ÉMILE PICARD

Sur deux théorèmes classique de cinématique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 177-183
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__177_0>

SUR DEUX THÉORÈMES CLASSIQUES DE CINÉMATIQUE [1];

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Commençons par le mouvement d'un plan sur un plan. Nous supposons démontrée l'existence du centre instantané de rotation, et nous voulons prouver que le mouvement revient au roulement d'une courbe sur une autre.

Deux remarques doivent être rappelées avant de commencer la démonstration. En premier lieu, si les coordonnées d'un point M sont des fonctions de t, et que M′ désigne la position du point au temps $t+\Delta t$, la distance MM′ sera de l'ordre de Δt pour une valeur arbitraire de t.

Je rappelle en second lieu que, si l'on a un segment de droite AB de longueur variable l, se déplaçant avec le temps, et étant en A′ B′ au temps $t+dt$, on a pour la différentielle dl

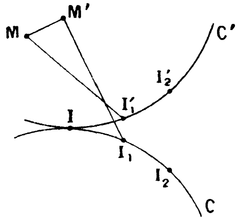
$$dl = -\,[\mathrm{AA'}\cos(\mathrm{A'AB}) + \mathrm{BB'}\cos(\mathrm{B'BA})],$$

Cela posé, considérons le système Σ au temps t; il occupe une position S, et il y a un certain point I dont la vitesse est nulle. Je marque ce point I sur le plan fixe. Au temps t_1, Σ occupe une autre position S_1; le centre instantané marqué sur le plan fixe est alors I_1. Nous aurons de même I_2 comme position du centre instantané

[1] Je reproduis ici la démonstration des deux théorèmes fondamentaux de la cinématique des systèmes invariables, telle que je la donnai en 1881 dans mon cours de la Faculté et que je la donne maintenant dans mon cours de l'École Centrale.

pour le temps t_2, et nous formons ainsi avec les points I, I_1, I_2, ... une courbe C qui est le lieu des centres instantanés sur le plan fixe.

Fig. 1.



Au temps t_1, le système Σ était en S_1. Marquons alors sur S_1 la position I_1 du centre instantané à cet instant, et ramenons Σ de la position S_1 à la position S qu'il occupait au temps t. Le point I_1 vient alors en I'_1 ; de même en ramenant Σ de S_2 en S, le point I_2 viendra en I'_2, et de cette manière nous construisons une seconde courbe C' lieu des points I, I'_1, I'_2, ..., qui est le lieu des centres instantanés dans le plan mobile quand on a ramené ce plan à la position S.

Il faut démontrer que les courbes C et C' roulent l'une sur l'autre pendant le mouvement, ce qui revient évidemment à montrer qu'elles sont tangentes au point I, et que, $t_1 - t$ tendant vers zéro, on a

$$\text{(1)} \qquad \lim \frac{\text{arc } II_1}{\text{arc } II'_1} = 1.$$

Il en résultera en effet que les arcs II_1, II'_1 et pareillement les arcs I_1I_2, $I'_1I'_2$, et ainsi de suite, différeront d'une quantité infiniment petite par rapport à euxmêmes, et par suite sur les courbes C et C' deux arcs finis quelconques, comptés à partir de I jusqu'à deux points correspondants des deux courbes, seront égaux.

J'envisage un point quelconque M du système Σ quand il occupe la position S; M sera en M' quand Σ sera venu en S_1, et la droite $M'I_1$ est normale en M' à la trajectoire de ce point. On a d'ailleurs

$$MI'_1 = M'I_1$$

puisque, quand Σ passe de S en S_1, M vient en M' et I'_1 en I_1. La différentielle du segment $M'I_1$ est donc nulle, et l'on a

$$(2) \qquad MM' \cos(MM'I_1) + I'_1 I_1 \cos(I'_1 I_1 M') = 0,$$

égalité qu'il faut bien entendre; d'après son origine même, elle est exacte aux infiniment petits près du second ordre.

Or MM' est infiniment petit du premier ordre et il en est de même de $\cos(MM'I_1)$; d'autre part $I'_1 I_1$ a une limite, inconnue pour nous actuellement, mais que nous pouvons supposer n'être pas perpendiculaire à MI, puisque M est arbitraire.

De là résulte que $\cos(I'_1 I_1 M')$ n'est pas infiniment petit, et l'égalité (2), entendue comme nous l'avons dit. montre que $I_1 I'_1$ *est un infiniment petit du second ordre*.

La démonstration va s'achever maintenant bien aisément. Formons le petit triangle $II_1I'_1$. On aura dans ce triangle

$$\sin I = \sin I'_1 \frac{I_1 I'_1}{II_1}.$$

Or, dans le second membre, le second facteur est le quotient d'un infiniment petit du second ordre par un infiniment petit du premier. On a donc

$$\lim \sin I = 0.$$

et, par suite, C *et* C' *sont tangentes en* I.

Le même triangle nous donne

$$\overline{I_1 I'_1}^2 = \overline{II'_1}^2 + \overline{II_1}^2 - 2\overline{II_1}.\overline{II'_1}\cos I,$$

égalité qu'on peut écrire

$$\overline{I_1 I'_1}^2 = (II'_1 - II_1)^2 + 4\overline{II_1}.\overline{II'_1}\sin^2\frac{I}{2};$$

d'où se conclut immédiatement que la différence

$$\overline{II'_1} - \overline{II_1}$$

est du second ordre, et *la relation* (1) *est par suite établie.*

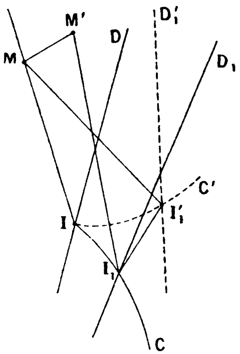
2. Nous allons suivre une marche analogue pour établir, relativement au mouvement général d'un solide invariable, le théorème concernant les deux surfaces réglées qui remplacent la base et la roulette.

Nous supposons démontrée l'existence de l'axe instantané de rotation et de glissement, et par suite à un moment déterminé les vitesses d'un point quelconque du système résultent d'une rotation autour de cet axe et d'un glissement le long du même axe.

Considérons le système Σ au temps t; il occupe une position S et nous avons l'axe instantané D. Au temps t_1, Σ est venu en S_1 et nous avons l'axe instantané D_1. Nous formons donc une première surface réglée lieu des droites D_1, D_2, ..., c'est-à-dire des axes instantanés dans l'espace, comme nous formions tout à l'heure la courbe C. Pareillement, ramenons Σ de S_1 en S en fixant D_1 dans S_1; cette droite viendra en D'_1, et nous aurons une seconde surface lieu des droites D, D'_1, ... qui est le lieu des axes instantanés dans le système mobile quand on a ramené ce système à la position S.

Sur la première surface traçons une courbe C rencontrant D, D_1, ... en I, I_1, ... Dans le transport de D_1 en D'_1 le point I_1 vient en I'_1 et nous avons alors

Fig. 2.



sur la seconde surface une courbe C′ correspondant à C et coupant D au même point I.

Cela posé, soit M un point arbitraire de Σ quand ce système est en S et soit M′ sa position quand Σ est en S_1. On a manifestement

$$MI'_1 = M'I_1,$$

et, en supposant $t_1 = t + dt$, le théorème sur la différentielle d'un segment nous donne

$$(3) \qquad MM'\cos(M'MI'_1) + I'_1 I_1 \cos(I_1 I'_1 M) = 0.$$

Le premier terme représente la projection de MM′ sur MI'_1 et à la limite sur MI, c'est-à-dire le produit par dt de la projection de la vitesse de M sur la direction MI. Mais la projection de la vitesse de M sur MI se réduit à la projection de la vitesse de translation V le long de D, car la vitesse due à la rotation est perpendiculaire à MI. Quant au second terme de (3), il représente la projection de $I'_1 I_1$ sur $I'_1 M$ ou, ce qui revient au même, sur la direction IM.

Nous allons maintenant faire coïncider successivement IM, qui est une direction arbitraire, avec les directions des axes des coordonnées. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la vitesse de translation V dirigée suivant D, et, en désignant par x, y, z les coordonnées de I, appelons $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ les coordonnées de I_1, et $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ celles de I'_1. L'égalité (3) donne, en menant successivement IM parallèle aux axes des x, des y et des z,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} - V \cos\alpha\, dt + dx - \delta x = 0, \\ - V \cos\beta\, dt + dy - \delta y = 0, \\ - V \cos\gamma\, dt + dz - \delta z = 0; \end{array} \right.$$

le premier terme est précédé du signe *moins*, car la direction MI est opposée à la direction IM.

Les relations (4) donnent les propriétés essentielles des deux surfaces réglées. On voit d'abord immédiatement que les deux courbes C et C′ ne sont pas tangentes en I, car on ne peut avoir

$$\frac{dx}{\delta x} = \frac{dy}{\delta y} = \frac{dz}{\delta z}.$$

Mais les deux surfaces réglées seront tangentes en I, car les trois directions

$$\begin{array}{ccc} dx, & dy, & dz, \\ \delta x, & \delta y, & \delta z, \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{array}$$

sont dans un même plan, comme le montrent les relations (4). Ainsi, *les deux surfaces réglées considérées sont tangentes tout le long de* D.

3. Pour achever d'indiquer les propriétés essentielles

de ces deux surfaces, définissons le glissement de deux surfaces. Prenons une surface fixe S; une seconde surface S′ se déplace en restant constamment en contact avec S, le nombre des points de contact étant quelconque. Soit, au temps t, A un point de contact. Regardons-le comme appartenant à S′; il occupera alors au temps $t+dt$ la position A′. La grandeur géométrique

$$\frac{\overline{AA'}}{dt}$$

sera dite le glissement moyen des deux surfaces, et à la limite nous aurons le glissement des deux surfaces au temps t et au point A.

Nous allons évaluer le glissement au point I de nos deux surfaces réglées. A cet effet, envisageons les deux surfaces au temps $t+dt$; D'_1 est alors en D_1 et I'_1 en I_1. A l'instant $t+dt-dt$, c'est-à-dire t, nous avons la position dessinée du système. Le glissement sera le quotient de la grandeur géométrique $I_1 I'_1$ divisée par $-dt$, et par suite ses projections seront

$$\frac{\delta x - dx}{-dt}, \quad \frac{\delta y - dy}{-dt}, \quad \frac{\delta z - dz}{-dt},$$

c'est-à-dire

$$V\cos\alpha, \quad V\cos\beta, \quad V\cos\gamma.$$

Nous pouvons donc énoncer qu'*en tous les points de la génératrice commune* D, *le glissement des deux surfaces l'une sur l'autre est dirigé suivant cette génératrice et est représenté par la vitesse de translation* V *du mouvement hélicoïdal.*