaire homogène de déterminants mineurs de (4) d'ordre $q - 1$; si dans chacun de ces déterminants on ordonne les colonnes de la même manière que pour δ, les indices de la première colonne seront respectivement plus petits que les indices de la première colonne de δ compris dans les mêmes lignes. D'après l'hypothèse que nous avons faite sur δ, ces déterminants seront tous nuls, et dès lors il en sera de même de δ.

On ne peut donc supposer $\delta \neq 0$.

On en conclut pour $q = 3$ que le déterminant (4) et ses mineurs des deux premiers ordres sont nuls; par suite, pour $q = 4$, le déterminant (4) et ses mineurs des trois premiers ordres sont nuls; et ainsi de suite. D'où l'on tire :

Pour que la loi (1) *d'ordre p soit réductible pour la suite considérée à l'ordre* $p - q$, *il est nécessaire que le déterminant* (4) *et tous ses mineurs jusqu'à l'ordre* $q - 1$ *soient tous nuls.*

Remarquons que l'on aurait pu raisonner identiquement de même sur le déterminant (5) : il aurait suffi d'augmenter partout les indices de la quantité n.

Remarquons également qu'on pourrait ne pas invoquer les propriétés des déterminants symétriques. Il suffirait pour cela d'opérer à l'aide des lois (6) et (9) sur les éléments de chaque colonne de δ_i et δ qui ont dans cette colonne les plus forts indices, et qui sont d'ailleurs compris dans une même ligne, comme nous l'avons fait sur les éléments de la première colonne de δ_i et δ. On supposerait de plus que δ_i est un mineur quelconque du premier ordre. En répétant au besoin cette opération sur les nouveaux mineurs obtenus, on finirait par voir que δ_i et δ sont proportionnels respectivement aux mineurs (7) et (10), et par suite nuls.

Je dis maintenant que la condition nécessaire que nous venons de trouver est suffisante.

Supposons que le déterminant (4) et ses mineurs jusqu'à l'ordre $r-1$ soient nuls, mais qu'un mineur d'ordre r soit $\neq 0$.

Si l'on pose un système analogue à (3)

$$(12)\quad \begin{cases} a_0 Y_{p-1} + a_1 Y_{p-2} + \ldots + a_{p-1} Y_0 = 0, \\ a_0 Y_p + a_1 Y_{p-1} + \ldots + a_{p-1} Y_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_0 Y_{2p-2} + a_1 Y_{2p-3} + \ldots + a_{p-1} Y_{p-1} = 0, \end{cases}$$

on sait que l'on peut y satisfaire par des valeurs de a_0, a_1, ..., a_{p-1}, dont $p-r$; celles qui correspondent aux colonnes du mineur d'ordre r différent de zéro, sont déterminées en fonction des r autres choisies arbitrairement.

D'ailleurs, multiplions les deux membres de ces p équations respectivement par A_p, A_{p-1}, ..., A_1 et ajoutons membre à membre; il vient

$$\begin{aligned}(A_1 Y_{2p-2} + \ldots + A_p Y_{p-1})\, a_0 + \ldots \\ + (A_1 Y_{p-1} + \ldots + A_p Y_0)\, a_{p-1} = 0,\end{aligned}$$

ou, d'après (1),

$$(13)\qquad a_0 Y_{2p-1} + \ldots + a_{p-1} Y_p = 0.$$

En opérant sur les $p-1$ dernières équations (12) et sur (13) comme nous venons de le faire sur les p équations (12), puis continuant de la sorte, on aura évidemment

$$(14)\qquad a_0 Y_n + a_1 Y_{n-1} + \ldots + a_{p-1} Y_{n-p+1} = 0;$$

c'est-à-dire que la suite satisfait à la loi (14) où r des coefficients convenablement placés sont arbitraires.

Dès lors, parmi les rapports des quantités a_0, a_1, ..., a_{p-1} à la première d'entre elles qui ne s'annule pas (et l'on sait qu'il y en a), il y en aura $r - 1$ arbitraires, et l'équation génératrice de la loi (14) renfermera $r - 1$ coefficients arbitraires : on pourra donc fixer arbitrairement la valeur de $r - 1$ racines de cette équation génératrice qui est au plus de degré $p - 1$, et, d'après ce que nous avons vu, d'après la relation (c) en particulier, l'équation génératrice de la loi irréductible à laquelle satisfait la suite est de degré $\leqq (p-1)-(r-1) = p - r$, ainsi qu'on le montre facilement. La suite satisfait à une loi d'ordre $p - r$: elle ne peut satisfaire à une loi d'ordre moindre, d'après ce qui précède, puisqu'il y a un mineur d'ordre r différent de zéro. Donc [1] :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la loi* (1) *d'ordre* p *soit réductible à l'ordre* $p - q$ *pour une suite récurrente*

$$Y_0, \quad Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_n, \quad \ldots,$$

satisfaisant à cette loi, est que le déterminant

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} Y_{p-1} & Y_{p-2} & \ldots & Y_0 \\ Y_p & Y_{p-1} & \ldots & Y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_{2p-2} & Y_{2p-3} & \ldots & Y_{p-1} \end{vmatrix}$$

soit nul ainsi que tous ses mineurs d'ordre $\leqq q - 1$.

On obtient ainsi sous forme explicite, et sans avoir d'élimination à faire, les conditions nécessaires et suffi-

[1] M. Kronecker est arrivé à ce théorème par une méthode semblable, quoique légèrement différente (*Monatsberichte der Berl. Akad.*, 16 juin 1881.)

santes pour que la loi (1) soit réductible à l'ordre $p-q$ pour la suite considérée, puisque l'on peut toujours exprimer $Y_p, \ldots, Y_{2p-2}$ à l'aide de $Y_{p-1}, \ldots, Y_0$ qui sont donnés et des coefficients $A_1, \ldots, A_p$.

En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que la loi soit réductible pour la suite considérée, ou pour que les équations $\Phi(x)=0$ et $\Psi_{p-1}(x)=0$ aient une racine commune, est que le déterminant (4) soit égal à zéro.

On déduit de ce théorème et de la Section II du Mémoire de M. M. d'Ocagne le corollaire suivant :

Corollaire. — La condition nécessaire et suffisante pour que chaque terme général d'une suite du $p^{\text{ième}}$ ordre, quelconque, soit une fonction linéaire homogène de p termes généraux consécutifs d'une suite donnée de même échelle est que l'échelle considérée soit irréductible pour cette dernière suite.

Cette propriété a d'ailleurs été établie et utilisée par M. M. d'Ocagne, quand la suite donnée est ce qu'il a appelé *la suite fondamentale*.

III.

APPLICATIONS.

1° L'équation

$$\Psi_{p-1}(x) = Y_{p-1} + Q_1(x)\,Y_{p-2} + \ldots + Q_{p-1}(x)\,Y_0 = 0$$

est de la forme

$$(15) \qquad x^{p-1} + \alpha_1 x^{p-2} + \ldots + \alpha_{p-1} = 0.$$

On pourra toujours déterminer $Y_{p-1}, \ldots, Y_0$ de façon que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ aient des valeurs choisies arbitrairement, ou que (15) soit une équation quelconque de degré $p-1$, car on est conduit au système

$$(16)\quad \begin{cases} Y_0 & = 1, \\ A_1 Y_0 + Y_1 & = \alpha_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots, \\ A_{p-1} Y_0 + A_{p-2} Y_1 + \dots + Y_{p-1} & = \alpha_{p-1}, \end{cases}$$

où le déterminant des coefficients est égal à l'unité.

La condition nécessaire et suffisante pour que les équations $\Phi(x) = 0$ et $\Psi_{p-1}(x) = 0$ aient une racine commune est que le déterminant (4) soit nul. On pourra donc exprimer, en égalant à zéro un déterminant analogue à (4), de côté $p-1$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation de degré p et une de degré $p-1$ aient une racine commune.

Si, en particulier, on prend

$$\alpha_1 = A_1 \frac{p-1}{p}, \quad \dots, \quad \alpha_j = A_j \frac{p-j}{p}, \quad \dots, \quad \alpha_{p-1} = A_{p-1} \frac{1}{p},$$

le polynome $\Psi_{p-1}(x)$ sera égal à la dérivée de $\Phi(x)$ divisée par p. La condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi(x) = 0$ ait une racine double sera donc que le déterminant (4) soit nul. On en conclut :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'échelle* $(A_1, \dots, A_p)$ *soit irréductible pour la suite qui y satisfait et qui est définie par les* p *valeurs des termes initiaux* $Y_0, \dots, Y_{p-1}$ *telles que*

$$\begin{aligned} Y_0 & = 1, \\ A_1 Y_0 + Y_1 & = A_1 \frac{p-1}{p}, \\ A_2 Y_0 + A_1 Y_1 + Y_2 & = A_2 \frac{p-2}{p}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots, \\ A_{p-1} Y_0 + A_{p-2} Y_1 + \dots + Y_{p-1} & = A_{p-1} \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

est que l'équation génératrice

$$\Phi(x) = x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p = 0$$

n'ait pas de racine double.

2° M. M. d'Ocagne a énoncé [1] la propriété suivante :

Les puissances $p^{\text{ièmes}}$ *des nombres entiers*

$$0^\mu, \quad 1^\mu, \quad 2^\mu, \quad \ldots, \quad n^\mu, \quad \ldots$$

forment une suite récurrente qui admet pour polynome générateur irréductible $(x-1)^{\mu+1}$.

En formant pour ces suites le déterminant analogue de (5), on en conclut l'identité

$$\begin{vmatrix} x^\mu & (x+1)^\mu & \ldots & (x+\mu+1)^\mu \\ (x+1)^\mu & (x+2)^\mu & \ldots & (x+\mu+2)^\mu \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (x+\mu+1)^\mu & (x+\mu+2)^\mu & \ldots & (x+2\mu+2)^\mu \end{vmatrix} = 0,$$

qui a lieu quel que soit (x).

Il nous suffira de signaler, dès lors, que cet autre théorème de M. M. d'Ocagne [2]

Toute fonction algébrique et entière des termes de même rang de plusieurs suites récurrentes engendre elle-même une suite récurrente,

donnera lieu à une foule d'identités analogues.

Si $f(x)$ est un polynome entier en x de degré $\mu+1$, on aura

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+1) & \ldots & f(x+\mu+1) \\ f(x+1) & f(x+2) & \ldots & f(x+\mu+2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ f(x+\mu+1) & f(x+\mu+2) & \ldots & f(x+2\mu+2) \end{vmatrix} = 0,$$

quel que soit x.

---

(1) *Loc. cit.*
(2) *Loc. cit.*