M. D'OCAGNE

Sur la combinaison des écarts

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 133-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__133_1>

SUR LA COMBINAISON DES ÉCARTS;

PAR M. M. D'OCAGNE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Le but de la présente Note est de donner une démonstration rigoureuse du théorème fondamental relatif à la combinaison des écarts, *une fois admise la loi de probabilité sous la forme que lui a donnée Gauss.*

I. *Rappel de définitions.* — On admet, d'après Gauss que, pour une série d'observations, les écarts entre le résultat vrai et le résultat constaté obéissent à la loi suivante, où $P(x)$ désigne la probabilité pour que l'écart soit compris entre $-x$ et x,

$$(1) \qquad P(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-h^2x^2}\,dx,$$

h étant une constante à déterminer expérimentalement.

Si l'on pose, d'une manière générale,

$$(2) \qquad \Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2}\,dt,$$

la formule précédente peut s'écrire

$$(3) \qquad P(x) = \Theta(hx).$$

On voit, d'après cela, que, pour une même valeur de la probabilité P, hx sera le même et, par suite, que l'écart x correspondant à cette probabilité P sera d'autant plus petit que h sera plus grand, c'est-à-dire que, suivant l'idée commune, la précision sera d'autant plus grande que h sera plus grand. C'est pourquoi h est pris comme *mesure de la précision*.

On appelle *écart probable* celui η dont la probabilité est $\frac{1}{2}$. Il est donné par la formule

$$(4) \qquad \eta = \frac{0,4769}{h}.$$

L'*écart moyen quadratique* ε est celui dont le carré est la moyenne des carrés des écarts constatés. Il est donné par

$$(5) \qquad \varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Enfin, l'*écart moyen* μ, ou la moyenne des valeurs absolues des écarts, est donné par

$$(6) \qquad \mu = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

Des formules (4) et (5) on tire

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = 0,67\ldots = \frac{2}{3}$$

environ, et des formules (5) et (6)

$$\frac{\varepsilon^2}{\mu^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Les formules (4), (5), (6) montrent qu'il suffit de connaître l'une des quantités h, η, ε, μ pour que les trois autres s'en déduisent.

II. Proposons-nous maintenant de rechercher la loi de probabilité des écarts résultants. Prenons d'abord le cas de deux causes d'erreurs, indépendantes l'une de l'autre, auxquelles correspondent respectivement, d'après Gauss, les lois de probabilité

$$p_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 x_1^2} dx_1$$

et

$$p_2 = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 x_2^2} dx_2.$$

Pour qu'un écart compris entre x_1 et $x_1 + dx_1$ d'une part, et un écart compris entre x_2 et $x_2 + dx_2$ de l'autre, se produisent simultanément, la probabilité est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\frac{h_1 h_2}{\pi} e^{-(h_1^2 x_1^2 + h_2^2 x_2^2)} dx_1\, dx_2$$

et, puisqu'il y a indépendance des causes, ces écarts s'ajoutent et l'on a un écart résultant compris entre $x = x_1 + x_2$ et $x + dx$.

Donc, en vertu du principe des probabilités totales, on aura la probabilité d'un tel écart résultant en faisant la somme de toutes les probabilités élémentaires telles que la précédente, pour lesquelles

$$x \leq x_1 + x_2 \leq x + dx.$$

Cette somme peut s'écrire

$$p = \frac{h_1 h_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x-x_1}^{x+dx-x_1} e^{-(h_1^2 x_1^2 + h_2^2 x_2^2)} dx_1\, dx_2$$
$$= \frac{h_1 h_2}{\pi} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[h_1^2 x_1^2 + h_2^2 (x-x_1)^2\right]} dx_1.$$

Représentant par J l'intégrale définie du second membre, nous avons

$$\mathrm{J} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(h_1^2+h_2^2)x_1^2 - 2h_2^2 x_1 x + h_2^2 x^2]} dx_1$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\, x_1 - \frac{h_2^2 x}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)^2 + \frac{h_1^2 h_2^2 x^2}{h_1^2+h_2^2}\right]} dx_1,$$

ou, en faisant sortir du signe $\int$ la partie constante relativement à la variable d'intégration x_1,

$$\mathrm{J} = e^{\frac{h_1^2 h_2^2 x^2}{h_1^2+h_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\, x_1 - \frac{h_2^2 x}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)^2} dx_1.$$

Posons

$$\sqrt{h_1^2+h_2^2}\, x_1 - \frac{h_2^2 x}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = u.$$

L'intégrale s'écrit alors

$$\mathrm{J} = e^{-\frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2+h_2^2} x^2} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$
$$= e^{-\frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2+h_2^2} x^2} \sqrt{\frac{\pi}{h_1^2+h_2^2}}.$$

Dès lors la valeur de p devient

$$p = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{\pi}\sqrt{h_1^2+h_2^2}} e^{-\frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2+h_2^2} x^2} dx.$$

Si nous posons

$$(7) \qquad h^2 = \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2+h_2^2},$$

elle s'écrit

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx. \tag{8}$$

Ainsi, nous trouvons pour l'écart résultant une loi de probabilité de la forme de Gauss, et nous voyons que la formule (7) peut s'écrire

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}. \tag{7'}$$

Dès lors, si nous avons un nombre quelconque de lois d'écarts, correspondant à des causes indépendantes les unes des autres, nous voyons qu'en composant d'abord ensemble deux d'entre elles, puis la résultante obtenue avec une troisième, et ainsi de suite, nous obtenons finalement encore une loi de la forme (8), où la constante h est donnée par [1]

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \ldots + \frac{1}{h_n^2}. \tag{9}$$

Les formules (4), (5), (6) montrent dès lors que l'on a

$$\left\{\begin{aligned} r_i^2 &= r_{i1}^2 + r_{i2}^2 + \ldots + r_{in}^2;\\ \varepsilon^2 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2,\\ \mu^2 &= \mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_n^2, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

expressions analytiques qui conduisent à cet énoncé :

Le carré de l'écart $\left\{\begin{matrix}\textit{probable}\\ \textit{moyen quadratique}\\ \textit{moyen}\end{matrix}\right\}$ *résultant est égal à la somme des carrés des écarts* $\left\{\begin{matrix}\textit{probables}\\ \textit{moyens quadratiques}\\ \textit{moyens}\end{matrix}\right\}$ *composants.*

(1) J'ai fait connaître la formule qui, dans le cas des écarts non plus linéaires, mais dans le plan, correspond à celle-ci (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVIII, p. 517).