NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. CARON

Sur le rayon de courbure de la projection d'une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 138-141

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__138_0>

SUR LE RAYON DE COURBURE DE LA PROJECTION D'UNE COURBE;

PAR M. J. CARON.

1. Étant donnée une droite tangente à une surface du second degré, en un point du contour apparent horizontal dans l'espace; si, par cette droite, on mène une série de plans sécants, toutes les sections en projection horizontale sont osculatrices.

Soit en effet MT la droite donnée, tangente à la surface S au point M du contour apparent horizontal dans l'espace A. Menons par MT deux plans arbitraires P, P_1. Les deux sections se projettent horizontalement suivant deux coniques c, c_1, bitangentes chacune d'elles au contour apparent en projection a.

L'ensemble des deux coniques C, C_1 peut être considéré comme l'intersection de la surface du second degré S avec une autre surface du second degré composée du système des deux plans P, P_1.

Dans ces conditions, cherchons la ligne des points doubles en projection; c'est l'intersection des plans des contours apparents horizontaux, ou des plans diamétraux conjugués des cordes verticales dans les deux surfaces.

Or : 1° le plan du contour apparent horizontal de la surface S passe par M; 2° le plan diamétral conjugué des cordes verticales du système des deux plans PP_1 passe par leur intersection MT; elle passe donc aussi par M.

Ainsi donc, l'une des cordes communes aux deux courbes c, c_1 passe par m; d'ailleurs une autre corde commune est la tangente mt, puisque c et c_1 sont tangentes au contour apparent en projection a. Finalement les deux courbes c, c_1 sont osculatrices en m.

Les plans P, P_1 étant choisis arbitrairement, la propriété est vraie pour toutes les sections planes menées par la droite MT.

2. Considérons maintenant une courbe gauche quelconque Γ tracée sur la surface S et coupant le contour apparent horizontal dans l'espace A au point M. Soit, de plus, MT la tangente à cette courbe gauche. Le plan osculateur de la courbe gauche Γ passe par MT et coupe la surface S suivant une conique C qui est osculatrice à la courbe Γ, et dont la projection horizontale c est aussi osculatrice à la projection horizontale γ de Γ.

Donc, pour trouver le cercle de courbure au point m de la courbe γ, il suffit de mener par MT un plan absolument arbitraire P qui coupe la surface S suivant une courbe C dont on cherchera le cercle de courbure de la projection c en m.

Il suffira, par exemple, de déterminer trois points de la courbe c, car on sait trouver directement le cercle de courbure en un point m d'une conique définie par ce point m, la tangente mt et trois points n, o, p.

3. La propriété précédente (2) a été démontrée pour une surface du second degré, elle est vraie aussi quand la surface S est de degré supérieur, car on peut remplacer la surface donnée au point M par une autre surface du second degré ayant les mêmes rayons de courbure principaux que la surface S au même point m.

4. Proposons-nous, comme application, de trouver le cercle de courbure en un point quelconque de la pro-

jection horizontale de l'intersection de deux surfaces du second degré.

Soit M, *m* le point considéré. Par l'intersection des deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, on peut faire passer une infinité de surfaces du second degré dont les équations sont de la forme $f + \lambda\varphi = 0$. Parmi toutes ces surfaces, il en existe une $\psi = 0$ pour laquelle le plan tangent au point M est vertical; ce sera précisément le plan vertical MT.

Le point M appartenant au contour apparent horizontal de la surface ψ, la construction (2) du cercle de courbure sera applicable en ce point.

Il n'est pas nécessaire, d'ailleurs, de construire complètement la surface ψ, il suffit de trouver trois points d'une section par un plan passant par MT.

Nous déterminerons d'abord deux points quelconques de l'intersection des deux surfaces, soit D, E. Puis, par les trois points M, D, E on mène un plan Q; il coupe les deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$ suivant deux coniques dont on connaît déjà trois points communs et dont on sait trouver le quatrième point commun F.

La surface ψ est donc coupée par le plan Q suivant une conique Δ dont on connaît les points M, D, E, F ainsi que la tangente en M, laquelle est l'intersection du plan Q avec le plan vertical MT.

Ceci fait, par MT et par un point quelconque H de l'intersection, on mène un plan P qui coupe les deux surfaces suivant deux courbes tangentes en M, passant par H et par un autre point H_1 que l'on sait trouver. Ce plan rencontre aussi la conique Δ en un point K.

En résumé, M, H, H_1, K sont quatre points d'une conique osculatrice à l'intersection au point M.

Toutes ces constructions se simplifient considérablement dans le cas particulier où les surfaces sont des cônes, ou plus généralement quand on a à sa disposition des plans coupant les deux surfaces suivant des courbes faciles à construire, des sections rectilignes, ou homothétiques par exemple.

Dans le cas de deux cônes, on choisira comme plan Q un plan quelconque passant par M et par le sommet du premier cône, et comme plan P le plan passant par la tangente MT et par le sommet du deuxième cône.

Cette façon de procéder donne lieu à des constructions plus simples que celle qui consisterait à rendre la tangente MT de bout, et à appliquer la construction qui donne les tangentes de rebroussement. De plus, toutes ces constructions peuvent s'effectuer dans une seule projection.